ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996

Seria: ELEKTRYKA z. 154 Nr kol. 1327

Władysław MIZIA
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

ANALIZA TEORETYCZNA TRANSFORMATORA WIELOUZWOJENIOWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM SPRZĘŻEŃ UZWOJEŃ POPRZEZ POLE ROZPROSZENIA MAGNETYCZNEGO

Streszczenie. W pracy jest podana analiza teoretyczna transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych o jednakowej wysokości, umieszczonych współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego. Przyjęto, że jedno dowolne uzwojenie jest pierwotne, a więc zasilane, natomiast pozostałe to uzwojenia wtórne, do których są przyłączone odbiory. Analiza teoretyczna uwzględnia wzajemne sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia, zależne od prądów we wszystkich uzwojeniach. Wynikiem analizy jest schemat zastępczy transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń, który stanowi podstawę określania właściwości transformatora przy pracy w stanie nieustalonym i ustalonym. Praca stanowi rozszerzenie teorii transformatorów na transformatory o dowolnej liczbie uzwojeń oraz o ujęcie wpływu sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia.

THEORETICAL ANALYSIS OF A MULTI-WINDING TRANSFORMER TAKING INTO CONSIDERATION LINKAGES BETWEEN WINDINGS BY MAGNETIC LEAKAGE

Summary. The theoretical analysis dealing with a transformer with any number of cylindrical windings of the same height which are concentrically placed around the magnetic core column has been presented in the paper.

It has been assumed that one winding is a primary one and it is supplied. The other windings are secondary ones and they are loaded. The theoretical analysis takes into account mutual linkages between windings by magnetic leakage which depends on currents in all windings. The analysis has resulted in working out of equivalent circuit of a transformer with any number of windings. This circuit is the basis for determining of a transformer characteristics at transient and steady states.

The analysis presented in this paper develops the transformer theory allowing to apply it to transformers with any number of windings when taking into account the influence of winding linkages by magnetic leakage.

1. WSTĘP

Właściwości transformatora jednofazowego zależą od rodzaju blach i rozwiązania rdzenia magnetycznego oraz od rodzaju uzwojeń, ich liczby i rozmieszczenia na rdzeniu magnetycznym. Przedmiotem analizy jest transformator jednofazowy o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych umieszczonych współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego. Zakłada się, że:

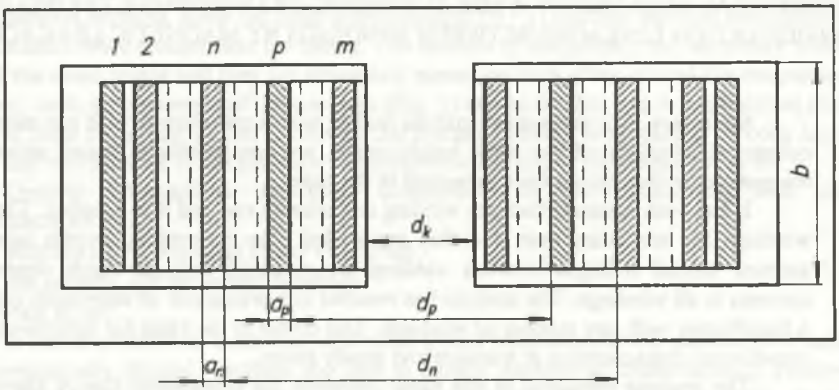
- uzwojenia mają jednakowe wysokości, zbliżone do wysokości kolumny rdzenia magnetycznego,
- jedno z uzwojeń jest pierwotne, a więc zasilane, natomiast pozostałe to uzwojenia wtórne, do których przyłączone są odbiory,
- dowolne spośród uzwojeń umieszczonych na kolumnie rdzenia magnetycznego może być uzwojeniem pierwotnym.

Przyjmując, że liczba uzwojeń wynosi m, na rys. 1 podano przyjętą numerację uzwojeń, podstawowe wymiary n-tego i p-tego uzwojenia oraz wymiary rdzenia magnetycznego, przy czym średnica kolumny

$$d_k = \sqrt{\frac{4S_k}{\pi}} \tag{1}$$

gdzie:

S_k - powierzchnia przekroju poprzecznego kolumny rdzenia magnetycznego, na której są umieszczone uzwojenia.



Rys. 1. Podstawowe wymiary rdzenia magnetycznego oraz n-tego i p-tego uzwojenia
Fig. 1. Basic dimensions of magnetic core, n-th and p-th winding

Rezystancja dowolnego, np. n-tego uzwojenia cylindrycznego

$$R_n = k_n \frac{z_n l_n}{\gamma S_n} \tag{2}$$

przy czym:

k_n - współczynnik powiększenia się rezystancji przy przepływie prądu przemiennego,

$l_n = \pi(d_n + a_n)$ - średnia długość zwoju,

γ, z_n, S_n - konduktywność, liczba zwojów, łączna powierzchnia przekroju poprzecznego gałęzi równoległych uzwojenia.

Z podziału pola magnetycznego wytworzonego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia na pole

- główne, którego linie zamykają się w rdzeniu magnetycznym,
- rozproszenia, którego linie w strefie uzwojenia przechodzą poza rdzeniem magnetycznym,

wynika, że indukcyjność własna n-tego uzwojenia

$$L_n = L_{nFe} + L_{n\sigma}. \tag{3}$$

Składowa indukcyjności własnej, wynikająca z pola głównego

$$L_{nFe} = z_n^2 \Lambda_{Fe} \tag{4}$$

przy czym:

Λ_{Fe} - permeancja rdzenia magnetycznego.

Składowa indukcyjności własnej, wynikająca z pola rozproszenia

$$L_{n\sigma} = z_n^2 \Lambda_{n\sigma}. \tag{5}$$

Permeancję $\Lambda_{n\sigma}$ określa się przyjmując, że rdzeń magnetyczny:

- ma względną przenikalność magnetyczną $\mu = \infty$, tzn. pomijając spadek napięcia magnetycznego wzdłuż części linii pola magnetycznego w rdzeniu magnetycznym,
- pokrywa uzwojenia w częściach czołowych.

Na podstawie analizy szczegółowej podanej w pracy [3] permeancja

$$\Lambda_{n\sigma} = \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_n l_n}{3} - \frac{\pi a_n^2}{6} + \frac{\pi}{4}(d_n^2 - d_k^2)\right] \tag{6}$$

przy czym b, a_n, d_n, d_k podano na rys. 1.

Z podziału pola magnetycznego wytworzonego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia na pole główne i rozproszenia wynika, że indukcyjność wzajemna między n-tym a p-tym uzwojeniem

$$M_{np} = M_{npFe} + M_{np\sigma} \tag{7}$$

przy czym:

- składowa indukcyjności wzajemnej wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole główne

$$M_{npFe} = z_n z_p \Lambda_{Fe}, \tag{8}$$

- składowa indukcyjności wzajemnej wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole rozproszenia

$$M_{np} = z_n z_p \Lambda_{np\sigma}. \tag{9}$$

Permeancję $\Lambda_{np\sigma}$ określa się przyjmując takie same założenia upraszczające jak przy określeniu permeancji $\Lambda_{n\sigma}$. Zgodnie z pracą [3] permeancja $\Lambda_{kn\sigma}$ zależy od wymiarów (d_k, b) rdzenia magnetycznego i wymiarów uzwojenia wewnętrznego. Przy przyjętej (rys. 1) numeracji uzwojeń:

- dla $n < p$ permeancja

$$\Lambda_{np\sigma} = \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_p l_p}{2} - \frac{\pi a_p^2}{6} + \frac{\pi}{4}(d_p^2 - d_k^2)\right], \tag{10a}$$

- dla $n > p$ permeancja

$$\Lambda_{np\sigma} = \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_n l_n}{2} - \frac{\pi a_n^2}{6} + \frac{\pi}{4}(d_n^2 - d_k^2)\right], \tag{10b}$$

przy czym:

a_n, a_p, b, d_n, d_p, d_k - podano na rys. 1,

a_k, d_k, l_k - grubość, średnica wewnętrzna i średnia długość zwoju k-tego uzwojenia.

Składowa indukcyjności wzajemnej, wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole rozproszenia, zależy więc od iloczynu liczby zwojów uzwojeń, wymiarów rdzenia magnetycznego i wymiarów uzwojenia wewnętrznego.

Ze stwierdzenia tego

- dla $n < p$ wynika zależność

$$M_{np\sigma} = M_{(n-c)p\sigma} \frac{z_n}{z_{(n-c)}} \tag{11a}$$

przy czym:

$c = 1, \ldots\ldots n - 1$

- dla $n > p$ wynika zależność

$$M_{np\sigma} = M_{n(p-c)\sigma} \frac{z_p}{z_{(p-c)}} \tag{10b}$$

przy czym:

$c = 1, \ldots\ldots p - 1.$

Zależności (10), (11) określają charakterystyczną cechę dotyczącą indukcyjności wzajemnej uzwojeń cylindrycznych umieszczonych współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego i są wykorzystywane w analizie teoretycznej przy wprowadzaniu schematu zastępczego i określaniu jego parametrów. W analizie teoretycznej przyjmuje się, że transformator jest elementem liniowym.

Indukcyjności wzajemne uzwojeń spełniają zależności

$$M_{np} = M_{pn}, \qquad M_{npFe} = M_{pnFe}, \qquad M_{np\sigma} = M_{pn\sigma}. \tag{12}$$

2. RÓWNANIA OGÓLNE – SCHEMAT ZASTĘPCZY

Jeżeli z sieci elektroenergetycznej jest zasilane jedno z uzwojeń, np. o numerze p, to uzwojenia o numerach $n = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m$ są uzwojeniami wtórnymi. W stanie obciążenia transformatora pole magnetyczne główne, którego linie zamykają się wyłącznie w rdzeniu magnetycznym, jest wytworzone przez siłę magnetomotoryczną

$$i_{p0} z_p = i_p z_p - \sum_{k=1}^{p-1} i_k z_k - \sum_{k=p+1}^{m} i_k z_k . \tag{13}$$

W przybliżeniu jest ona taka sama jak w stanie jałowym, jeżeli napięcie zasilania uzwojenia p (pierwotnego) i jego częstotliwość nie uległy zmianie.

Napięcie zasilania transformatora ma zwykle znamionową częstotliwość, a jego wartość jest zbliżona do napięcia znamionowego uzwojenia pierwotnego. W tych warunkach zasilania można przyjąć, że transformator jest elementem liniowym. Dodatkowo pomija się straty w rdzeniu magnetycznym oraz pojemności międzyzwojowe i międzyuzwojeniowe, ponieważ zagadnienia strat i przepięć nie są przedmiotem analizy teoretycznej.

Napięcie zasilania uzwojenia pierwotnego

$$u_p = R_p i_p + \frac{d\Psi_p}{dt}, \tag{14}$$

natomiast siła elektromotoryczna indukowana w dowolnym k-tym uzwojeniu wtórnym

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = R_k i_k + u_k . \tag{15}$$

Strumień sprzężony z uzwojeniem pierwotnym

$$\Psi_p = (L_{pFe} + L_{p\sigma}) i_p - \sum_{n=p+1}^{m} (M_{npFe} + M_{np\sigma}) i_n - \sum_{n=1}^{p-1} (M_{npFe} + M_{np\sigma}) i_n . \tag{16}$$

Strumień sprzężony z k-tym uzwojeniem wtórnym

$$\begin{aligned} \Psi_k = {} & (M_{pkFe} + M_{pk\sigma}) i_p - (L_{kFe} + L_{k\sigma}) i_k - \sum_{n=1}^{k-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma}) i_n \\ & - \sum_{n=k+1}^{p-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma}) i_n - \sum_{n=p+1}^{m} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma}) i_n \end{aligned} \tag{17a}$$

jeżeli $k < p$, a więc gdy uzwojenie k-tej strony wtórnej jest uzwojeniem zewnętrznym, a uzwojenie pierwotne wewnętrznym, lub

$$\begin{aligned} \Psi_k = {} & (M_{pkFe} + M_{pk\sigma}) i_p - (L_{kFe} + L_{k\sigma}) i_k - \sum_{n=1}^{p-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma}) i_n \\ & - \sum_{n=p+1}^{k-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma}) i_n - \sum_{n=k+1}^{m} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma}) i_n . \end{aligned} \tag{17b}$$

Z równania (13) wynika, że prąd

– w uzwojeniu pierwotnym

$$i_p = i_{p0} + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_n}{z_p} i_n + \sum_{n=p+1}^{m} \frac{z_n}{z_p} i_n = i_{p0} + \sum_{n=1}^{p-1} i'_n + \sum_{n=p+1}^{m} i'_n \tag{18}$$

przy czym

$$i'_n = \frac{z_n}{z_p} i_n , \tag{19}$$

– w k-tym uzwojeniu wtórnym zewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$i_k = \frac{z_p}{z_k}(i_p - i_{p0}) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=p+1}^{m} \frac{z_n}{z_k} i_n , \tag{20a}$$

– w k-tym uzwojeniu wtórnym wewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$i_k = \frac{z_p}{z_k}(i_p - i_{p0}) - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=k+1}^{m} \frac{z_n}{z_k} i_n . \tag{20b}$$

Po wprowadzeniu wyrażenia (18) do zależności (16) i uwzględnieniu zależności (4) i (8) strumień sprzężony z uzwojeniem pierwotnym

$$\Psi_p = L_{pFe}\, i_{p0} + L_{p\sigma}\, i_p - \sum_{n=1}^{p-1} M_{np\sigma}\, i_n - \sum_{n=p+1}^{m} M_{np\sigma}\, i_n . \tag{21}$$

Z wyrażeń (17a), (20a) po uwzględnieniu zależności (4) i (8) wynika, że strumień sprzężony z k-tym uzwojeniem wtórnym zewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$\Psi_k = M_{pkFe}\, i_{p0} + M_{pk\sigma}\, i_p - L_{k\sigma}\, i_k - \sum_{n=1}^{k-1} M_{nk\sigma}\, i_n - \sum_{n=k+1}^{p-1} M_{nk\sigma}\, i_n - \sum_{n=p+1}^{m} M_{nk\sigma}\, i_n . \tag{22a}$$

Z wyrażeń (17b), (20b) po uwzględnieniu zależności (4) i (8) wynika, że strumień sprzężony z k-tym uzwojeniem wtórnym wewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$\Psi_k = M_{pkFe}\, i_{p0} + M_{pk\sigma}\, i_p - L_{k\sigma}\, i_k - \sum_{n=1}^{p-1} M_{nk\sigma}\, i_n - \sum_{n=p+1}^{k-1} M_{nk\sigma}\, i_n - \sum_{n=k+1}^{m} M_{nk\sigma}\, i_n . \tag{22b}$$

Wprowadzając zależności (21), (22a), lub (21), (22b) do wyrażeń (14), (15) otrzymuje się:

– dla strony pierwotnej

$$u_p = R_p i_p + L_{pFe}\frac{di_{p0}}{dt} + L_{p\sigma}\frac{di_p}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} M_{np\sigma}\frac{di_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{m} M_{np\sigma}\frac{di_n}{dt}, \tag{23}$$

– dla k-tej strony wtórnej, której uzwojenie jest zewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$\begin{aligned} u_k = {} & M_{pkFe}\frac{di_{p0}}{dt} + M_{pk\sigma}\frac{di_p}{dt} + L_{k\sigma}\frac{di_k}{dt} - R_k i_k \\ & - \sum_{n=1}^{k-1} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{p-1} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{m} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt}, \end{aligned} \tag{24a}$$

– dla k-tej strony wtórnej, której uzwojenie jest wewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$\begin{aligned} u_k = {} & M_{pkFe}\frac{di_{p0}}{dt} + M_{pk\sigma}\frac{di_p}{dt} + L_{k\sigma}\frac{di_k}{dt} - R_k i_k \\ & - \sum_{n=1}^{p-1} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{k-1} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{m} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt}. \end{aligned} \tag{24b}$$

Jeżeli równanie (24a) lub (24b) pomnożymy przez z_p/z_k, co oznacza sprowadzenie k-tej strony wtórnej do strony pierwotnej, wówczas po uwzględnieniu zależności (4), (8) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} u'_k = {} & L_{pFe}\frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k}M_{pk\sigma}\frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma}\frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k \\ & - \frac{z_p}{z_k}\sum_{n=1}^{k-1} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k}\sum_{n=k+1}^{p-1} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k}\sum_{n=p+1}^{m} M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt}, \end{aligned} \tag{25a}$$

lub

$$u'_k = L_{pFe}\frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k}M_{pk\sigma}\frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma}\frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k$$

$$-\frac{z_p}{z_k}\sum_{n=1}^{p-1}M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k}\sum_{n=p+1}^{k-1}M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k}\sum_{n=k+1}^{m}M_{nk\sigma}\frac{di_n}{dt}, \tag{25b}$$

przy czym

$$u'_k = \frac{z_p}{z_k}u_k, \qquad i'_k = \frac{z_k}{z_p}i_k,$$

$$R'_k = \left(\frac{z_p}{z_k}\right)^2 R_k, \qquad L'_k = \left(\frac{z_p}{z_k}\right)^2 L_k.$$

Z wyrażeń (19), (23) wynika, że napięcie zasilania strony pierwotnej

$$u_p = R_p i_p + L_{pFe}\frac{di_{p0}}{dt} + L_{p\sigma}\frac{di_p}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1}\frac{z_p}{z_n}M_{np\sigma}\frac{di'_n}{dt}$$

$$-\sum_{n=p+1}^{m-1}\frac{z_p}{z_n}M_{np\sigma}\frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p}{z_m}M_{mp\sigma}\frac{di'_m}{dt}, \tag{26}$$

natomiast na podstawie równania (18) sprowadzony na stronę pierwotną prąd m-tej strony wtórnej

$$i'_m = i_p - i_{p0} - \sum_{n=1}^{p-1}i'_n - \sum_{n=p+1}^{m-1}i'_n. \tag{27}$$

Wprowadzając zależność (27) do wyrażenia (26) otrzymuje się:

$$u_p = R_p i_p + \left(L_{p\sigma} - \frac{z_p}{z_m}M_{mp\sigma}\right)\frac{di_p}{dt} + e_p + \left(L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m}M_{mp\sigma}\right)\frac{di_{p0}}{dt}, \tag{28}$$

przy czym:

$$e_p = \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_p}{z_n} M_{np\sigma} \frac{di'_n}{dt}$$
$$+ \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{z_p}{z_m} M_{nk\sigma} \frac{di'_n}{dt}. \tag{29}$$

Równanie (28) uwzględnia wpływ sprzężeń uzwojenia pierwotnego z uzwojeniami wtórnymi poprzez pole magnetyczne rozproszenia. Wpływ ten określa siła elektromotoryczna e_p.

Z wyrażeń (19), (25a) wynika, że dla k-tej sprowadzonej strony wtórnej, której uzwojenie znajduje się na zewnątrz uzwojenia pierwotnego

$$u'_{kz} = L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt}$$
$$- \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk}}{z_m} \cdot \frac{di'_m}{dt}. \tag{30}$$

Na podstawie równania (18) sprowadzony na stronę pierwotną prąd m-tej strony wtórnej

$$i'_m = i_p - i_{p0} - \sum_{n=1}^{k-1} i'_n - i'_k - \sum_{n=k+1}^{p-1} i'_n - \sum_{n=p+1}^{m-1} i'_n. \tag{31}$$

Wprowadzając zależność (31) do wyrażenia (30) otrzymuje się

$$u'_{kz} = \left(L_{pFe} + \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_{p0}}{dt} - \left(L'_{k\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k$$
$$+ \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) \tag{32}$$
$$+ \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right).$$

W przypadku k-tej strony wtórnej, której uzwojenie jest zewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego ($k < p < m$), zgodnie z ogólną zależnością (11a)

$$\frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} = \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mp\sigma}}{z_m} \cdot \frac{z_k}{z_p} = \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}. \tag{33}$$

Wprowadzając zależności (33) do wyrażenia (32) otrzymuje się

$$u'_{kz} = (L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di_{p0}}{dt} + e_{kz} - (L'_{k\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k, \tag{34}$$

przy czym

$$\begin{aligned} e_{kz} = {} & (\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} + \\ & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_n^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \\ & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_n^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt}. \end{aligned} \tag{35}$$

Równanie (34) uwzględnia wpływ sprzężeń rozpatrywanego uzwojenia wtórnego z pozostałymi uzwojeniami poprzez pole magnetyczne rozproszenia. Z wyrażeń (19), (25b) wynika, że dla k-tej sprowadzonej strony wtórnej, której uzwojenie znajduje się wewnątrz uzwojenia pierwotnego

$$\begin{aligned} u'_{kw} = {} & L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \\ & - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \cdot \frac{di'_m}{dt}. \end{aligned} \tag{36}$$

Na podstawie równania (18) sprowadzony na stronę pierwotną prąd m-tej strony wtórnej

$$i'_m = i_p - i_{p0} - \sum_{n=1}^{p-1} i'_n - \sum_{n=p+1}^{k-1} i'_n - i'_k - \sum_{n=k+1}^{m-1} i'_n \tag{37}$$

i po wprowadzeniu zależności (37) do wyrażenia (36) otrzymuje się

$$\begin{aligned} u'_{kw} = & \left(L_{pFe} + \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_{p0}}{dt} - \left(L'_{k\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k \\ & + \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) \\ & + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right). \end{aligned} \tag{38}$$

W przypadku k-tej strony wtórnej, której uzwojenie jest wewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego ($p < k < m$), a zatem spełniona jest zależność (33) i po jej uwzględnieniu

$$u'_{kw} = (L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di_{p0}}{dt} + e_{kw} - (L'_k - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k, \tag{39}$$

przy czym

$$e_{kw} = \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}\right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} +$$

$$+ \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt}$$

$$+ \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \tag{40}$$

$$+ \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt}.$$

W analizie literą k oznaczono dowolną spośród stron wtórnych, przy czym wyróżniono zewnętrzne lub wewnętrzne położenie jej uzwojenia w stosunku do uzwojenia pierwotnego. Równaniom (18), (28), (34), (39) odpowiada schemat zastępczy (rys. 2) transformatora jednofazowego m-uzwojeniowego, w którym strony wtórne zostały sprowadzone na stronę pierwotną.

W schemacie zastępczym (rys. 2) siłę elektromotoryczną

- e_p określa wyrażenie (29),
- e_{kz} dla $k = 1, \ldots, p-1$ określa wyrażenie (35),
- e_{kw} dla $k = p+1, \ldots, m$ określa wyrażenie (40),

natomiast indukcyjność

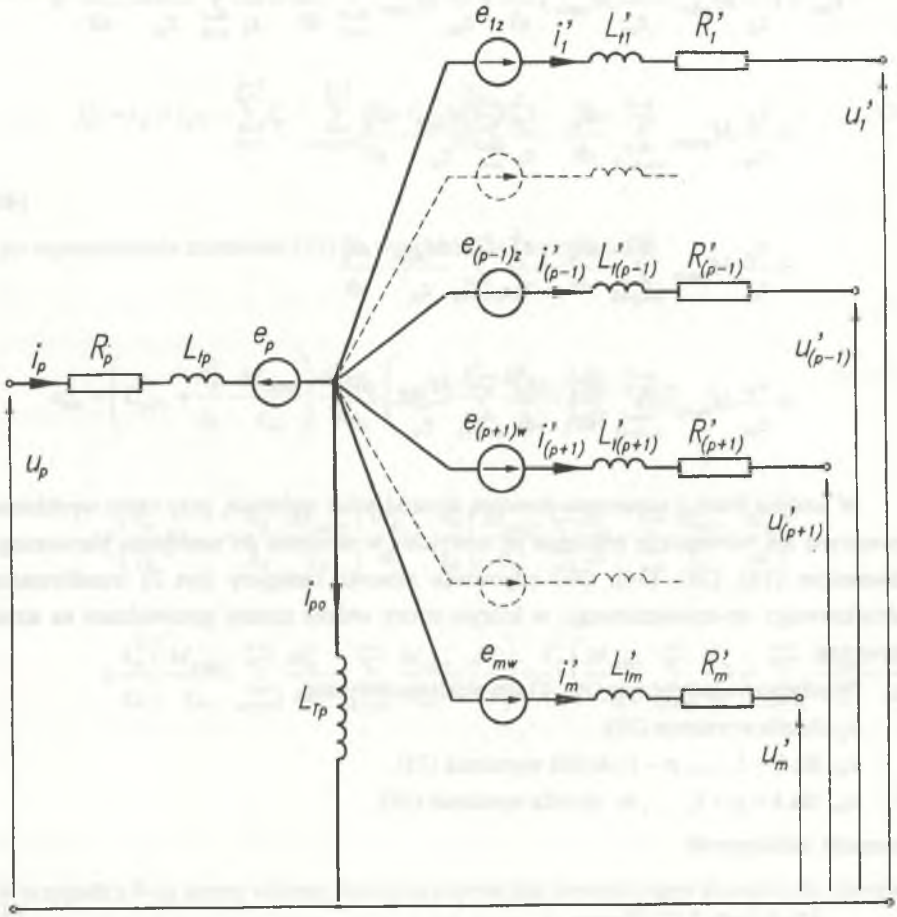
$$L_{Tp} = L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}, \tag{41}$$

$$L_{tp} = L_{p\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}, \tag{42}$$

$$L'_{tk} = L'_{k\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}, \tag{43}$$

dla

$$k = 1, \ldots, p-1, \; p+1, \ldots, m.$$



Rys. 2. Schemat zastępczy transformatora jednofazowego *m*-uzwojeniowego, w którym strony wtórne sprowadzono na stronę pierwotną

Fig. 2. Equivalent circuit of single-phase, *m*-winding transformer whose secondary sides are referred to a primary side

Wprowadzony schemat zastępczy stanowi podstawę analizy właściwości transformatora w stanie nieustalonym i ustalonym. Ilościowa analiza wymaga znajomości parametrów elektromagnetycznych - rezystancji i indukcyjności schematu zastępczego.

4. WNIOSKI

Wprowadzony schemat zastępczy transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych nałożonych na siebie na kolumnie rdzenia magnetycznego uwzględnia wzajemne sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia, zależne od prądów we wszystkich uzwojeniach. Wpływ wzajemnych sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia pogarsza właściwości eksploatacyjne transformatora, w szczególności przy dużej liczbie uzwojeń. Z tych powodów bardzo rzadko stosuje się transformatory jedno- lub trójfazowe o liczbie uzwojeń $m > 3$. Przedstawiona analiza teoretyczna może być podstawą uproszczonych, np. z pominięciem prądu jałowego, analiz szczegółowych, dotyczących schematów zastępczych i ich parametrów dla zwykle stosowanych transformatorów wielouzwojeniowych.

LITERATURA

1. Jabłoński M.: Transformatory. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
2. Jezierski E.: Transformatory - podstawy teoretyczne. WNT, Warszawa 1975.
3. Mizia W.: Wpływ rozmieszczenia uzwojeń cylindrycznych na parametry schematu zastępczego transformatora dwuuzwojeniowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" nr 138, Gliwice 1994, str. 79.
4. Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 marca 1996 r.

Abstract

The theoretical analysis dealing with a transformer with any number of cylindrical windings of the same height which are concentrically placed around the magnetic core column

has been presented in the paper. It has been assumed that one winding is a primary one and it is supplied. The other windings are secondary ones and they are loaded. The theoretical analysis takes into account mutual linkages between windings by magnetic leakage which depends on currents in all windings. The result of such approach is essential because it develops the transformer theory allowing to apply it to transformers with any number of windings when taking into consideration the influence of winding linkages by magnetic leakage. These linkages make operating characteristics of a transformer worse, which above all refers to transformers with a large number of windings. That is why single- or three-phase transformers with m windings, where m is greater than 3, are very seldom used.

The presented theoretical analysis can be the base for simplified (for instance when neglecting no-load current) detailed analyses dealing with equivalent circuits of multi-winding transformers.