ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996

Seria: ELEKTRYKA z. 154 Nr kol. 1327

Dariusz SPAŁEK
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

SZEREGI FOURIERA PRĄDU MAGNESUJĄCEGO W NIELINIOWYCH MAGNETYKACH

Streszczenie. W artykule przedstawiono trzy twierdzenia pozwalające wnioskować o charakterze szeregu Fouriera prądu magnesującego nieliniowy ferromagnetyk. Pierwsze z nich określa znak współczynnika trzeciej harmonicznej. Drugie z twierdzeń określa znaki wszystkich współczynników szeregu Fouriera prądu magnesującego. Przedstawiono również warunek konieczny i wystarczający naprzemiennej zmienności znaków kolejnych współczynników szeregu Fouriera.

FOURIER SERIES OF THE MAGNETIZING CURRENT IN NONLINEAR MAGNETIC MATERIALS

Summary. In this paper three theorems which describe features of Fouriers series of magnetizing current in nonlinear ferromagnetic have been presented. The first theorem consideres the sign of the third harmonic. The second theorem describes all coefficients of Fourier series of the magnetizing current. The sufficient and necessary condition for alternative change of Fourier series coefficient signs has been given as well.

1. WPROWADZENIE

W wielu zagadnieniach dotyczących magnesowania w transformatorach bądź wirujących maszynach elektrycznych należy uwzględniać występujące nieliniowości związane z własnościami magnetycznymi ośrodka ferromagnetycznego. W takich układach przy wymuszeniu indukcji magnetycznej (zasilanie uzwojenia ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego w czasie przy pomijalnej rezystancji obwodu) dogodnie jest

przedstawić zależność pomiędzy natężeniem pola magnetycznego a wymuszoną indukcją w postaci:

$$H=\nu(B)B, \tag{1}$$

gdzie :

H - natężenie pola magnetycznego,

B - indukcja pola magnetycznego,

ν - reluktywność magnetyczna ośrodka.

Relacja (1a) odnosi się do ośrodka magnetycznego nieliniowego, izotropowego bez pętli histerezy.

Załóżmy, iż indukcja pola magnetycznego B(t) jest sinusoidalnie zmienna w czasie:

$$B(t) = B_m \sin(\omega t). \tag{1b}$$

Jeżeli ν = const, to natężenie pola H(t) ma również monoharmoniczny przebieg w czasie. Jeżeli reluktywność ν(.) jest funkcją indukcji B(t), to natężenie pola magnetycznego H(t) jest przebiegiem odkształconym - zawierającym wyższe harmoniczne czasowe.

W artykule zaprezentowane zostaną twierdzenia (wraz z dowodami) pozwalające wnioskować o charakterze zawartość wyższych harmonicznych w czasowym przebiegu natężenia pola magnetycznego oraz prądzie magnesującym w żelazie.

2. ANALIZA HARMONICZNA NATĘŻENIA POLA MAGNETYCZNEGO ORAZ PRĄDU MAGNESUJĄCEGO

Współczynniki Fouriera natężenia pola magnetycznego, a tym samym prądu magnesującego w żelazie wynoszą [1]:

$$a_o = \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \nu(B_m \sin(\omega t))\cdot B_m \sin(\omega t)dt$$

$$a_h = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \nu(B_m \sin(\omega t))\cdot B_m \sin(\omega t)\cdot\cos(h\omega t)dt$$

$$b_h = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \nu(B_m \sin(\omega t))\cdot B_m \sin(\omega t)\cdot\sin(h\omega t)dt$$

dla $h=1,2,\ldots,$ $\omega=2\pi f=2\pi/T.$

Czasowy przebieg y(t) (wielkość ta oznacza bądź natężenie pola magnetycznego H(t), wtedy A=1, lub prąd magnesujący w żelazie $I_m(t)$, wtedy A jest stałą zależną od geometrii obwodu magnesowanego oraz liczby zwojów uzwojenia magnesującego zgodnie z prawem Ampera) można przedstawić przy założeniu istnienia powyższych całek i ograniczoności otrzymanych współczynników Fouriera szeregiem zbieżnym o następującej postaci:

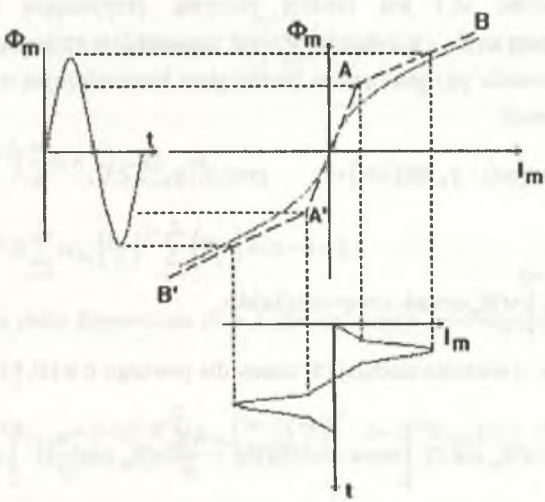
$$y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} y_h(t) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \cos(h\omega t) + b_h \sin(h\omega t). \tag{2}$$

Jeżeli reluktywność ν(.) jest funkcją parzystą indukcji magnetycznej ν(-B)=ν(B), to można następująco wnioskować o wartości współczynników rozwinięcia szeregu Fouriera [1]:

1. $a_0 = 0$ - brak składowej stałej w czasowym przebiegu y(t),
2. $a_h = 0$ - przebieg czasowy y(t) jest nieparzystą funkcją czasu,
3. $b_{2k} = 0$ - nie występują w przebiegu y(t) harmoniczne parzyste (k=1,2,...; h=2k).

Przebieg czasowy funkcji magnesowania y(t) jest funkcja nieparzystą antysymetryczną zmiennej czasu t.

Dla porównania zasadę graficznej analizy przebiegu czasowego prądu magnesującego I_m przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennej indukcji magnetycznej (strumieniu magnetycznym) w czasie - przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Analiza graficzna przebiegu prądu magnesującego
Fig. 1. Graphical analysis of the magnetizing current

Dokonajmy dalszej analitycznej oceny wartości współczynników szeregu Fouriera (3) natężenia pola magnetycznego.

3. TWIERDZENIA O ZAWARTOŚCI WYŻSZYCH HARMONICZNYCH W PRĄDZIE MAGNESUJĄCYM

Jedyne niezerowe współczynniki rozwinięcia funkcji y(t) wynoszą (dla h=2k+1):

$$b_{2k+1} = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \nu(B_m \sin(\omega t)) \cdot B_m \sin(\omega t) \cdot \sin((2k+1)\omega t)dt .$$

Dokonując zmiany zmiennych zgodnie z relacją: $\varphi = \omega\left(t - \frac{T}{2}\right)$, uzyskujemy:

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{4X}{\pi}\int_0^{\pi/2} \nu(B_m \cos\varphi) \cdot \cos\varphi \cdot \cos((2k+1)\varphi)d\varphi ,$$

gdzie oznaczono dla uproszczenia $X=AB_m$; zaś w dalszym ciągu wartość bezwzględną tych współczynników oznaczać będziemy jako: $y_h=|b_h|$ dla h=2k+1.

Zachodzą nastepujące:

TWIERDZENIE 1

Jeżeli reluktywność ν(.) jest funkcją parzystą, przyjmującą wartości dodatnie, monotonicznie rosnącą na R_+, a indukcja B(t) jest sinusoidalnie zmienną funkcją czasu (1b), to funkcja magnesowania y(t) jest opisana przebiegiem harmonicznym o pierwszej i trzeciej harmonicznej o postaci:

$$y(t) = y_1 \sin(\omega t) - y_3 \sin(3\omega t) + \ldots \qquad \text{przy: } y_1, y_3, \ldots \geq 0 . \tag{3}$$

Dowód. Jest:

$$b_3 = -\frac{4X}{\pi}\int_0^{\pi/2} \nu(B_m \cos\varphi) \cdot \cos\varphi \cdot \cos(3\varphi)d\varphi .$$

Po zastosowaniu tw. o wartości średniej [5] mamy dla pewnego $c \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$b_3 = -\frac{4X}{\pi}\nu(B_m \cos 0) \cdot \int_0^c \cos\varphi \cdot \cos(3\varphi)d\varphi - \frac{4X}{\pi}\nu(B_m \cos(\frac{\pi}{2})) \cdot \int_c^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \cos(3\varphi)d\varphi$$

$$b_3 = -\frac{X}{2\pi}\{\nu(B_m) - \nu(0)\} \cdot \{\sin 4c + \sin c\} \leq 0.$$

Powyższa relacja dowodzi, iż trzecia harmoniczna ma amplitudę "ujemną" w sensie zapisu (3): $y_1 = b_1 \geq 0, y_3 = -b_3 \geq 0$.

TWIERDZENIE 2

Jeżeli reluktywność ν(.) jest funkcją dającą się rozwinąć w szereg Maclaurina zawierający tylko nieujemne parzyste współczynniki, a wymuszona indukcja B(t) jest sinusoidalnie zmienną funkcją czasu (1b), to y(t) jest przebiegiem o harmonicznych z naprzemiennie zmiennymi znakami o postaci:

$$y(t) = y_1 \sin(\omega t) - y_3 \sin(3\omega t) + y_5 \sin(5\omega t) - y_7 \sin(7\omega t) + y_9 \sin(9\omega t) - \ldots$$

$$\text{przy: } y_1, y_3, y_5, y_7 \ldots \geq 0. \tag{4}$$

Dowód. Jest:

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{4X}{\pi} \int_0^{\pi/2} \nu(B_m \cos\varphi) \cdot \cos\varphi \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi \quad \Rightarrow$$

a zgodnie z założeniem: $\nu(.) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} (.)^{2n} \quad \Rightarrow$

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{4X}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} B_m^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\varphi) \cdot \cos\varphi \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi \quad \Rightarrow$$

Obliczając wartość całki ([5] str. 40,116) mamy:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\varphi) \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi = 2^{-2n} \int_0^{\pi/2} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} \cos((2n-2i+1)\varphi) \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi =$$

$$= 2^{-2n} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} \frac{\pi}{4} \delta(n-i-k) \quad \Rightarrow$$

$$b_{2k+1} = (-1)^k X \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} \left(\frac{B_m}{2}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} \delta(n-i-k) \tag{5a}$$

gdzie δ(.) oznacza deltę Kroneckera (δ = 1 dla argumentu zerowego, δ = 0 dla argumentu różnego od zera).

$$b_{2k+1} = (-1)^k X \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{2n} \binom{2n+1}{n-k} \left(\frac{B_m}{2}\right)^{2n} = (-1)^k |b_{2k+1}| = (-1)^k y_{2k+1}. \tag{5b}$$

Wzór (5b) dowodzi, iż w świetle poczynionych założeń współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera natężenia pola magnetycznego oraz prądu magnesującego w żelazie przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennej indukcji magnetycznej mają znaki naprzemiennie zmienne zgodnie ze wzorem (4).

Zestawienie uzyskanych rezultatów przedstawia tablica1.

Tablica 1

Założenie: $B(t)=B_m\sin(\omega t)$	Teza: $y(t)=H(t)$ lub $I_m(t)$....
Reluktywność $\nu(.)$ jest funkcją monotonicznie malejącą - Tw.1.	*Trzecia harmoniczna jest w "przeciw-fazie" w sensie zapisu we wzorze (3).*
Reluktywność $\nu(.)$ jest funkcją parzystą; znana jest postać szeregu Maclaurina - Tw.2	*Harmoniczne nieparzyste prądu mag. są naprzemiennie zmienne w sensie zapisu we wzorze (4).*
Ocena zawartości amplitud poszczególnych harmonicznych jest możliwa przy wykorzystaniu WKW (6).	*Istnieje warunek (6) konieczny i wystarczający pozwalający oceniać zawartość wyższych harmonicznych dla danego szeregu reluktywności $\nu(.)$.*

4. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

4.1 Twierdzenie 1 oraz 2 tłumaczą znany fakt doświadczalny ([2], [3], [4]) mówiąc, iż w nieliniowym ferromagnetyku przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennej w czasie indukcji magnetycznej czasowy przebieg natężenia pola magnetycznego jest opisany szeregiem Fouriera zawierającym w rozkładzie tylko nieparzyste harmoniczne funkcji sinus o naprzemiennie zmiennych znakach:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y_{2k+1}\sin((2k+1)\omega t)$$

(współczynniki y_{2k+1} są nieujemne), czyli:

$$y(t) = y_1\sin(\omega t) - y_3\sin(3\omega t) + y_5\sin(5\omega t) - y_7\sin(7\omega t) + y_9\sin(9\omega t) + \ldots$$

W takim przebiegu czasowym natężenia pola magnetycznego i prądu magnesujacego w żelazie amplituda wypada w tej samej chwili czasowej co amplituda wymuszonej indukcji pola magnetycznego. Na powyższą własność i postać szeregu (4) powołuje się wielu Autorów ([2],[3],[4] i inni) nie podając jednak żadnych warunków na to, aby przebieg odkształcony mógł być opisany szeregiem o postaci (4).

4.2. Relacja (5b) podaje ogólnie warunek wystarczający i konieczny na zachodzenie tezy Tw.2. Mianowicie, teza Tw.2 jest spełniona **wtedy i tylko wtedy,** gdy:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{2n} \binom{2n+1}{n-k} \left(\frac{B_m}{2}\right)^{2n} \geq 0 \tag{6}$$

4.3. Jeżeli szereg Maclaurina ν(.) o wyrazach parzystych urywa się dla n>N (N jest pewną znaną liczbą naturalną wynikającą np. z żądanej dokładności aproksymacji funkcji ν(.) wielomianem):

$$\nu(.) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n}(.)^{2n} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{2n}(.)^{2n}$$

to zanikają wszystkie współczynniki rozwinięcia szeregu y(t) dla k>N (gdy $k>N \Rightarrow b_{2k+1} = 0$ zgodnie ze wzorem (5b)).

LITERATURA

1. Bolkowski S.:Elektrotechnika techniczna. WNT, Warszawa 1986.
2. Richter R.:Elektrische Maschinen, dritter Band.1954.
3. Otto J.: Dynamisches Verhalten elektrischer Maschine (Eine Einfürung in die numerische Modellierung mit PSPICE). Friedr. View & Sonn Verlagsgesellschaft GmbH, Braunschweig- Wiesbaden 1991.
4. Jezierski E.: Transformatory " WNT. Warszawa 1965.
5. Ryżnik A.: Tablicy intiegrałow, sum, riadow i proizwiedienij. Moskwa 1951.
6. Spałek D.: Twierdzenia o zawartości wyższych harmonicznych w przebiegach odkształconych. 5-th Slovak and Tschech International Conference "Sensor and Sensors System". Prešov, XII 1994 pp.58-63.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 czerwca 1995 r.

Abstract

This paper deals with a nonlinear magnetic circuit which is magnetized (supplied) by a sinusoidal time-depending flux. Ferromagnetic H-B characteristic is homogeneous ($H = \nu B$), where ν - is magnetic reluctivity. In case linear ferromagnetic the magnetizing current is the sine time-depending function, too. If the ferromagnetic is non-linear, the magnetizing current $I_m(t)$ and magnetic field strength $H(t)$ is described by the Fourier series. The theorems which presented in this article say:

- If the reluctivity is an increasing function $\nu(.)$ of magnetic flux density B then the third harmonic (theorem 1) of the ferromagnetic magnetising current is negative:

$$b_3 \leq 0.$$

- If the even coefficient of Maclaurin series of magnetic reluctivity $\nu(.)$ versus B are positive and odd coefficient are equal to zero, the magnetising current of ferromagnetic is described by the Fourier series with odd coefficient (theorem 2) whose signs change alternatively i.e.

$$b_3 \leq 0.\ b_5 \geq 0.\ b_7 \leq 0.\ b_9 \geq 0, \ldots .$$

- The necessary and sufficient condition Eqn. (6) for thesis of theorem 2 is given.