ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA z. 117 Nr kol. 1337

Marek KUBALE
Politechnika Gdańska

PROBLEM KOLOROWANIA KRAWĘDZI GRAFÓW. PRZEGLĄD ALGORYTMÓW I ZASTOSOWAŃ

Streszczenie. Problemy kolorowania grafów należą do najtrudniejszych problemów optymalizacji kombinatorycznej z punktu widzenia złożoności obliczeniowej. W niniejszej pracy rozważono zagadnienie kolorowania krawędzi grafu na tle zastosowań w wybranych problemach technicznych. W szczególności dokonano przeglądu dolnych i górnych oszacowań indeksu chromatycznego grafów i multigrafów oraz przeglądu przybliżonych algorytmów kolorowania krawędzi ze szczególnym uwzględnieniem ich złożoności, dokładności i struktury najmniejszych trudnych do kolorowania grafów.

PROBLEM OF COLORING THE EDGES OF A GRAPH. THE SURVEY OF ALGORITHMS AND APPLICATIONS

Summary. Graph coloring problems belong to the hardest combinatorial optimization problems with respect to the computational complexity. In this paper we consider the problem of coloring the edges of a graph against a background of practical applications in selected technological problems. In particular we review some bounds on the chromatic index of a graph and multigraph, practical applications of edge coloring and we survey some approximate algorithms for edge coloring with particular reference to their computational complexity, accuracy and the structure of hard to color graphs.

1. Wprowadzenie

Problemy kolorowania grafów należą do najtrudniejszych problemów optymalizacji kombinatorycznej. Ogólnie, w problemie kolorowania grafów wyróżniamy dwa zadania: kolorowanie wierzchołków i kolorowanie krawędzi. Oba zadania są NP-trudne i oba mają wiele zastosowań w postaci klasycznej i rozszerzonej.

Niniejszy tekst jest drugim z dwóch artykułów przeglądowych poświęconych metodom kolorowania grafów i ich zastosowaniom. Pierwszy artykuł ukazał się dwa lata temu i dotyczył kolorowania wierzchołków grafu [14]. W niniejszym natomiast rozważamy zagadnienie kolorowania krawędzi grafu na tle zastosowań w wybranych zagadnieniach telekomunikacji, informatyki i badań operacyjnych. W szczególności dokonamy przeglądu dolnych i górnych oszacowań indeksu chromatycznego grafów i multigrafów, przeglądu wielomianowo

kolorowalnych klas grafów oraz przeglądu zastosowań problemu kolorowania krawędzi. Następnie przedstawimy przybliżone algorytmy kolorowania krawędzi ze szczególnym uwzględnieniem ich złożoności obliczeniowej, dokładności i struktury trudnych do kolorowania grafów.

2. Pojęcie indeksu chromatycznego

Niech będzie dany skończony graf spójny $G = (V,E)$ bez pętli. Zbiór V mocy $|V| = n$ nazywamy *zbiorem wierzchołków*, zbiór E mocy $|E| = m$ nazywamy *zbiorem krawędzi*, zaś liczbę m *rozmiarem* grafu. Jeżeli E jest zbiorem z powtórzeniami, to G nazywamy *multigrafem*. Mówimy, że G jest *k-barwny krawędziowo* lub krótko *k-barwny*, jeżeli jego krawędzie można pomalować k różnymi kolorami w taki sposób, że żadne krawędzie sąsiednie (stykające się w wierzchołku) nie mają tej samej barwy. Mówimy wtedy również, że istnieje *k-pokolorowanie* krawędzi grafu G. Najmniejszą liczbę k, dla której graf G jest k-barwny, nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy przez $\chi'(G)$. Zatem k-pokolorowanie krawędzi grafu $G = (V,E)$ jest równoważne wyznaczeniu podziału zbioru E na k skojarzeń.

Istnieje szereg metod kolorowania krawędzi dowolnego grafu, zwłaszcza przybliżonych. Niech $A(G)$ oznacza liczbę kolorów użytych do pokolorowania krawędzi grafu G metodą A. Z każdą taką metodą kolorowania związać można *funkcję dobroci* $A: N \to R$, gdzie $N = \{1,2,...\}$, zdefiniowaną następująco:

$$A(m) = \max\{A(G)/\chi'(G): G \text{ jest rozmiaru } m\}.$$

Funkcja ta charakteryzuje jakość rozwiązań generowanych przez A w najgorszym przypadku danych. Rzecz jasna, dla każdego algorytmu kolorowania krawędzi A mamy $A(m) \le m$, natomiast dla każdego algorytmu dokładnego $A(m) = 1$. Maksymalna wartość funkcji dobroci określa tzw. bezwzględne oszacowanie algorytmu. Bardziej formalnie *bezwzględne oszacowanie* algorytmu kolorowania A definiujemy jako

$$R_A = \inf\{r \ge 1: A(G)/\chi'(G) \le r \text{ dla wszystkich } G\}.$$

Natomiast *asymptotycznym oszacowaniem* dla algorytmu A nazywać będziemy wartość R_A^∞ zdefiniowaną następująco:

$$R_A^\infty = \inf\{r \ge 1: \text{dla pewnego } n \in N,\ A(G)/\chi'(G) \le r \text{ dla wszystkich } G \text{ z } \chi'(G) \ge n\}.$$

Dla danego algorytmu przybliżonego A *najmniejszy dość trudny* do kolorowania graf definiuje się jako najmniejszy w sensie liczby wierzchołków graf G, taki że pewna implementacja algorytmu A daje wynik $A(G) > \chi'(G)$. Jeśli jest więcej takich grafów n-wierzchołkowych, wybiera się ten, który ma najmniej krawędzi. Natomiast *najmniejszym trudnym* do kolorowania grafem jest taki najmniejszy graf G, dla którego każda implementacja algorytmu A daje wynik $A(G) > \chi'(G)$.

Jest jasne, że $\chi'(K_{1,k}) = k$, gdzie $K_{1,k}$ jest gwiazdą i w związku z tym łatwo zbudować grafy o dowolnie dużym indeksie chromatycznym. Z drugiej strony $\chi'(G) = 1$ wtedy i tylko

wtedy, gdy G jest grafem zawierającym wyłącznie izolowane krawędzie. Natomiast jedynymi grafami spójnymi o indeksie chromatycznym 2 są ścieżki P_n i cykle parzyste C_{2k}. Nie wiadomo, przy jakich warunkach graf G jest 3-chromatyczny, chociaż łatwo podać przykłady takich grafów (np. cykle nieparzyste). Ogólnie, nie jest znany żaden prosty wzór na indeks chromatyczny dowolnego grafu bądź multigrafu i musimy zadowolić się jego oszacowaniami, zarówno z dołu, jak i z góry.

Dolne oszacowanie indeksu chromatycznego wyznaczone jest przez maksymalny stopień wierzchołka grafu, który oznaczamy przez Δ. Ponieważ w dowolnym pokolorowaniu grafu G wszystkie krawędzie wokół dowolnego wierzchołka v muszą otrzymać różne kolory, więc

$$\Delta \leq \chi'(G). \tag{1}$$

Oszacowanie to poprawił Berge [1] udowadniając, że

$$\max\{\Delta, \lceil m/t \rceil\} \leq \chi'(G), \tag{2}$$

gdzie t jest rozmiarem maksymalnego skojarzenia w m-krawędziowym grafie G. Oszacowanie (2) jest lepsze od (1), na przykład dla cykli nieparzystych. Złożoność obliczeniowa oszacowania Berge'a jest podyktowana efektywnością znajdowania maksymalnego skojarzenia w grafach ogólnych, które może być znalezione w czasie $O(n^{5/2})$. Kolejnym oszacowaniem dolnym jest

$$\tau \leq \chi'(G), \tag{3}$$

gdzie $\tau = \max\{\lceil 2|E(U)|/|U|-1 : U \subseteq V$ oraz $|U|$ jest liczbą nieparzystą $\geq 3\}$. Fakt, iż $\tau \leq \chi'(G)$, wynika stąd, że dowolny kolor może być użyty do pomalowania co najwyżej $|U|/2$ krawędzi podgrafu indukowanego zbiorem U.

Pierwsze górne oszacowanie indeksu chromatycznego multigrafu zostało podane już w roku 1949 przez Shannona [22] w postaci nierówności

$$\chi'(G) \leq 3\Delta/2. \tag{4}$$

Oszacowanie to zostało następnie poprawione przez Vizinga [23], który pokazał, że

$$\chi'(G) \leq \Delta + \mu, \tag{5}$$

gdzie μ jest *maksymalnym zwielokrotnieniem* krawędzi, czyli maksymalną liczbą krawędzi łączących tę samą parę wierzchołków. Oszacowanie (5) jest dość słabe dla multigrafów mających jedynie dwa wierzchołki. Mamy wtedy bowiem $\Delta+\mu = 2\Delta$, pomimo że $\chi'(G) = \Delta$. Oszacowanie Vizinga może być uzyskane w czasie proporcjonalnym do rozmiaru grafu.

Inne łatwo policzalne oszacowanie górne podał Ore [20], który udowodnił prawdziwość następującej nierówności

$$\chi'(G) \leq \max\{\Delta, 0{,}5\max\lfloor \rho(u)+\rho(v)+\rho(w) \rfloor\}, \tag{6}$$

gdzie wewnętrzne maksimum jest rozciągnięte na wszystkie drogi elementarne (u,v,w) długości 2, zaś $\rho(v)$ jest stopniem wierzchołka $v \in V$. Oszacowanie to można otrzymać w czasie $O(m+n)$ przy okazji trawersowania grafu G metodą w głąb.

Najlepsze znane oszacowanie indeksu chromatycznego dowolnego grafu zawierającego multikrawędzie, ściśle związane z algorytmem kolorowania, podane zostało przez Nishizekiego i Kashiwagiego [19] w formie nierówności

$$\chi'(G) \leq \max\{\tau, \lfloor 1{,}1\Delta+0{,}8 \rfloor\}. \tag{7}$$

Na zakończenie tego punktu zauważmy, że jeżeli G jest grafem prostym, to $\mu = 1$. Wówczas oszacowanie (5) sprowadza się do nierówności

$$\chi'(G) \leq \Delta + 1. \tag{8}$$

Zatem twierdzenie Vizinga daje nadzwyczaj dokładne oszacowanie indeksu chromatycznego grafu G, skoro $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta+1$. Na tej podstawie wszystkie grafy proste możemy podzielić na dwie klasy w następujący sposób: mówimy, że G jest *klasy 1*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta$, zaś *klasy 2*, gdy $\chi'(G)=\Delta+1$. Przykładami grafów klasy 1 są: dwudzielne, pełne K_{2k}, planarne stopnia $\Delta \geq 8$, z gwiazdą spinającą parzystego rzędu. Grafami klasy 2 są między innymi niektóre grafy o nieparzystej liczbie wierzchołków, np. cykle, pełne, a ogólnie grafy regularne nieparzystego rzędu i regularne z wierzchołkiem przegubowym. Erdös i Wilson [2] udowodnili, że prawie wszystkie grafy mają dokładnie jeden wierzchołek stopnia Δ i w konsekwencji prawie wszystkie należą do klasy 1.

3. Złożoność obliczeniowa kolorowania krawędzi

Naczelnym pytaniem w dziedzinie kolorowania krawędzi grafu jest pytanie o złożoność obliczeniową problemu optymalnego kolorowania. Niestety, nie jest znany rząd złożoności obliczeniowej, gdyż problem kolorowania krawędzi grafu pozostaje NP-zupełny nawet wówczas, gdy G jest kubiczny [7]. Istnieje zatem silne przypuszczenie, że problem ten nie może być rozwiązany algorytmem wielomianowym. Oznacza to między innymi, że nie należy się spodziewać prostej charakteryzacji grafów klasy 1 i 2.

Zauważmy na marginesie, że problem kolorowania krawędzi grafu G może być wyrażony jako problem kolorowania wierzchołków grafu $L(G)$, tj. *grafu krawędziowego* grafu G. Graf $L(G)$ powstaje z grafu G poprzez odwzorowanie każdej krawędzi w wierzchołek i połączenie tych wierzchołków w $L(G)$, których odpowiadające krawędzie w G są sąsiednie. Niestety, takie sprowadzenie problemu kolorowania krawędzi do kolorowania wierzchołków nie odpowiada na pytanie dotyczące złożoności obliczeniowej. Zauważmy ponadto, że kolorowanie krawędziowe wydaje się być przynajmniej tak samo trudne jak kolorowanie wierzchołkowe dla licznych klas grafów (chociaż sytuacja dla podklas może być inna). Obecnie jedyna rodzina grafów klasy 1, dla której problem kolorowania wierzchołków jest NP-zupełny, to grafy planarne z $\Delta \geq 8$. Co więcej, problem kolorowania krawędzi jest NP-zupełny dla grafów porównaniowych i krawędziowych grafów dwudzielnych. Dla wszystkich tych rodzin kolorowanie wierzchołkowe może być rozwiązane w czasie wielomianowym.

Jak powiedzieliśmy, problem określenia wartości indeksu chromatycznego w przypadku ogólnym jest NP-zupełny, aczkolwiek jego wartość możemy oszacować z błędem

nie przekraczającym 1. Co więcej, zagadnienie to pozostaje trudne do rozwiązania nawet wówczas, gdy G jest grafem należącym do jednej z poniższych rodzin:

1. Grafy doskonałe.
2. Grafy krawędziowe.
3. Grafy o ograniczonym stopniu.
4. Grafy o ograniczonej grubości.
5. Grafy regularne.
6. Grafy porównaniowe.

Z drugiej strony problem kolorowania krawędzi można rozwiązać w czasie wielomianowym, gdy G jest grafem należącym do jednej z poniższych rodzin:

1. Drzewa i unicykle.
2. Częściowe l-drzewa.
3. Grafy dwudzielne.
4. Grafy szeregowo-równoległe.
5. Grafy zewnętrznie planarne.

Więcej szczegółów na ten temat wraz z odpowiednią bibliografią można znaleźć w pracy [8].

4. Przegląd zastosowań

Jak wspomniano na wstępie, problem kolorowania krawędzi grafu ma szereg zastosowań praktycznych w nauce i technice, zarówno w postaci czystej, jak i rozszerzonej, tzn. z uwzględnieniem dodatkowych kryteriów i ograniczeń. Jednakże musimy pamiętać, że im bardziej dany problem techniczny jest ogólny, tym słabszy pozostaje jego aspekt chromatyczny. Poniżej podajemy listę udokumentowanych zastosowań kolorowania krawędziowego w rozbiciu na odpowiednie grupy tematyczne.

A. Telekomunikacja.

1. Sterowanie pól komutacyjnych [11].
2. Testowanie sieci komunikacyjnych [3].
3. Projektowanie radiowych sieci pakietowych [21].

B. Informatyka.

4. Szeregowanie transmisji plików w sieci komputerowej [13].
5. Szeregowanie testów diagnostycznych w systemie komputerowym [9].

C. Badania operacyjne.

6. Planowanie eksperymentów badawczych [4].
7. Układanie terminarzy rozgrywek sportowych [24].

D. Szeregowanie zadań.

8. Szeregowanie zadań w otwartym systemie obsługi [15].
9. Szeregowanie zadań 2-procesorowych na maszynach dedykowanych [12].
10. Układanie rozkładów zajęć szkolnych [16].

Oczywiście, powyższe konkretne zastosowania problemu kolorowania krawędzi nie wyczerpują wszystkich przypadków, gdzie można stosować algorytmy kolorowania krawędzi. Najbardziej popularne spośród tych algorytmów prezentujemy w następnym punkcie.

5. Algorytmy przybliżone

W praktyce, gdy trzeba kolorować grafy mające kilkaset krawędzi, zmuszeni jesteśmy stosować wielomianowe algorytmy przybliżone. Dlatego jest niezwykle istotne gruntowne poznanie własności takich algorytmów, a zwłaszcza złożoności obliczeniowej, funkcji dobroci i struktury trudnych do kolorowania grafów.

Na szczęście problem kolorowania krawędzi ma bardzo dobre algorytmy przybliżone. Jest to związane z oszacowaniem Vizinga (8), który udowodnił, że indeks chromatyczny może przyjmować tylko dwie wartości. Co więcej, z dowodu tego wynika sposób konstruowania (Δ +1)-kolorowania w czasie $O(m^2)$. Dzięki użyciu odpowiedniej struktury danych algorytm ten może być zaimplementowany w czasie $O(mn)$, o czym piszemy w podpunkcie 5.2.

5.1. *Metoda NC*

Najbardziej naiwnym algorytmem kolorowania krawędzi jest algorytm *NC* (ang. *naive coloring*), którego istota polega na tym, że wybiera się dowolną nie pomalowaną jeszcze krawędź e i przydziela się jej dowolny możliwy spośród użytych już kolorów. Jeśli żaden z dotychczas użytych kolorów nie może być zastosowany do pomalowania e, to wprowadza się nowy kolor. Algorytm ten został podany w pracy [10]. Jego złożoność jest rzędu $O(m\Delta)$. Można pokazać, że dla każdego grafu G, $NC(G) \le (\rho(u)-1)+(\rho(v)-1)+1 < 2\Delta$, gdzie $e = \{u,v\}$ jest krawędzią grafu G, która otrzymała maksymalny kolor w trakcie działania algorytmu *NC*. Zatem

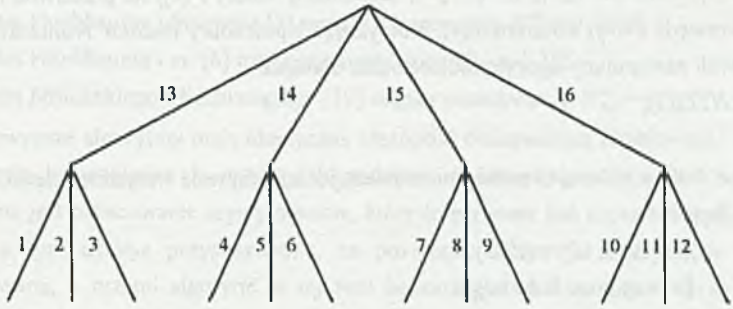
$$NC(G) < 2\chi'(G) \tag{9}$$

dla każdego grafu G.

Algorytm *NC* optymalnie koloruje gwiazdy, podwójne gwiazdy, koła oraz cykle nieparzyste. Jednakże czasami nie jest w stanie optymalnie pomalować nawet ścieżki P_n, $n \ge 5$. Rodzinę najgorszych do kolorowania grafów stanowią drzewa dwupoziomowe $T_k = (V_k, E_k)$ maksymalnego stopnia k z $|E_k| = k^2$, $\chi'(T_k) = k$ i $NC(T_k) = 2k-1$ dla każdego $k = 2,3,\ldots$. Przykład takiego drzewa wraz z odpowiednią numeracją krawędzi pokazano na rysunku 1.

Jeżeli krawędzie będą kolorowane w podanej kolejności, to liczba użytych kolorów osiągnie $NC(T_k) = 2k-1 = 2\chi'(G)-1$. Ponieważ k może przyjmować dowolnie duże wartości, więc $R_{NC} = R^{\infty}_{NC} = 2$. Najmniejszy dość trudny do kolorowania jest pierwszy graf $T_2 = P_5$ w tej rodzinie. Natomiast najmniejszy graf trudny dla algorytmu *NC* nie istnieje, ponieważ zawsze można podać taką kolejność krawędzi, które kolorowane zachłannie dają optymalne

pokolorowanie grafu G. Oczywiście, znalezienie takiej kolejności w zbiorze $m!$ możliwych nie jest łatwe.



Rys. 1. Najgorszy graf T_4 dla algorytmu *NC*
Fig. 1. Worst-case graph T_4 for algorithm *NC*

5.2. *Metoda NTL*

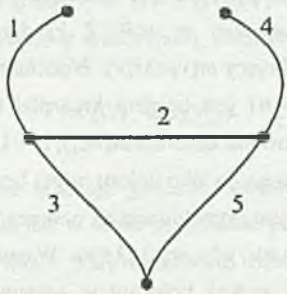
Najbardziej naturalne ulepszenie algorytmu naiwnego polega na zastosowaniu metody wymieniania kolorów: dla każdej krawędzi e wymagającej nowego koloru sprawdzamy wpierw, czy jest możliwe jakieś „proste" przekolorowanie krawędzi już pokolorowanych, które odblokowuje kolor dla e. Ta naturalna metoda jest podstawą większości algorytmów efektywnego kolorowania krawędzi grafów i multigrafów.

Obecnie, za [17] opiszemy szczegółowo procedurę *Recolor*, która pomaga w uzyskaniu (Δ+1)-pokolorowania grafów prostych. Przypuśćmy, że wszystkie krawędzie grafu G z wyjątkiem $\{u,v\}$ zostały pokolorowane Δ+1 kolorami. Wówczas przez $M(v)$ oznaczymy zbiór wszystkich kolorów brakujących w $v \in V$. Z każdym wierzchołkiem v kojarzymy dowolny, lecz ustalony kolor brakujący $m(v) \in M(v)$. *Wachlarz Vizinga* F_v przy wierzchołku v rozpoczynający się krawędzią $\{v,u\}$ jest ciągiem krawędzi $(\{v,w_0\},\{v,w_1\},\ldots,\{v,w_s\})$, gdzie $w_0=u$, takim że $\{v,w_i\}$ jest pomalowana kolorem $m(w_{i-1})$, $i = 1,\ldots,s$. Jeśli F_v jest maksymalnym (w sensie mocy) wachlarzem Vizinga, to albo koloru $m(w_s)$ brakuje również w v, czyli $m(w_s) \in M(v)$, albo pewna krawędź w F_v jest pomalowana za pomocą $m(w_s)$. Oczywiście, wachlarz F_v zawiera tylko jedną krawędź $\{v,u\}$, gdy $m(u) \in M(v)$. Wspomniana procedura *Recolor*(u,v) koloruje krawędź $\{u,v\}$ jednym z Δ+1 kolorów w następujący sposób. Niech F_v będzie maksymalnym wachlarzem przy v. Jeśli $m(w_s) \in M(v)$, to dla każdego $i = 0,1,\ldots,s$ kolorujemy $\{v,w_i\}$ używając $m(w_i)$. W przeciwnym razie niech $P(w_s)$ będzie drogą w grafie G zaczynającą się w w_s i pomalowaną na przemian kolorami $m(v)$ i $m(w_s)$. Jeśli $P(w_s)$ nie dociera do v, to zamieniamy na przeciwne kolory na tej drodze i przesuwamy cyklicznie kolory poszczególnych krawędzi $\{v,w_i\}$ malując je kolorami $m(w_i)$, $i = 0,\ldots,s$-1, a następnie kolorujemy $\{v,w_s\}$ kolorem $m(v)$. Jeśli zaś $P(w_s)$ osiąga v, to istnieje wierzchołek w_j, $j = 0,\ldots,s$-2 spełniający $m(w_j) = m(w_s)$ oraz droga $P(w_j)$ zaczynająca się w w_j i pomalowana

kolorami $m(v)$ i $m(w_s)$. Wówczas przesuwamy cyklicznie kolory wachlarza malując każdą krawędź $\{v,w_i\}$ kolorem $m(w_i)$, $i = 0,...,j-1$, zamieniamy kolory $P(w_j)$ na przeciwne i w końcu malujemy krawędź $\{v,w_j\}$ kolorem $m(v)$. Korzystając z procedury *Recolor* Nishizeki i in. [17] zaproponowali następujący algorytm kolorowania krawędzi.

procedure *NTL*(G);
begin
  if $\Delta \le 2$ **then** koloruj G zachłannie trawersując sukcesywnie wszystkie ścieżki i cykle
  else begin
    $q := \Delta+1$; $G' := (V,\emptyset)$;
    for każda $e \in E$ **do begin**
      $G' := G' + e$;
      if $e = \{u,v\}$ może otrzymać wspólny kolor brakujący **then** koloruj nim e
        else begin *Recolor*(u,v); koloruj e **end**
    end
  end
end;

Algorytm *NTL* optymalnie koloruje wszystkie cykle, grafy planarne z $\Delta \ge 8$, szeregowo-równoległe z $\Delta \ge 4$, koła, gwiazdy i podwójne gwiazdy oraz prawie wszystkie grafy losowe. W szczególności daje 4-pokolorowanie grafu z $\chi'(G) = 3$. Zatem jego bezwzględne oszacowanie wynosi $R_{NTL} = 4/3$. Jednakże, co ważniejsze, oszacowanie asymptotyczne $R^{\infty}_{NTL} = 1$. Najmniejszym dość trudnym grafem dla *NTL* jest tzw. byk jak na rys. 2. Ponownie najmniejszy trudny graf nie istnieje.



Rys. 2. Najmniejszy dość trudny graf dla algorytmu *NTL*
Fig. 2. The smallest slightly hard-to-color graph for algorithm *NTL*

6. Zakończenie

Powyżej opisaliśmy najbardziej znane algorytmy przybliżone dla kolorowania krawędzi grafów prostych. Powyższy przegląd uzupełniamy wzmianką na temat algorytmów kolorowania multigrafów. Są to w kolejności:

1. Algorytm Shannona [22] mający oszacowanie $R_S^\infty = 1{,}5$.
2. Algorytm Nishizekiego i Sato [18] mający oszacowanie $R_{NS}^\infty = 1{,}25$.
3. Algorytm Hochbauma i Shmoysa [5] mający oszacowanie $R_{HS}^\infty = 1{,}16(6)$.
4. Algorytm Hochbauma i in. [6] mający oszacowanie $R_{HNS}^\infty = 1{,}125$.
5. Algorytm Nishizekiego i Kashiwagiego [19] mający oszacowanie $R_{NK}^\infty = 1{,}1$.

Powyższe algorytmy mają identyczną złożoność obliczeniową $O(m(n+\Delta))$ i identyczne oszacowanie bezwzględne $R_A = 4/3$. Jak widzimy, podstawowym kryterium oceny tych algorytmów jest oszacowanie asymptotyczne, który to parametr jest coraz bliższy jedności. W związku z tym istnieje przypuszczenie, że powyższa sekwencja algorytmów może być kontynuowana, a ostatni algorytm w tej serii będzie kolorował multigrafy przy użyciu co najwyżej $\chi'(G)+1$ kolorów.

LITERATURA

1. Berge C.: Graphs and Hypergraphs. North-Holland, Amsterdam 1973.
2. Erdös P., Wilson R.J.: On the chromatic index of almost all graphs, J. Combinat. Theory, Ser. B., vol. 23, 1977, pp. 255-257.
3. Even S., Goldreich O., Moran S., Tong P.: On the NP-completeness of certain network testing problems, Networks, vol. 14, 1984, pp. 1-24.
4. Fiorini S., Wilson R.J.: Edge-colourings of graphs - Some applications, Proc. 5th British Combinatorial Conference, Aberdeen, 1975, pp. 193-202.
5. Hochbaum D.S., Shmoys D.B.: An asymptotic 7/6-approximation algorithm for edge coloring multigraphs, 1983, (maszynopis).
6. Hochbaum D.S., Nishizeki T., Shmoys D.B.: A better than „best possible" algorithm to edge color multigraphs, J. Algorithms, vol. 7, 1986, pp. 79-104.
7. Holyer I.: The NP-completeness of edge-coloring, SIAM J. Comp., vol. 10, 1981, pp. 718-720.
8. Johnson D.S.: The NP-completeness column: An ongoing guide, J. Algorithms, vol. 6, 1985, pp. 434-451.
9. Krawczyk H., Kubale M.: An approximation algorithm for diagnostic test scheduling in multicomputer systems, IEEE Trans. Comput., vol. C-34, 1985, pp. 869-872.
10. Kubale M.: A note on a naive algorithm for edge coloring graphs, Podst. Ster., vol. 13, 1983, pp. 99-103.
11. Kubale M.: Zastosowanie kolorowania krawędzi grafu do sterowania pól komutacyjnych Closa, Arch. Aut. Telemech., vol. 31, 1986, pp. 39-50.
12. Kubale M.: Podzielne uszeregowania zadań dwuprocesorowych na procesorach dedykowanych, Zesz. Nauk. Politech. Śląskiej, Ser. Automatyka, vol. 100, 1990, pp. 145-153.

13. Kubale M.: Szeregowanie transmisji plików w oknach czasowych, Zesz. Nauk. Politech. Śląskiej, Ser. Automatyka, vol. 110, 1992, pp. 69-73.

14. Kubale M.: Problem kolorowania wierzchołków grafów. Przegląd algorytmów i zastosowań, Zesz. Nauk. Politech. Śląskiej, Ser. Automatyka, vol. 114, 1994, pp. 187-198.

15. Kubale M.: Open shop problem with zero-one time operations and integer release date/deadline intervals, Disc. Appl. Math. (w druku).

16. McDiarmid C.J.H.: The solution of a timetabling problem, J. Inst. Math. Appl. vol. 9, 1972, pp. 23-34.

17. Nishizeki T., Terada O., Leven D.: Algorithms for edge-coloring graphs, Tech. Rep. TRECIS 83001, Dept. Elec. Comm., Tohoku Univ., 1983.

18. Nishizeki T., Sato M.: An algorithm for edge-coloring multigraphs, Trans. IECE, vol. J-67 D, 1984, pp. 466-471.

19. Nishizeki T., Kashiwagi K.: On the 1.1 edge-coloring of multigraphs, SIAM J. Disc. Math., vol. 3, 1990, pp. 391-410.

20. Ore O.: The Four Color Problem, Academic Press, New York 1967.

21. Prohazka C.G.: Bounding the maximum size of a packed radio network, IEEE Trans. Comput., vol. C-37, 1988, pp. 1184-1190.

22. Shannon C.E.: A theorem on coloring lines of a network, J. Math. Phys., vol. 28, 1949, pp. 148-151.

23. Vizing V.G.: On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Discret. Anal., vol. 3, 1964, pp. 25-30.

24. Werra D.: de, Some models of graphs for scheduling sports competitions, Disc. Appl. Math., vol. 21, 1988, pp. 47-65.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

Abstract

Graph coloring problems belong to the hardest combinatorial problems. In general, in algorithmic graph coloring the following tasks are considered: coloring the vertices and coloring the edges of a graph. Both problems are NP-hard and both have numerous practical applications. This article is the second of two review papers on graph coloring problems. The first article appeared two years ago in the same journal and dealt with the problem of vertex coloring [14].

In this paper we consider the problem of coloring the edges of a graph against a background of practical applications in selected areas of technological problems. In particular, we review the following: bounds on the chromatic index of a graph and multigraph, comlexity results, problems in which edge coloring has been successfully applied and some polynomial approximation algorithms for edge coloring with particular reference to their complexity, accuracy and the structure of hard to color graphs.