

Marta SITEK\*  
Politechnika Warszawska

## WARUNEK INF-SUP DLA ELEMENTÓW BELKI TIMOSHENKI

**Streszczenie.** W pracy rozpatrzono trzy warunki, które powinien spełnić element skończony: eliptyczność, zgodność oraz warunek inf-sup. Dla wymienionych kryteriów pokazano przejście od postaci analitycznej do numerycznej, wykorzystywanej w praktyce inżynierskiej. Uwagę skupiono na warunku inf-sup, którego zrealizowanie zapewnia optymalność i niezawodność sformułowania. Przeanalizowano również numeryczną wersję tego kryterium na przykładzie elementów belkowych o średniej grubości, w których często występuje tzw. *locking*. Analizie poddano elementy zbudowane za pomocą sformułowania przemieszczeniowego oraz przemieszczeniowo-naprężeniowego opartego na funkcjonale Reissnera-Hellingera.

## THE INF-SUP CONDITION FOR TIMOSHENKO BEAM ELEMENTS

**Summary.** The main objective of finite element methodology is to build reliable finite elements. A finite element discretization will give proper results if three conditions are met: ellipticity, consistency and the inf-sup condition. An evolution from analytical to numerical forms of these criteria is shown. The paper focuses on the inf-sup condition, because it assures optimality and reliability of the formulation. A numerical version of the condition was considered. The chosen example is a thick beam element based on displacement and stress/displacement formulation.

### 1. Wstęp

Większość elementów skończonych daje poprawne wyniki, jednak istnieją i takie, które dają błędne rozwiązania, na przykład elementy, w których występuje tzw. *locking*, czyli m.in. cienkie belki (a także płyty i powłoki). *Locking* oznacza, że rozwiązanie skończenie elementowe szybko zanika do zera, w miarę gdy stosunek wysokości przekroju poprzecznego belki do jej długości  $h/L$  maleje. Aby tego uniknąć, dyskretyzacja skończenie elementowa powinna spełniać następujące warunki: eliptyczności, zgodności oraz warunek inf-sup (znany

---

\*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Wojciech Gilewski.

również jako warunek Brezzi'ego lub warunek LBB [1]). Eliptyczność formy biliniowej opisującej problem gwarantuje istnienie rozwiązania i jego jednoznaczność. Kryterium zgodności zapewnia, że forma biliniowa zadania MES dąży do postaci ściślej przy wymiarze charakterystycznym elementu dążącym do zera. W pracy skupiono uwagę na warunku inf-sup, jako najtrudniejszym do sprawdzenia. Spełnienie tego kryterium zapewnia stabilność i optymalność sformułowania Metody Elementów Skończonych [1, 2, 4, 5]. W wielu przypadkach jest on trudny, a nawet niemożliwy do zweryfikowania analitycznie i dlatego opracowano testy numeryczne [5]. Podstawy teoretyczne zostały dokładnie opisane w literaturze [1, 2, 5].

Celem niniejszej pracy jest uporządkowanie wiadomości dotyczących kryterium inf-sup. Pokazano przejście od postaci analitycznej do numerycznej tego warunku dla dwóch modeli MES. Rozpatrzono również klasyczny model przemieszczeniowy oraz sformułowanie mieszane naprężeniowo-przemieszczeniowe oparte na funkcjonale Reissnera-Hellingera. Oszacowanie zbieżności rozwiązania przeanalizowano na przykładzie kilku znanych elementów belki Timoshenki.

## 2. Analityczny i numeryczny warunek inf-sup

### 2.1. Model przemieszczeniowy

W modelu przemieszczeniowym MES rozpatrujemy stacjonarność funkcjonału energii potencjalnej [1, 8]:

$$J_U(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \mathbf{P} \right) d\Omega. \quad (1)$$

gdzie:

$\mathbf{u}$  – wektor przemieszczeń,

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  – wektor zawierający odkształcenia wyrażone przez przemieszczenia,

$\mathbf{E}$  – macierz sprężystości,

$\mathbf{P}$  – wektor obciążeń,

$\Omega$  – obszar całkowania.

Zadanie minimalizacji funkcjonału (1) ma rozwiązanie wtedy, gdy forma biliniowa  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  jest eliptyczna, tzn.  $\exists \gamma > 0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \geq \gamma \|\mathbf{u}\|^2$ , gdzie  $\|\mathbf{u}\|$  jest normą wektora przemieszczeń [1, 8].

Warunek inf-sup dla modelu przemieszczeniowego wyraża się zależnością:

$$\exists \beta > 0 : \inf \sup \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} \geq \beta \quad (2)$$

Jeśli przyjmiemy aproksymację pola przemieszczeń w postaci  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}^u(x) \cdot \mathbf{q}$ , to funkcjonał (1) możemy zapisać jako:

$$J_U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_u \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (3)$$

gdzie:

$\mathbf{q}$  – wektor przemieszczeń węzłowych,

$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^u)^T \mathbf{P} d\Omega$  – wektor obciążeń węzłowych,

$\mathbf{K}_u = \int_{\Omega} (\mathbf{D} \mathbf{N}^u)^T \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{N}^u) d\Omega$  – macierz sztywności,

$\mathbf{D}$  – macierz operatorów różniczkowych.

Warunek stacjonarności funkcjonału jest równaniem równowagi wewnętrznej i wyraża się równaniem macierzowym:  $\mathbf{K}_u \mathbf{q} = \mathbf{Q}$ . Ma ono rozwiązanie wtedy, gdy przy odebranych ruchu sztywnym macierz  $\mathbf{K}_u$  jest dodatnio określona:  $\mathbf{q}^T \mathbf{K}_u \mathbf{q} > 0$ . Jest to warunek równoważny eliptyczności formy z funkcjonału (1). Ponieważ macierz sztywności konstrukcji jest sumą macierzy elementowych:  $\mathbf{K}_u = \sum \mathbf{K}_u^e$ , można analizować macierz sztywności odseparowanego elementu. O ile macierz sztywności konstrukcji musi być dodatnio określona, to wystarczy, że macierz elementowa będzie nieujemnie określona. Wykorzystuje się przy tym twierdzenie Rayleigha [7], które sprowadza poszukiwanie parametru  $\gamma$  do rozwiązania zagadnienia własnego:  $(\mathbf{K}_u^e - \lambda_u^e \mathbf{I}) \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Macierz sztywności elementu powinna mieć tyle zerowych wartości własnych, ile zakłada rozważana teoria (w tym przypadku teoria

belek). Pozostałe wartości powinny być dodatnie. Jeśli analityczny warunek (2) wyrazimy za pomocą macierzy MES, to dostaniemy zależność:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi} \quad (4)$$

gdzie  $\beta = \sqrt{\lambda_{\min}}$ . Sposób poszukiwania parametru  $\beta$  podano w następnym podrozdziale.

## 2.2. Model mieszany przemieszczeniowo-naprężeniowy

W pracy przeanalizowano model mieszany przemieszczeniowo-naprężeniowy  $\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}$  oparty na funkcjonale Reissnera-Hellingera [3, 6, 8]:

$$J_{RH}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{P} \right) d\Omega \quad (5)$$

Warunkami stacjonarności funkcjonau są związki geometryczne zapisane w naprężeniach  $\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{u}$  oraz równania równowagi wewnętrznej  $\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}$ . Aby zapewnić istnienie rozwiązania pierwszego układu równań, należy spełnić warunek eliptyczności formy  $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ :  $\exists \alpha > 0$  takie, że  $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|^2$ . Jeśli teraz ze związków fizycznych wyznaczmy naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  i podstawimy do równań równowagi, to dostaniemy  $\mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} = \mathbf{P}$ . Ten układ równań ma rozwiązanie, jeśli  $\exists \hat{\beta} > 0$  takie, że  $\mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} \geq \hat{\beta} \|\mathbf{u}\|^2$ . Można udowodnić, że ta zależność jest równoważna warunkowi inf-sup [3]:

$$\inf_{\mathbf{u} \neq 0} \sup_{\boldsymbol{\sigma} \neq 0} \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\| \|\mathbf{u}\|} \geq \hat{\beta} > 0 \quad (6)$$

Przyjmijmy teraz aproksymację pola przemieszczeń w postaci  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}^u(x) \cdot \mathbf{q}$ , natomiast pola naprężeń w postaci  $\boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{N}^\sigma(x) \cdot \mathbf{b}$ . Funkcjonał (5) wygląda wówczas następująco:

$$J_{RH}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\sigma u} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (7)$$

gdzie:

$\mathbf{b}$  – wektor naprężeń węzłowych,

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^\sigma)^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}^\sigma d\Omega,$$

$$\mathbf{K}_{\sigma u} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^\sigma)^T \mathbf{D} \mathbf{N}^\sigma d\Omega.$$

Poszukiwanie minimum funkcjonału (7) prowadzi do układu równań macierzowych:

$$\mathbf{K}_\sigma \mathbf{b} + \mathbf{K}_{\sigma u} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}_{\sigma u}^T \mathbf{b} = \mathbf{Q}.$$

Pierwsze równanie posiada rozwiązanie wtedy, gdy macierz  $\mathbf{K}_\sigma$  jest dodatnio określona:  $\mathbf{b}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{b} > 0$ , czyli wartości własne wyznaczone z  $(\mathbf{K}_\sigma - \lambda_\sigma \mathbf{I}) \mathbf{b} = \mathbf{0}$  muszą być dodatnie. Podstawienie związków fizycznych do równań równowagi prowadzi do zależności:  $\hat{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \mathbf{K}_{\sigma u}^T \mathbf{K}_\sigma^{-1} \mathbf{K}_{\sigma u} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$ .

Znalezienie rozwiązania formy analitycznej warunku inf-sup jest trudne, a w niektórych przypadkach niemożliwe. Z tego powodu zaproponowano testy numeryczne, dzięki którym można stwierdzić, czy dyskretyzacja spełnia warunek inf-sup. Rozpatrywaną konstrukcję należy podzielić na ciąg siatek skończenie elementowych o zmniejszającym się wymiarze charakterystycznym elementu. Z twierdzenia Rayleigha wynika, że ustalenie parametru  $\hat{\beta}$  dla modelu mieszanego sprowadza się do znalezienia dla każdego podziału minimalnej dodatniej wartości własnej zagadnienia uogólnionego:

$$\hat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varphi} = \hat{\lambda} \mathbf{S} \boldsymbol{\varphi} \quad (8)$$

przy czym  $\hat{\beta} = \sqrt{\hat{\lambda}_{\min}}$ . Jeśli wartość  $\hat{\lambda}_{\min}$  ustala się na dodatnim poziomie, to warunek uznaje się za spełniony. Gdyby wartość  $\hat{\lambda}_{\min} \rightarrow 0$  znaczyłyoby to, że występują stany pasożytniczych odkształceń i warunek nie byłby spełniony. Te same warunki muszą spełnić minimalne wartości własne zagadnienia (4).

Macierz normowa  $\mathbf{S}$  zależy od przyjętej normy wektora przemieszczeń. W pracy korzystano z normy  $L^2$ :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} \left[ \mathbf{u}_i^2 + \left( \frac{d\mathbf{u}_i}{dx} \right)^2 \right] d\Omega = \mathbf{q}^T \left( \int_{\Omega} (\mathbf{N}^T \mathbf{N} + d\mathbf{N}^T d\mathbf{N}) d\Omega \right) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} \quad (9)$$

### 3. Wyniki numeryczne

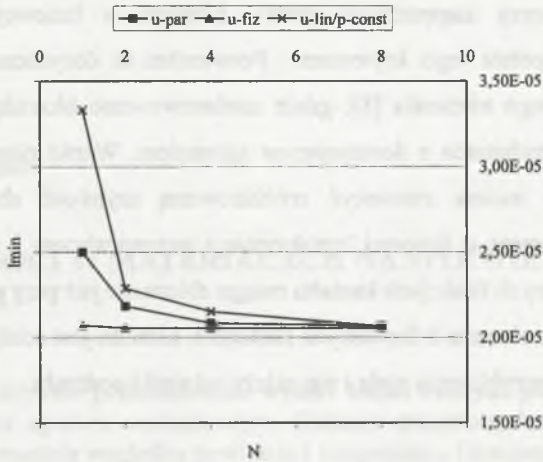
Rozpatrzono cienką belkę wspornikową o stosunku grubości do długości  $t/L = 1/100$ , o kwadratowym przekroju poprzecznym  $A$ . Przyjęto własności materiałowe: porównawczy moduł Younga  $E = 1$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$  oraz współczynnik poprzecznego ścinania  $k = 5/6$ . Analizie poddano kilka typów elementów belki Timoshenki: oparte na modelu przemieszczeniowym o liniowych ( $\mathbf{u}_{lin}$ ), parabolicznych ( $\mathbf{u}_{par}$ ) oraz fizycznych ( $\mathbf{u}_{fiz}$ ) funkcjach kształtu [6], a także na modelu naprężeniowo-przemieszczeniowym o liniowej aproksymacji pola przemieszczeń i stałej aproksymacji naprężeń ( $\mathbf{u}_{lin}-\sigma_{const}$ ). Dla każdego typu elementu przeprowadzono weryfikację numerycznego warunku inf-sup. Wykorzystano siatkę podziału na  $N = 1, 2, 4, 8$  elementów.

Tabela 1

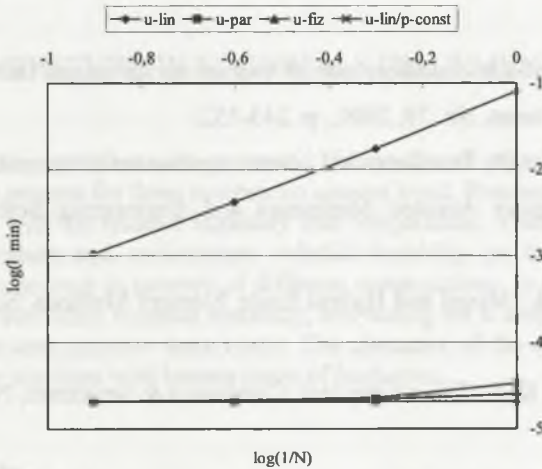
Minimalne wartości własne dla różnych typów elementów

$N$	$\mathbf{u}_{lin}$	$\mathbf{u}_{par}$	$\mathbf{u}_{fiz}$	$\mathbf{u}_{lin}-\sigma_{const}$
1	8,01E-02	2,50E-05	2,07E-05	3,33E-05
2	1,74E-02	2,18E-05	2,06E-05	2,29E-05
4	4,19E-03	2,08E-05	2,06E-05	2,15E-05
8	1,05E-03	2,07E-05	2,06E-05	2,06E-05

W tabeli przedstawiono wyznaczone wartości własne dla wszystkich rodzajów elementów i siatek podziału. Na rys. 1 przedstawiono wykres zbieżności najmniejszych wartości własnych uogólnionego zagadnienia własnego (4 lub 8) dla ww. elementów. Pominięto przy tym wykres dla elementu liniowego ze względu na dużą rozbieżność wyników w porównaniu z pozostałymi elementami. Na rys. 2 pokazano wszystkie wyniki w skali logarytmicznej  $\log(\lambda_{min})/\log(1/N)$ .



Rys. 1. Warunek inf-sup  
Fig. 1. The inf-sup condition



Rys. 2. Warunek inf-sup. Skala logarytmiczna  
Fig. 2. The inf-sup condition. Logarithmic scale

#### 4. Wnioski

W pracy przeanalizowano kilka typowych elementów skończonych pod kątem optymalności sformułowania. W większości przypadków wartość parametru inf-sup zbiega do

dotadniej wartości przy zagęszczaniu siatki. Element o liniowej aproksymacji pola przemieszczeń nie spełnia tego kryterium. Potwierdza to dotychczasowe doświadczenia z wykorzystaniem tego elementu [8], gdzie zaobserwowano blokadę przemieszczeń przy cienkich belkach w zadaniach z dominującym zginaniem. Wśród elementów spełniających warunek Brezzi'ego można zauważyć zróżnicowaną szybkość zbieżności. Najwolniej zbieżność osiąga element o liniowej aproksymacji przemieszczeń i stałych naprężeniach. Element o parabolicznych funkcjach kształtu osiąga zbieżność już przy zastosowaniu czterech elementów. Ponieważ element o fizycznych funkcjach kształtu jest ścisły, wartość inf-sup dla tego elementu jest w przybliżeniu stała i nie zależy od siatki podziału.

## LITERATURA

1. Bathe K. J.: Finite Element Procedures. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey 1996.
2. Bathe K. J.: The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. Computers & Structures, No. 79, 2001, p. 243-252.
3. Berkovic M., Mijuca D., Grozdanovic I.: Some continuous stress mixed formulations and inf-sup test. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, No. 8, 2001, p. 141-153.
4. Brezzi F., Fortin M.: Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, New York 1991.
5. Chapelle D., Bathe K. J.: The inf-sup test. Computers & Structures, No. 47, 1993, p. 537-545.
6. Gilewski W.: O kryteriach oceny elementów skończonych. Od belki Timoshenki do płyty o średniej grubości. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
7. Strang G., Fix G. J.: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey 1973.
8. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.: The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Butterworth-Heinemann, 2000.