ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA Z. 118 Nr kol. 1338

Ewa M.KOMOROWSKA, Barbara MAŻBIC-KULMA, Anna POGORZELEC
Insytut Badań Systemowych PAN

ZADANIE LOKALIZACJI DWUPOZIOMOWEJ Z UWZGLĘDNIENIEM OGRANICZEŃ POJEMNOŚCIOWYCH

Streszczenie. W referacie zostanie przedstawiony problem lokalizacji dwupoziomowej z ograniczonymi pojemnościami. Z zadaniem takim mamy do czynienia wówczas, gdy jednocześnie lokalizowane są 2 rodzajów obiektów. Na przykład rozmieszczenie przetwórni śmieci oraz docelowych składowisk odpadów. W niniejszej pracy autorki zaproponowały metodę rozwiązywania zadania,gdy dostawy są ograniczone pojemnością zarówno zakładów pośrednich, jak i końcowych.

TWO-LEVEL LOCATION PROBLEMS WITH CAPACITY CONSTRAINTS

Summary. This paper presents the two-level capacitated location problem. Such problem appears when two different types of objects are simultaneously located. As a classic example there is considered the urban solid waste system. The authors proposed a method solving problem when capacity of processing facility as well as capacity of target facilities are limited.

W najogólniejszym rozumieniu w zadaniach lokalizacyjno-transportowych stawiane jest następujące zasadnicze pytanie:

Gdzie należy zlokalizować obiekty, przy zadanym zbiorze możliwych (proponowanych) lokalizacji, tak aby minimalizować koszty związane zarówno z lokalizacją,jak i z transportem, przy uwzględnieniu jednocześnie dodatkowych ograniczeń.

Zadania lokalizacji, zwane też zadaniami rozmieszczenia, należą do klasy zadań optymalizacji dyskretnej. Z dyskretnym modelem decyzyjnym mamy do czynienia wówczas, gdy co najmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości z dyskretnego, tzn. niespójnego zbioru punktów. Szczególnym przypadkiem modeli dyskretnych są modele całkowitoliczbowe, w których wszystkie zmienne decyzyjne przyjmują wartości całkowite. Modele dyskretne mogą być zarówno modelami liniowymi jak i nieliniowymi. Matematyczne sformułowanie zagadnień lokalizacyjnych klasyfikuje je do mieszanego problemu całkowitoliczbowego. Problemy te są trudne do rozwiązywania i w literaturze nazywa się je NP-trudne.

Należy jednak tutaj podkreślić fakt, że każdy rzeczywisty przypadek zadania lokalizacji jest indywidualny i wprawdzie funkcje celu, wiążące zmienne przydziału oraz lokalizacji, zapisują się tą samą formułą, to ograniczenia różnią między sobą poszczególne modele w sposób zasadniczy. Ograniczenia odzwierciedlają specyfikę rozwiązywanego problemu i wpływają w istotny sposób na konstrukcję algorytmu rozwiązującego. Na ogół algorytm rozwiązujący jeden typ problemów lokalizacyjnych jest nieprzydatny dla innego zadania. Znane z literatury algorytmy rozwiązujące zadania lokalizacji dwupoziomowej są heurystyczne. Wynika to z kompromisu podejmowanego przy konstruowaniu matematycznego modelu dla układu otwartego,jakim jest rozwiązywany problem rzeczywisty.

W przedstawionym w artykule zadaniu lokalizacyjnym szukane jest optymalne rozmieszczenie takich obiektów, które mogą być odbiorcami końcowymi (usług, towarów, danych), jak i punktami pośrednimi (magazynami, przetwórniami). Z punktu widzenia metody rozwiązania, nie jest istotne, czy lokalizowane są zakłady początkowe i pośrednie, czy też pośrednie i końcowe.

Model matematyczny dla tego problemu przedstawia się następująco:

$$min \sum_{i \in L} f_i y_i + \sum_{j \in M} g_j z_j + \sum_{i \in L} \sum_{j \in M} \sum_{k \in N} c_{ijk} x_{ijk} \qquad (1)$$

ograniczenia:

$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in M} x_{ijk} = 1 \qquad k \in N \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ijk} \le y_i \qquad j \in M, \ k \in N \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in L} x_{ijk} \le z_j \qquad j \in M, \ k \in N \qquad (4)$$

$$\sum_{k} D_k \sum_{j} x_{ijk} \le S_i y_i \qquad i = 1,\dots,I \qquad (5)$$

$$\sum_{k} D_k \sum_{i} x_{ijk} \le V_j z_j \qquad j = 1,\dots,J \qquad (6)$$

$$y_i \le z_i \qquad i \in L \qquad (7)$$

$$j_i, z_j \in \{0,1\} \qquad i \in L, \ j \in M, \ k \in N$$

$$x_{ijk} \ge 0$$

gdzie:

i - numer dostawcy,

j - numer magazynu pośredniego,

k - numer odbiorcy,

f_i - stałe koszty i-tego dostawcy,

g_j - stałe koszty j-tego magazynu pośredniego,

c_{ijk} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowań k-tego odbiorcy przez i-tego dostawcę i j-ty magazyn,

x_{ijk} - udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania k-tego odbiorcy poprzez j-ty magazyn pośredni,

$$z_j = \begin{cases} 1 - \text{jeśli lokalizacja } j\text{-tego magazynu} \\ \qquad \text{pośredniego jest rozpatrywana} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 - \text{jeśli lokalizacja } i\text{-tego dostawcy} \\ \qquad \text{jest rozpatrywana} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Funkcja celu wyraża całkowite, sumaryczne koszty składające się ze stałych kosztów f_i dla dostawców, g_j dla magazynów pośrednich oraz kosztów c_{ijk} produkcji i transportu od dostawcy, magazynowania i transportu między dostawcą a magazynem pośrednim oraz transportu z magazynu do odbiorcy. Jeśli koszty u dostawców są nieliniowe, można je aproksymować liniowo przez wprowadzenie fikcyjnych dostawców lub magazynów pośrednich.

Ograniczenia *(2)* zapewniają zaspokojenie zapotrzebowań, a *(3)* i *(4)*, że zapotrzebowania te będą zaspokojone tylko przez rozpatrywanych dostawców i magazyny pośrednie. Ograniczenia *(7)* mówią, że magazyn pośredni związany z i-tym dostawcą musi być uwzględniony, jeśli jest rozpatrywany i-ty dostawca.

Ograniczenia *(5)* i *(6)* zapewniają nieprzekraczalność ograniczeń pojemnościowych, odpowiednio dla zakładów pośrednich i dostawców.

Dwupoziomowe zadania lokalizacji pojawiają się w literaturze rzadko. Związane jest to przede wszystkim z istotnymi trudnościami pojawiającymi się przy konstrukcji algorytmu dającego optymalne rozwiązania. Autorki w pracach [14], [18] przedstawiły algorytm rozwiązujący zadanie przy nieograniczonych pojemnościach. Już w przypadku zadania o nieograniczonych pojemnościach, dla którego model ma mniej o 2 kategorie ograniczeń *(5)* i *(6)*, unikanie pełnego przeglądu rozwiązań oraz skracanie czasu obliczeń prowadzi do

wyznaczania suboptymalnego rozwiązania. Takie podejście jest w zupełności wystarczające, gdy uzyskane wyniki mają służyć jedynie jako wspomaganie decyzji i ukazywać wąskie gardła modelowanych systemów. Konstrukcja algorytmów komplikuje się w znaczący sposób, gdy w modelu zostają nałożone ograniczenia na pojemności. Jak to można było zaobserwować na podstawie rzeczywistych przykładów, modele lokalizacji dwupoziomowej charakteryzują się dużym stopniem złożoności, co wynika z wieloindeksowości zmiennych decyzyjnych, różnorodności ograniczeń, wieloobiektowości funkcji celu.

Poniżej został przedstawiony model zadania lokalizacji dwupoziomowej, dla którego autorki opracowały algorytm dający suboptymalne rozwiązanie. Załóżmy, że towar jest dostarczany z zakładów początkowych do zakładów końcowych poprzez zakłady pośrednie. Lokalizowane są jednocześnie zakłady początkowe i pośrednie dla zadanych zbiorów punktów lokalizacji, tak aby spełnione były zapotrzebowania zakładów końcowych przy minimalnych kosztach inwestycyjno-eksploatacyjno-transportowych. Zakłady początkowe i pośrednie mają ograniczone pojemności.

Jako przykłady rzeczywiste tego typu lokalizacji można podać lokalizację:

- punktów skupu i zakładów przetwórczych w przemyśle mleczarskim [10, 18],
- przetwórni i hurtowni w przemyśle spożywczym [17, 5],
- przetwórni śmieci i wysypisk odpadów [2],
- miejsc zwózki i przetwórni kauczuku [19].

W rozważanym modelu przyjmujemy następujące oznaczenia:

Indeksy dla zmiennych decyzyjnych:

$i = 1,\dots,I$ lokalizacja odbiorców (obsługiwanych wierzchołków)

$j = 1,\dots,J$ lokalizacja przetwórni

$k = 1,\dots,K$ lokalizacja dostawców (usługodawców)

Zmienne decyzyjne problemu:

x_{ij} - ilość towaru przewożonego z i do j

y_{ij} - ilość towaru przewożonego z j do k

v_k - zmienna (0-1) określająca lokalizację "usługodawcy" w k

z_j - zmienna (0-1) określająca lokalizację przetwórni w j

Dane wejściowe:

d_i - zapotrzebowanie na usługę (odbiór towaru) w i

c_{ab} - jednostkowy koszt transportu towaru z a do b

ρ - (%) procentowa ilość towaru pozostała po przetworzeniu

Q - moc przerobowa dla przetwórni

Q_k - ograniczenie pojemnościowe dla zakładów końcowych

γ, δ - stałe oraz zmienne koszty jednostkowe dla zakładów pośrednich

γ_k, δ_k - stałe oraz zmienne koszty jednostkowe dla zakładów końcowych

Funkcja celu F:

$$F = \left\{ \sum_j \left(\delta z_j + \gamma \sum_i x_{ij} \right) + \sum_k \left(\delta_k v_k + \gamma_k \sum_j y_{jk} \right) \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j \sum_k c_{jk} y_{jk} \right\} \tag{8}$$

Ograniczenia:

$$\sum_j x_{ij} = d_i \qquad i = 1,\dots,n \tag{9}$$

$$\sum_i x_{ij} \le Q_j z_j \qquad j = 1,\dots,n \tag{10}$$

$$\sum_j y_{jk} \le Q_k v_k \qquad k = 1,\dots,n \tag{11}$$

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k y_{jk} \qquad j = 1,\dots,n \tag{12}$$

Warunki na zmienne decyzyjne:

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i,j = 1,\dots,n \tag{13.a}$$

$$y_{jk} \ge 0 \qquad j,k = 1,\dots,n \tag{13.b}$$

$$z_j = 0,1 \qquad j = 1,\dots,n \tag{13.c}$$

$$v_k = 0,1 \qquad k = 1,\dots,n \tag{13.d}$$

Funkcja celu F opisuje ekonomiczne koszty ponoszone odpowiednio podczas inwestowania i eksploatacji dla przetwórni j oraz zakładów pośrednich k, a także koszty transportowe dla 2 relacji: (i,j), (j,k). Koszty stałe określone są przez dane δ i δ_k, koszty zmienne określane są przez γ i γ_k i rosną liniowo wraz z ilością towaru.

Ograniczenie *(9)* gwarantuje całkowitą realizację zapotrzebowań. Nierówności *(10)* i *(11)* dotyczą odpowiednio ograniczeń pojemnościowych dla zakładów pośrednich j oraz zakładów końcowych k. Ograniczenia *(12)* gwarantują przetwórniom całkowity wywóz przetworzonego towaru.

Zmienne decyzyjne x i y *(13.a)*, *(13.b)* są nieujemne. Zmienne z i v są 0-1. Tak opisany model dotyczy ustalonego wcześniej okresu czasu dla badanego problemu.

Istotnym ograniczeniem dla algorytmu rozwiązującego jest sprawdzanie bilansowania się rozważanego systemu, tzn.:

a) czy zakłady pośrednie są w stanie przyjąć całą przesyłkę od zakładów początkowych,

b) czy zakłady końcowe są w stanie przyjąć całą przesyłkę od zakładów pośrednich.

Ogólne bilansowanie się przepływów na tym etapie algorytmu rozwiązującego będzie dalej nazywane bilansowaniem się typu I. Bilansowanie szczegółowe wynikające ze struktury konkretnej sieci będzie nazywane bilansowaniem się typu II.

W rozpatrywanym zadaniu zakłada się, że zakłady pośrednie są jednorodne. Zmienne mogą być natomiast ich moce przerobowe, z tym, że są one zawsze wielokrotnością pewnej minimalnej wartości Q. Jeżeli dokonywana jest inwestycja zakładu o mocy np. $h * Q$, to traktuje się ją jak h inwestycji o mocy Q każda.

W problemie bilansowania się typu I rozróżnia się 4 sytuacje. Najlepsze bieżące rozwiązanie jest określone jako:

BILANSOWANIE I TYPU

I.

$\sum_i d_i \le |J|Q$ - zakłady pośrednie mogą przyjąć całą dostawę od zakładów początkowych

$\rho|J'|Q \le \sum_k Q_k$ - zakłady końcowe mogą przyjąć całą dostawę od zakładów pośrednich

$J' \subset J$ - najmniejszy podzbiór realizujący zapotrzebowania zakładów początkowych

II.

$\sum_i d_i > |J|Q$ - zakłady pośrednie nie mogą przyjąć całej dostawy

$\sum_i d_i - |J|Q$ - brakująca różnica

$\rho \sum_i d_i \leq \sum_k Q_k$ - zakłady końcowe przyjmują wszystkie dostawy

$\left[\left(\sum_i d_i - |J|Q\right) : Q\right] + 1$ - brakująca liczba zakładów pośrednich

Na tym etapie musi zapaść decyzja, czy budowane będą brakujące zakłady pośrednie i propozycje ich lokalizacji.

III.

$\sum_i d_i \leq |J|Q$ - zakłady pośrednie mogą przyjąć całość dostaw

$\rho|J'|Q > \sum_k Q_k$ - zakłady końcowe nie mogą przyjąć całej dostawy

$J' \subset J$ - brakująca różnica

$\left[\left(\sum_k Q_k - \rho|J'|Q\right) : Q^*\right] + 1$ - brakująca liczba zakładów końcowych, gdzie Q^* oznacza wybrany typ dodatkowych zakładów końcowych

Na tym etapie powinna zapaść decyzja o budowie i lokalizacji zakładów końcowych.

IV.

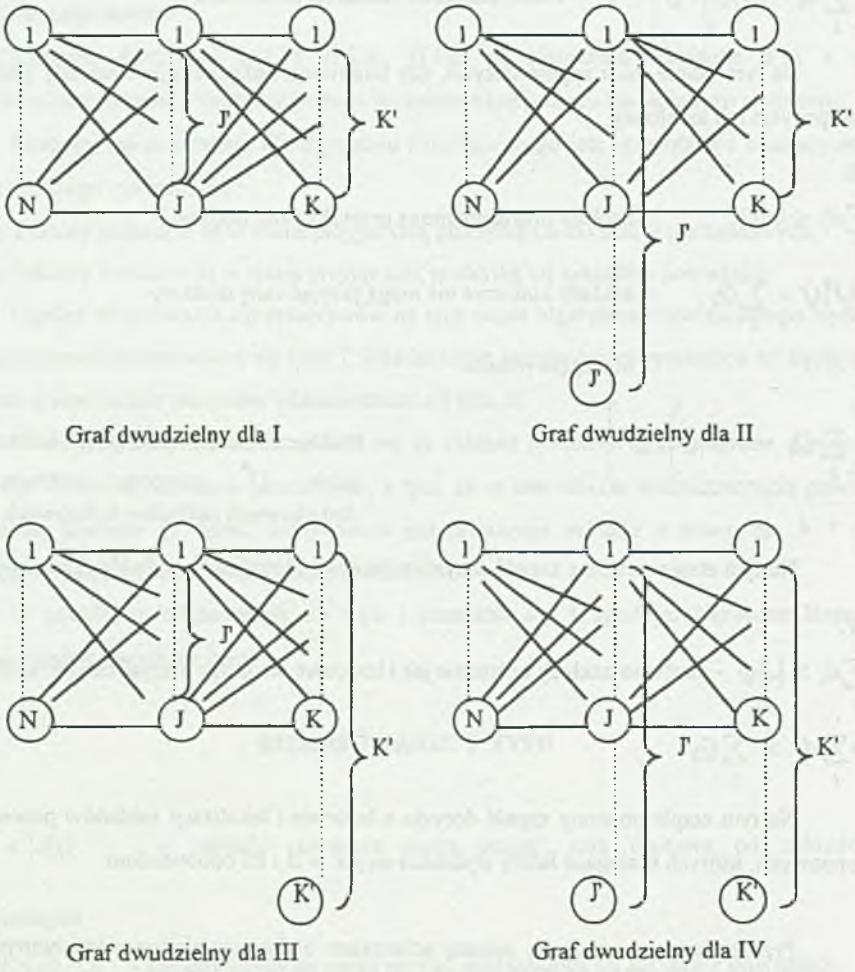
$\sum_i d_i > |J|Q$ - zarówno zakłady pośrednie jak i końcowe nie mogą przyjąć całych dostaw

$\rho \sum_i d_i > \sum_k Q_k$

Na tym etapie powinny zapaść decyzje o budowie i lokalizacji zakładów pośrednich i końcowych, których brakujące liczby wyznacza się jak w II i III odpowiednio.

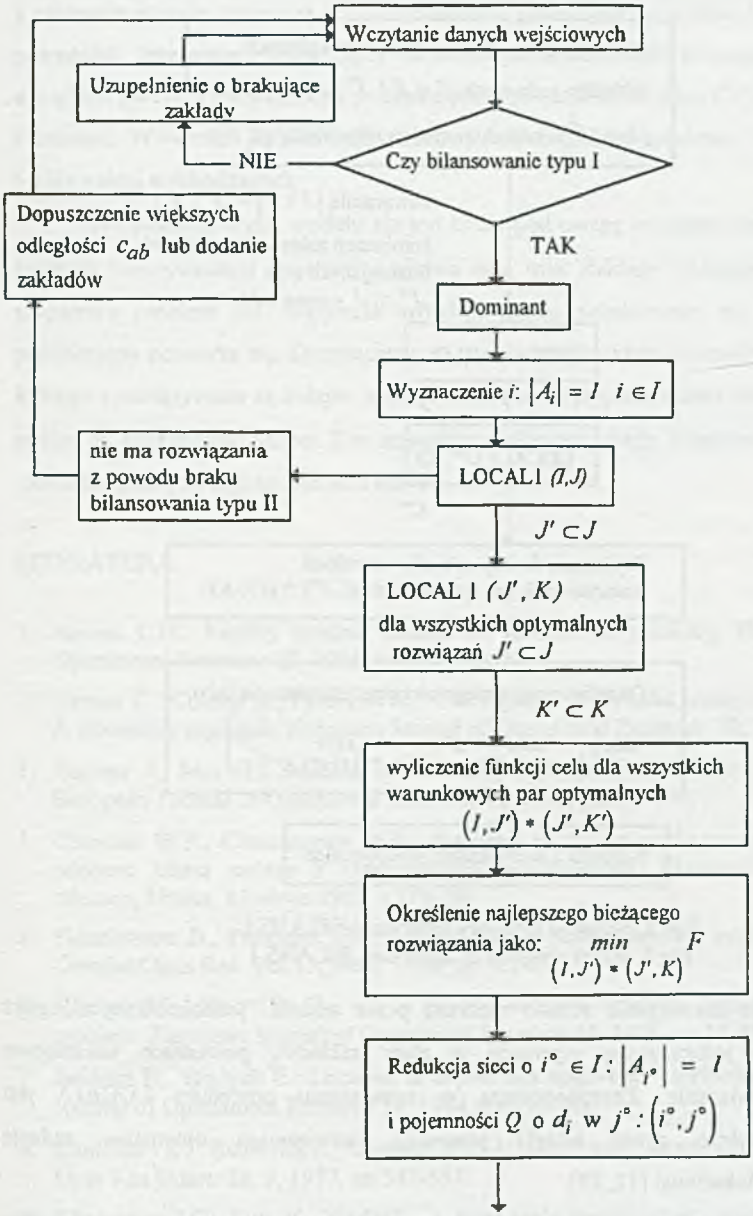
Przedstawiony w artykule, opisany schematem blokowym algorytm jest heurystyczny i daje rozwiązanie suboptymalne. Brak bilansowania typu II występuje wówczas, gdy zakłady pośrednie nie mogą przyjąć dostaw od niektórych zakładów początkowych pomimo bilansowania się typu I. Taką sytuację determinuje szczególna postać grafu dwudzielnego, gdy nie ma zapewnionych wystarczających połączeń, tj. gdy nie występują wszystkie gałęzie. Wówczas decydent musi podjąć decyzje albo o zwiększeniu kryterium odległościowego z c_{ab} do c_{AB}: $c_{AB} >> c_{ab}$ albo o lokalizacji nowych zakładów. Podmiana zakładów pośrednich nie zmienia kosztów inwestycyjnych dla tych zakładów, gdyż ich liczba jest stała.

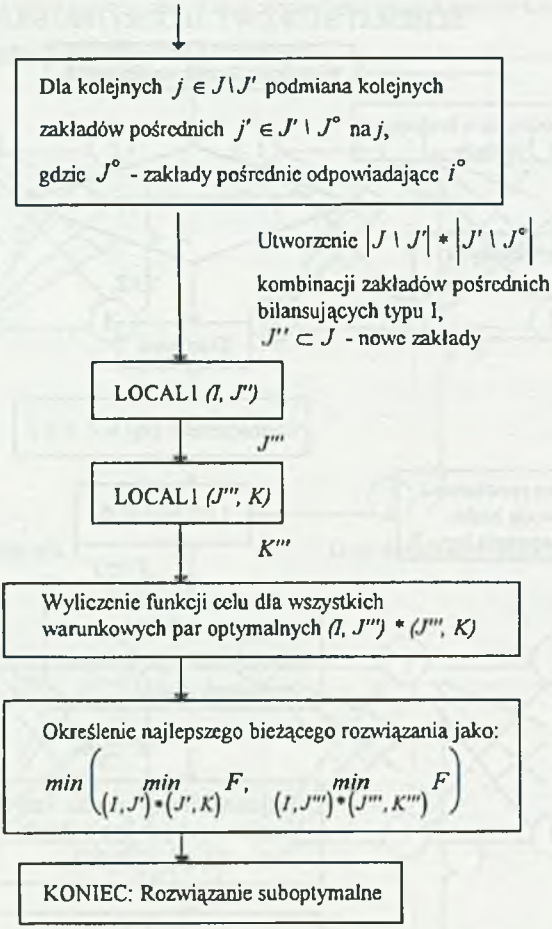
Natomiast poszukiwane są takie rozwiązania, które zmniejszają sumę kosztów transportowych *(i,j,k)* i kosztów inwestycyjnych dla zakładów końcowych.



Rys. 1. Grafy dwudzielne dla czterech rodzajów bilansowania typu I
Fig. 1. Bipartite graphs for four kind of balance type I

SCHEMAT BLOKOWY ALGORYTMU BILANS I





Rys.2. Schemat blokowy algorytmu BILANS I
Fig.2. Block diagram of algorithm BILANS I

Poprawianie rozwiązania zostało nazwane przez autorki "jednokrokowym", gdyż ogranicza się do jednorazowej ingerencji w zbiór zakładów pośrednich warunkowo optymalnego rozwiązania. Zaproponowana w rozwiązaniu procedura LOCAL1 jest opracowaną wcześniej przez autorki procedurą rozwiązującą optymalne zadanie jednopoziomowej lokalizacji [12, 20].

Jak to zostało wykazane przez autorki w pracy [20], dwukrotne stosowanie optymalnej procedury LOCAL1 dla dwudzielnego grafu nie gwarantuje optymalnego rozwiązania. Niemniej zaproponowany przez autorki algorytm daje lepsze rozwiązania niż heurystyczny algorytm C.Caruso [2].

Algorytm BILANS I rozpoczyna obliczenia od lepszego rozwiązania bieżącego, a następnie istotnie ogranicza liczbę podzbiorów powstałych w wyniku podmiany zakładów pośrednich. Interesująca ze względu na interaktywną możliwość informowania decydentów o wąskich gardłach rozważanego problemu jest zaproponowana przez C.Caruso [2] procedura Dominant. W wyniku jej działania można ukazać zakłady początkowe i końcowe o małej liczbie gałęzi wychodzących.

W opisanym wyżej modelu nie jest brany pod uwagę horyzont planowania, który dla każdego rzeczywistego przykładu odgrywa inną rolę. Zakłady mleczarskie czy chemiczne rozpatrują problem dla relatywnie krótkiego czasu składowania, po którym cały cykl produkcyjny powtarza się. Otrzymujemy w tym przypadku zadanie semidynamiczne [11], dla którego rozwiązywane są kolejne zadania statyczne. Wysypiska śmieci istnieją tak długo, jak zdolne są przyjmować śmieci. Dla stosunkowo długiego czasu konstruowany jest wówczas model statyczny ze zagregowanymi danymi.

LITERATURA

1. Aikens C.H.: Facility location models for distribution planning, European Journal of Operational Research 22, 1985, pp.263-279.
2. Caruso C., Colorni A., Paruccini M.: The regional urban solid waste management system: A modelling approach, European Journal of Operational Research 70, 1993, pp.16-30.
3. Current J., Min H., Schilling D.: Multiobjective analisis of facility location decisions, European Journal of Operational Research 49, 1990, pp.295-307.
4. Czerenin W.P., Chaczaturow W.R.: Rieszenie mietodom posliedowatielnych raszczotow odnowo klassa zadacz o razmieszczenii proizwodstwa, Ekonomika matematiczeskoj mietody, Nauka, Moskwa 1965, s.279-290.
5. Fleischmann B., Paraschis J.N.: Solving a large scale districting problem: a case report, Comput.Opns Res. Vol.15, No.6, 1988, pp.521-533.
6. Hakimi S.L., Kuo Ch.-Ch.: On a general network location - production - allocation problem, European Journal of Operational Research 55, 1991, pp.31-45.
7. Jasińska E., Wojtych E.: Location of depots in a sugar-beet distribution system, European Journal of Operational Research 18, 1984, pp.396-402.
8. Kaufman L., Eede M.V., Hansen P.: A plant and warehouse location problem, Oper.Res.Quart. 28, 3, 1977, pp.547-554.
9. Klincewicz J.G., Luss H., Yu C.-S.: A large scale multilocation capacity planning model, European Journal of Operational Research 34, 1988, pp.178-190.
10. Komorowska E.M., Mażbic-Kulma B., Piela Cz., Rydel J.: Problem lokalizacji - narzędzie wspomagające projektowanie inwestycji w przemyśle mleczarskim, PTI, Szczecin - Julin, 1988, s.157-162.

11. Komorowska E.M., Mażbic-Kulma B., Pogorzelec A.: Wybrane przykłady zastosowań zagadnień lokalizacyjnych i ich klasyfikacje, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, z.114, Gliwice 1994, s.159-173.

12. Komorowska E.M., Mażbic-Kulma B., Stępień J.: Zagadnienie dystrybucji produktów naftowych, Zesz. Nauk. Pol.Śląsk.,s.Automatyka, z.94, Gliwice 1988, s.167-176.

13. Love R.F., Morris J.G., Wesolowsky G.O.: Facilities locations. Models & Methods, Publications in Oper.Res.Series, 1988.

14. Mażbic-Kulma B., Komorowska E.M., Pogorzelec A., Rydel J., Pamediiene R., Miservicius R., Palilions V., Czaplinskas A., Truksininene E.: Pakiet programm reszenia optymalizacji razmieszczenia i pieriewozow kak instrument paddierżki priniatia reszenij, Automatization of Planning and Control 13, Vilnius 1992, pp.44-58.

15. Mażbic-Kulma B., Komorowska E.M., Pogorzelec A., Zabrzewska A.: Zadanie lokalizacji i jego zastosowanie dla służb ratownictwa lotniczego, BOS'95 VI Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych, w druku.

16. Mażbic-Kulma B., Pogorzelec A., Komorowska E.M.: Linear Location and some Real Applications, Systems Science, 1995, pp.421-424.

17. Mażbic-Kulma B., Pogorzelec A., Piela Cz., Rydel J.: Lokalizacja punktów skupu w przemyśle owocowo - warzywnym jako przykład zadania jednopoziomowego z ograniczoną dostawą, PTI, Szczecin - Julin, 1990, s.161-165.

18. Mażbic-Kulma B., Pogorzelec A., Rydel J.: Dwupoziomowe zadanie lokalizacji i jego zastosowanie w przemyśle, Zesz. Nauk. Pol. Śląsk., s.Automatyka, z.100, Gliwice, 1990, s.173-186.

19. Nambiar J.M.,Gelders L.F., Van Wassenhove L.N.: A large scale location-allocation problem in natural rubber industry, European Journal of Operational Research 6, 1981, pp.183-189.

20. Pogorzelec A., Mażbic-Kulma B., Komorowska E.M., Pamediene R., Czaplinskas A., Palilions V., Miservicius R., Truksininene E.: LOCAL-R - location-transportation computer system, Systems Science, Vol.19, No.3, 1993, pp.81-93.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Józef Grabowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

Abstract

In the most general sense the location and transport problems refer to the following fundamental question:

Where to locate objects within the set of feasible (proposed) locations so as to minimize the costs linked to location itself and to transport, while simultaneously accounting for the additional constraints.

Location problems, called also spatial assignment problems, belong to the class of discrete optimization problems. We deal with a discrete decision model whenever at least one decision variable takes values from the discrete, i.e. non-compact set of points. A particular case of the discrete models is constituted by the integer models, that is - the ones in which all the decision variables take integer values. Discrete models can both be linear and nonlinear.

In view of mathematical formulation of the location problems they are classified as mixed integer problems. Such problems are difficult to solve and are called NP-hard in the literature.

We would like to emphasize here, though, that every real case of the location problem has individual features and although the objective functions, linking the variables of assignment and location, are written down with the same formula, the constraints distinguish among the respective models in an essential manner. The constraints reflect the specific nature of the problem solved and influence significantly the structure of the solution algorithm. An algorithm which solves one type of location problems is as a rule useless for another problem. The algorithms solving the two-level location problems, which are known from the literature, are heuristic. This results from the compromise made in construction of the mathematical model for the open systems constituted in reality by the problems to be solved.

The paper presents the location problem in which the optimum location is sought of objects which can both happen to be the final points (of service, goods, data) or the intermediate ones (stocks, processing plants). In terms of the solution method it is insignificant whether we locate the initial and intermediate points or the intermediate and final ones. The female author team developed and presented in the paper, in the form of the flow diagram, the algorithm yielding the suboptimal solution for the model considered.