

Marcin SEK\*  
Politechnika Wrocławska

## O MOŻLIWOŚCIACH UPROSZCZENIA MODELI DYNAMICZNYCH ŻELBETOWYCH STROPÓW WIELOPOLOWYCH

**Streszczenie.** W pracy rozpatrzono możliwości przyjęcia odpowiedniego dynamicznego modelu obliczeniowego stropu wielopolowego. Stropy rozważanego typu są najczęściej poddane dynamicznemu oddziaływaniu ustawionych na nich maszyn różnego rodzaju oraz sporadycznie innym wpływom (upadek masy, efekty awarii). Zmienność w czasie tych obciążeń jest bardzo różna, czasami ma postać bardzo złożoną. Mając powyższe właściwości na uwadze zajęto się doбором dynamicznych modeli obliczeniowych stropów wielopolowych o możliwie ograniczonym rozmiarze. Na podstawie przeprowadzonych analiz dynamicznych sprawdzono, czy do uzyskania określonych parametrów dynamicznych można stosować modele z ograniczoną liczbą pól. Przeanalizowano także, jaki wpływ na wyniki analiz ma użycie w modelu obliczeniowym stropu podciągów o różnej wysokości.

## ABOUT POSSIBILITIES TO SIMPLIFY DYNAMIC MODELS OF CONCRETE MULTIFIELD CEILINGS

**Summary.** It was considered, in this paper, the possibilities of assumption of appropriate dynamic model of multifield ceiling. Ceilings of considered type are mostly subjected to dynamic influence of different machines and occasional – other influence (collapse of mass, effect of failure). Variability in time of loads is various, sometime have very complex form. Taking this into consideration, we took up selection of dynamic computational models for multifield ceilings with as possible bounded size. On the basis of carried out dynamic analyses it was checked if in order to obtain specific dynamic parameter it could be applied models with restricted number of fields. It was checked also what is the contribution to above – mentioned analysis of using in computational model of ceiling, binders with various high.

### 1. Wstęp

Żelbetowe stropy przemysłowe są najczęściej konstruowane w postaci płyty bezżebrowej lub z żebrami, opartej na regularnie rozmieszczonych słupach i ścianach. Tak powstałe układy

---

\*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Władysław Mironowicz, Prof. Politechniki Wrocławskiej.

konstrukcyjne można nazwać stropami wielopolowymi. Istnieje duża różnorodność złożonych zagadnień dynamiki takich stropów w ujęciu deterministycznym i losowym, dotyczących obciążenia dynamicznego i samej konstrukcji – w szczególności uwzględniających jej różnego rodzaju uszkodzenia eksploatacyjne [2]. Z tych względów istotne staje się określenie dynamicznego modelu obliczeniowego takich stropów o możliwie ograniczonym rozmiarze. Do rozważań przyjęto sześć modeli obliczeniowych i przeprowadzono na nich analizę zagadnienia własnego i analizę drgań wymuszonych siłą pionową  $F = 30 \text{ kN}$  o częstotliwości  $f = 2,5 \text{ Hz}$ , którą umiejscowiono w centralnym polu każdego modelu. W celu weryfikacji uzyskanych wyników wykonano takie same analizy obliczeniowe stropu o dwóch różnych wymiarach siatki słupów (grupy 1 i 2). Sprawdzono również, jaki wpływ na wyniki analiz ma użycie w modelu obliczeniowym stropu podciągów o różnej wysokości.

## 2. Zapis teoretyczny zagadnienia

Rozważane układy składają się z cienkiej, izotropowej płyty oraz pionowych słupów traktowanych jako pręty Eulera o stałych charakterystykach.

Jednostkową energią potencjalną oraz kinetyczną odkształcenia cienkiej płyty izotropowej określają wzory:

$$dE_{pp} = \frac{1}{2} D [(w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2)] \quad dE_{kp} = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 \quad (1)$$

Stan przemieszczeń w elemencie płyty przedstawia relacja:

$$w(x, y, t) = \mathbf{q}_p^T(t) \mathbf{V}(x, y) \quad (2)$$

gdzie:

$\mathbf{q}_p$  – wektor współrzędnych uogólnionych,

$\mathbf{V}$  – wektor funkcji aproksymacyjnych.

W konsekwencji macierze sztywności  $\mathbf{K}_{pe}$  i bezwładności  $\mathbf{B}_{pe}$  elementu płyty mają postać:

$$\mathbf{K}_{pe} = \iint D [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + 2\nu\mathbf{A}_3 + 2(1 - \nu)\mathbf{A}_4] dx dy \quad \mathbf{B}_{pe} = \iint (\rho h \mathbf{A}_5) dx dy \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_1 = V_{,xx} V_{,xx}^T;$$

$$\mathbf{A}_2 = V_{,yy} V_{,yy}^T;$$

$$\mathbf{A}_3 = V_{,xx} V_{,yy}^T;$$

$$\mathbf{A}_4 = V_{,xy} V_{,xy}^T;$$

$$\mathbf{A}_5 = V V^T.$$

Jednostkową energię potencjalną oraz kinetyczną elementu słupa określają wzory:

$$dE_{ps} = \frac{1}{2} (EI_y v_{s,z}''^2 + EI_x u_{s,z}''^2 + EA_s w_{s,z}'^2) \quad dE_{ks} = \frac{1}{2} m_s (\dot{v}_s^2 + \dot{u}_s^2 + \dot{w}_s^2) \quad (4)$$

Stan przemieszczeń w elemencie słupa przedstawiają relacje:

$$v_s = \mathbf{q}_{sv}^T(t) \mathbf{N}_1(z) \quad u_s = \mathbf{q}_{su}^T(t) \mathbf{N}_2(z) \quad w_s = \mathbf{q}_{sw}^T(t) \mathbf{N}_3(z) \quad (5)$$

gdzie:

$\mathbf{q}_s = [\mathbf{q}_{sv}, \mathbf{q}_{su}, \mathbf{q}_{sw}]^T$  – wektor współrzędnych uogólnionych,

$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$  – wektory funkcji aproksymacyjnych.

Macierze sztywności  $\mathbf{K}_{se}$  i bezwładności  $\mathbf{B}_{se}$  elementu słupa przybierają postać:

$$\mathbf{K}_{se} = \int \text{diag} (EI_y \mathbf{K}_1, EI_x \mathbf{K}_2, EA_s \mathbf{K}_3) dz \quad \mathbf{B}_{se} = \int \text{diag} (m_s \mathbf{B}_1, m_s \mathbf{B}_2, m_s \mathbf{B}_3) dz \quad (6)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{N}_{1,z}'' \mathbf{N}_{1,z}''^T;$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{N}_{2,z}'' \mathbf{N}_{2,z}''^T;$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{N}_{3,z}' \mathbf{N}_{3,z}'^T;$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T;$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T;$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_3^T.$$

Macierze sztywności  $\mathbf{K}$  oraz bezwładności  $\mathbf{B}$  układu otrzymano dokonując agregacji macierzy  $\mathbf{K}_{pe}, \mathbf{K}_{se}, \mathbf{B}_{pe}, \mathbf{B}_{se}$  do bazy współrzędnych uogólnionych całego układu [3].

Model tłumienia przyjęto w klasycznej formie w postaci tłumienia Rayleigha. Jako obciążenie dynamiczne przyjęto pionową siłę harmonicznie zmienną o następujących parametrach: amplituda  $A = 30$  kN, częstotliwość  $f = 2,5$  Hz i faza początkowa  $\varphi = 0$ .

Analizowane zagadnienia opisują relacje:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{q} = 0 \quad \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (7)$$

gdzie:

$\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  – macierz bezwładności, tłumienia i sztywności,

$\mathbf{F}$  – wektor obciążenia dynamicznego,

$\mathbf{q}$  – wektor współrzędnych uogólnionych układu.

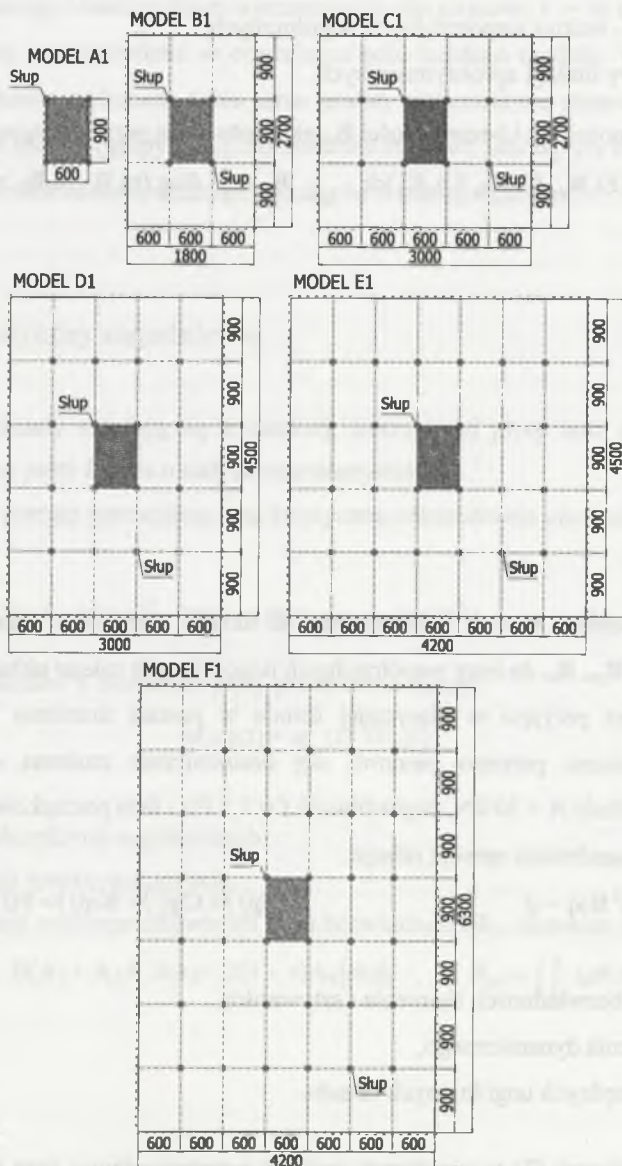
Rozwiązanie równań (7) w niniejszym zadaniu przeprowadzono przy użyciu programu COSMOS/M, który bazuje na MES [1].



### 3. Analizy numeryczne

#### 3.1. Modele analizowanych stropów

Na rys. 1 przedstawiono rozpatrywane modele stropów wielopolowych o praktycznie realnych wymiarach, z wyróżnieniem pola centralnego.



Rys. 1. Schematy rozpatrywanych przypadków stropów żelbetowych  
 Fig. 1. Schemes of considered cases of reinforced concrete ceilings

W każdym stropie wyróżnić można następujące elementy:

- płyta żelbetowa o grubości 0,3 m,
- słupy żelbetowe o wymiarach 0,6×0,6×4,0 m.

Przyjęto modele stropów – płyta zbudowana z elementów dwuwymiarowych (płytych), a słupy jednowymiarowych (belkowych). Przyjęto sztywne połączenie płyty ze słupami, natomiast sama płyta na brzegach jest swobodnie podparta.

### 3.2. Stropy bez podciągów

W wyniku przeprowadzonej analizy modeli od A1 do F1 uzyskano charakterystyki dla dziesięciu początkowych postaci drgań własnych. W tabeli 1 przedstawiono wartości początkowych dziesięciu częstości drgań własnych.

Tabela 1

Dziesięć początkowych częstości drgań własnych modeli obliczeniowych grupy 1

Lp.	Modele obliczeniowe stropu						Różnica względna [%]				
	A1	B1	C1	D1	E1	F1	$\frac{A1}{F1}$	$\frac{B1}{F1}$	$\frac{C1}{F1}$	$\frac{D1}{F1}$	$\frac{E1}{F1}$
	Częstości własne $f$ [Hz]										
1	19,42	8,41	7,58	7,72	7,50	7,55	61,1	10,2	0,4	2,2	0,7
2	37,07	9,00	8,27	7,88	7,67	7,60	79,5	15,6	8,1	3,6	0,9
3	59,23	11,00	9,00	9,10	8,21	8,24	86,1	25,1	8,4	9,5	0,4
4	66,18	12,50	9,52	9,12	8,34	8,28	87,5	33,8	13,0	9,2	0,7
5	75,90	12,54	10,62	9,23	8,93	8,40	88,9	33,0	20,9	9,0	5,9
6	103,34	12,99	11,31	10,19	9,40	9,01	91,3	30,6	20,3	11,6	4,1
7	106,11	15,32	11,47	10,34	9,47	9,21	91,3	39,9	19,7	10,9	2,7
8	123,68	17,09	11,67	11,12	9,50	9,43	92,4	44,8	19,2	15,2	0,7
9	138,38	19,42	12,55	11,33	10,22	9,46	93,2	51,3	24,6	16,5	7,4
10	140,70	22,01	13,15	11,54	10,42	9,72	93,1	55,8	26,1	15,8	6,7

Analizując wyniki pierwszej częstości drgań własnych (tabela 1) możemy zauważyć, że sensowne jest ograniczenie stropu 49-polowego (model F1) nawet do 15-polowego (model C1). To samo porównanie, ale odniesione do drugiej częstości własnej, pozwala na ograniczenie obszaru stropu 49-polowego do 25-polowego (model D1). W celu uzyskania pozostałych początkowych częstości drgań własnych możliwe jest ograniczenie stropu 49-polowego do stropu 35-polowego (model E1). Generalnie ze wzrostem liczby pól w stropie maleją różnice pomiędzy poszczególnymi częstościami własnymi. Oznacza to, że im strop porównawczy będzie miał więcej pól, tym większe będą możliwości ograniczania jego obszaru.

Taką samą analizę wykonano w przypadku stropu o innym wymiarze pola płyty. Przyjęto wymiar pola 6,0×6,0 m. Wyniki podano w tabeli 2. Widoczna jest tu większa możliwość

ograniczania obszaru stropu wielopolowego dla otrzymania początkowych częstości drgań własnych. Pierwsza i druga częstość drgań własnych stropu 15-polowego jest reprezentatywna dla pozostałych większych stropów. W celu otrzymania pozostałych początkowych częstości własnych sensowne jest ograniczenie stropu 49-polowego do stropu 25-polowego.

W następnym kroku przeprowadzono obliczenia z uwzględnieniem obciążenia dynamicznego, które stanowi pionowa siła harmonicznie zmienna o amplitudzie  $F = 30$  kN i częstotliwości  $f = 2,5$  Hz, umiejscowiona w punkcie centralnym środkowego pola każdego modelu (tabela 3).

Tabela 2

Dziesięć początkowych częstości drgań własnych modeli obliczeniowych grupy 2

Lp.	Modele obliczeniowe stropu						Różnica względna [%]				
	A2	B2	C2	D2	E2	F2	$\frac{A2}{F2}$	$\frac{B2}{F2}$	$\frac{C2}{F2}$	$\frac{D2}{F2}$	$\frac{E2}{F2}$
	Częstości własne $f$ [Hz]										
1	26,79	16,45	15,75	15,93	15,74	15,78	41,1	4,1	0,2	0,9	0,3
2	66,18	16,67	16,37	15,96	15,86	15,79	76,1	5,3	3,5	1,1	0,4
3	66,18	16,83	16,67	16,04	15,98	15,81	76,1	6,1	5,2	1,4	1,1
4	103,33	16,83	16,67	16,04	16,00	15,81	84,7	6,1	5,2	1,4	1,2
5	129,76	18,31	17,14	17,03	16,39	16,38	87,4	10,5	4,4	3,8	0,1
6	129,78	18,77	17,19	17,14	16,44	16,41	87,4	12,6	4,5	4,3	0,2
7	162,65	20,71	17,78	17,14	17,08	16,41	89,9	20,8	7,7	4,3	3,9
8	162,65	20,71	18,32	17,30	17,10	16,45	89,9	20,6	10,2	4,9	3,8
9	211,51	26,77	18,46	17,43	17,15	16,92	92,0	36,8	8,3	2,9	1,3
10	211,51	30,66	18,46	17,45	17,33	16,92	92,0	44,8	8,3	3,0	2,4

Tabela 3

Wartości przemieszczeń dynamicznych modeli grupy 1

Przemieszczenia dynamiczne	Modele obliczeniowe stropu					
	A1	B1	C1	D1	E1	F1
$U_F$ [mm]	0,224	0,083	0,062	0,022	0,016	0,006
$U_{max}$ [mm]	0,224	0,111	0,083	0,044	0,034	0,020
$U_F$ – amplituda pionowego przemieszczenia dynamicznego występującego w punkcie centralnym środkowego pola każdego modelu,						
$U_{max}$ – największa amplituda pionowego przemieszczenia dynamicznego występującego w innym obszarze stropu, które towarzyszy $U_F$ .						

W tabeli 3 podano amplitudę pionowego przemieszczenia węzła, do którego przyłożono siłę pionową  $F = 30$  kN. Dodatkowo przedstawiono największe pionowe przemieszczenie dynamiczne stropu, towarzyszące danej amplitudzie pionowej pod siłą harmoniczną, które występuje w tej samej chwili w innym obszarze płyty stropowej.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że ze zwiększeniem liczby pól w stropie wartość przemieszczenia dynamicznego maleje. W modelu 15-polowym (model C1) jest ono prawie



cztery razy mniejsze niż w modelu 1-polowym (model A1), natomiast w stropie 49-polowym (model F1), aż czterdzieści razy mniejsze.

W celu potwierdzenia wyników z przeprowadzonej analizy wykonano podobne obliczenia stropu o innym wymiarze pola płyty (tabela 4). Przyjęto wymiar pola 6,0×6,0 m.

Tabela 4  
Wartości przemieszczeń dynamicznych modeli grupy 2

Przemieszczenia dynamiczne	Modele obliczeniowe stropu					
	A2	B2	C2	D2	E2	F2
$U_F$ [mm]	0,163	0,035	0,018	0,008	0,003	0,002
$U_{max}$ [mm]	0,163	0,035	0,028	0,013	0,010	0,004

$U_F, U_{max}$  – oznaczenia jak w tabeli 3.

Można zauważyć, że największe wartości pionowych przemieszczeń dynamicznych otrzymano również dla modeli obliczeniowych o najmniejszej liczbie pól stropu.

### 3.3. Stropy z podciągami

Rozpatrzono modele B1, D1 oraz F1 stropu, w których dodatkowo umieszczono między słupami podciągi o różnej wysokości. Przyjęto:

- model P1 – model B1 z podciągami o wysokości  $h = 0,3$  m,
- model P2 – model B1 z podciągami o wysokości  $h = 0,6$  m,
- model P3 – model B1 z podciągami o wysokości  $h = 0,9$  m,
- model P4 – model D1 z podciągami o wysokości  $h = 0,9$  m,
- model P5 – model F1 z podciągami o wysokości  $h = 0,9$  m.

Po przeprowadzeniu obliczeń uzyskano jak poprzednio 10 początkowych częstości drgań własnych oraz wartości pionowych przemieszczeń dynamicznych od wymuszenia harmonicznego w każdym z modeli obliczeniowych (tabela 5 i 6).

Tabela 5  
Dziesięć początkowych częstości drgań własnych modeli obliczeniowych z podciągami

Lp.	Modele obliczeniowe stropu					Różnica względna [%]				
	P1	P2	P3	P4	P5	$\frac{P3}{P1}$	$\frac{P4}{P1}$	$\frac{P5}{P1}$	$\frac{P3}{P4}$	$\frac{P4}{P5}$
	Częstości własne $f$ [Hz]					$\frac{P3}{B1}$	$\frac{P4}{D1}$	$\frac{P5}{F1}$	$\frac{P3}{P5}$	$\frac{P4}{P5}$
1	9,44	12,66	16,84	14,70	14,45	50,1	47,5	47,8	14,2	1,7
2	10,12	13,99	18,44	15,36	14,78	51,2	48,7	48,6	19,8	3,8
3	13,06	15,79	19,10	15,87	15,10	42,4	42,7	45,4	20,9	4,9
4	13,17	16,54	19,91	16,39	15,34	37,2	44,4	46,0	23,0	6,4
5	13,42	17,94	21,98	17,59	16,11	42,9	47,5	47,9	26,7	8,4
6	14,84	18,98	22,17	17,79	16,19	41,4	42,7	44,3	27,0	9,0
7	16,83	20,34	22,79	18,06	16,33	32,8	42,7	43,6	28,3	9,6
8	18,47	21,20	22,81	18,33	16,61	25,1	39,3	43,2	27,2	9,4
9	20,60	22,53	24,36	19,76	17,56	20,3	42,7	46,1	27,9	11,1
10	23,98	29,68	32,31	19,79	17,66	31,9	41,7	45,0	45,3	10,8

Tabela 6

Wartości przemieszczeń dynamicznych  
modeli obliczeniowych z podciągami

Przem. dyn.	Modele obliczeniowe stropu							
	B1	D1	F1	P1	P2	P3	P4	P5
$U_F$ [mm]	0,083	0,022	0,006	0,053	0,035	0,020	0,007	0,005
$U_{max}$ [mm]	0,111	0,044	0,020	0,077	0,043	0,024	0,015	0,014
$U_F, U_{max}$ – oznaczenia jak w tabeli 3.								

#### 4. Wnioski końcowe

Z analizy zagadnienia drgań własnych wynika możliwość uznania stropu o mniejszej liczbie pól (model D1) jako schematu reprezentatywnego do określenia pierwszej i drugiej częstości drgań własnych. Model E1 można uznać za reprezentatywny do otrzymania pozostałych początkowych częstości drgań własnych. Analiza zagadnienia drgań wymuszonych wykazała, że stosowanie modelu uproszczonego (ograniczenie liczby pól) nie jest możliwe. Zastosowanie podciągów w powyższych układach modeli stropów zgodnie z oczekiwaniami prowadzi do zwiększenia ich częstości drgań własnych oraz zmniejszenia przemieszczenia dynamicznego płyty. W przypadku stropu 9-polowego (model B1) przemieszczenie zmniejsza się o 76%, natomiast dla stropu 49-polowego (model F1) o 17%.

Podane tu wnioski odnoszą się wyłącznie do stropów o przyjętych cechach geometrycznych i materiałowych, aczkolwiek są to przykłady najczęściej spotykane w praktyce. W celu uogólnienia wniosków dotyczących zagadnień dynamicznych i zastosowań praktycznych w zakresie obliczeń stropów wielopolowych planowane są dalsze badania.

#### LITERATURA

1. Gawroński W., Kruszewski J. i inni: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady, Warszawa 1984.
2. Mironowicz W.: Problemy losowych drgań płytowych konstrukcji wsporczych pod maszyny. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1998.
3. Konderla P., Kasprzak T.: Metody komputerowe w teorii sprężystości. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1997.