ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA z. 118 Nr kol. 1338

Jerzy KOTOWSKI, Ewa SZLACHCIC
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechnika Wrocławska

OPIS ALGORYTMU ROZWIĄZANIA PEWNEGO ZADANIA ROZKROJU TKANINY

Streszczenie. W pracy opisano problem rozkroju tkaniny na potrzeby produkcji mebli tapicerowanych. Surowcem jest bela materiału o teoretycznie nieskończonej długości. Problem optymalizacji polega na znalezieniu takiego rozkroju, który odetnie najmniej surowca z beli. Przedstawiono dwie wersje modelu matematycznego zadania. Opisano metody rozwiązania obu zadań, opis algorytmów obliczeniowych oraz wyniki testów numerycznych i testów obliczeniowych.

DESCRITPION OF THE ALGORITHM FOR SOME TEXTURE CUTTING SOCK PROBLEM

Summary. The paper discusses some texture cutting stock problems that occur during the furniture upholstery. A stock forms a bale of cloth with theoretically infinite length. The optimisation goal is to find the pattern that uses the minimal length of the bale. The two versions of the problem are considered. For both of them we present the optimisation methods, algorithms and results of numerical and computer tests.

1. Wstęp

W pracy opisano problem rozkroju tkaniny na potrzeby produkcji mebli tapicerowanych. Istota problemu leży w charakterze surowca. Jest nim bela materiału na tyle długa, że najwygodniej jest ją traktować jako pas o znanej szerokości i nieskończonej długości. Jako kryterium jakości optymalizacji najwygodniej przyjąć długość rozkrawanej części surowca. Problem optymalizacji polega na znalezieniu takiego rozkroju, który odetnie najmniej surowca z beli.

Celem rozkroju jest realizacja zamówienia na prostokątne kształty do produkcji mebli. Zamówienie określa liczba typów elementów, liczba elementów każdego typu, ich wymiary oraz szereg dodatkowych warunków związanych z organizacją procesu produkcji oraz z uwarunkowaniami technologicznymi.

Specyfika zadania polega między innymi na zakazie obracania elementem na beli surowca. Oko ludzkie jest w stanie zauważać zmiany odcieni wzdłuż długości beli. Należy

zatem umieszczać elementy, które wejdą w skład jednego wyrobu, blisko siebie. Prowadzi to zadania rozkroju dla jednej sztuki wyrobu.

W pracy przedstawiono dwie wersje modelu matematycznego zadania. Jedna dotyczy sytuacji z izotropowym surowcem, a druga jest zadaniem rozkroju dla jednej sztuki wyrobu. Przedstawiono opis metody rozwiązania obu zadań, opis algorytmów obliczeniowych oraz wyniki testów numerycznych i testów obliczeniowych.

2. Systematyka zadań rozkroju

Różnorodność problemów optymalizacji rozkrojów doprowadziła w krótkim czasie do powstania potrzeby opracowania typologii zagadnień z tego obszaru. Za autora takiej typologii uważa się powszechnie H. Dyckhoffa, a za obowiązującą systematykę reguły, które przedstawił on w 1990 roku w pracy [3].

Według Dyckhoffa przy klasyfikacji problemów rozkroju uwzględnia się cztery poniższe charakterystyki:

(i) wymiar

(N) liczba wymiarów - ang. "*Number of dimensionality*"

(ii) sposób rozdysponowania środków

(B) wykorzystywany jest cały dostępny surowiec

(V) wykorzystywana jest tylko część surowca niezbędna do realizacji zamówienia

(iii) asortyment surowca

(O) jedna sztuka surowca - "*One large object*"

(I) wiele identycznych sztuk surowca - "*many Identical large objects*"

(V) wiele sztuk surowca o różnych rozmiarach - "*many Various large objects*"

(iii) asortyment zamawianych elementów

(F) kilka obiektów o różnych rozmiarach - "*Few items of different dimensions*"

(M) wiele obiektów o wielu różnych rozmiarach - "*Many items of many different dimensions*"

(R) wiele obiektów o relatywnie niewielkim rozrzucie rozmiarów - "*many items of Relatively few dimensions*"

(C) wiele identycznych obiektów - "*many identiCal items*".

Jednowymiarowy problem rozkroju rozważany przez Gilmore'a i Gomory'ego [4],[5] w roku 1961 jest więc typu 1/V/I/R. W zadaniu tym zakłada się, że w magazynie znajduje się, w praktycznie nieograniczonej ilości, surowiec typu rura, pręt etc., z którego należy wyciąć zadaną liczbę obiektów o kilku różnych długościach.

Pierwszy problem optymalizacji rozważany w tej pracy, zadanie rozkroju tkaniny na potrzeby większej partii wyrobów tapicerowanych, jest typu 2/V/O/M. Drugi problem sprowadza się do wyznaczenia optymalnego rozkroju na potrzeby jednej sztuki wyrobu i w związku z tym może być traktowany jako zadanie 2/V/O/F.

Opracowana przez Dyckhoffa systematyka zadań rozkroju nie jest na tyle precyzyjna, aby w każdym przypadku, jaki zgłasza praktyka, można było bez chwili wahania zidentyfikować charakter analizowanego problemu. Doprowadziło to, na przykład, do powstania, i to już 1983 roku, klasy zadań o wymiarze N=1.5 [6]. Wydawać się może również, że zaproponowana kwalifikacja zagadnień omawianych w niniejszej pracy jest również z konieczności wyjątkowo nieprecyzyjna i nie oddająca istoty zagadnień, jakie będą dyskutowane w jej dalszej części.

3. Zadanie rozkroju tkaniny dla wielu wyrobów

Problem optymalizacji rozkroju w wersji dla wielu sztuk wyrobu może być sformułowany następująco: Znana jest:

- szerokość surowca **w_s**,
- liczba typów zamawianych elementów **m** i ich wymiary w_p_{ij}, **i=1,m, j=0,1**,
- zapotrzebowanie na te elementy n_p_i, **i=1,m**,
- ograniczenia technologiczne określające postać dopuszczalnego rozkroju.

Należy wyznaczyć:

- zbiór dopuszczalnych rozkrojów surowca $A = \{ a_1, a_2, \dots a_k\}$, $k \geq m$,
- oraz wektor całkowitoliczbowych krotności stosowania powyższych strategii $x \in R^k$,

optymalnych w kontekście przyjętego kryterium jakości optymalizacji.

Wektory $a_i \in R^m$ noszą nazwę strategii rozkroju. Ich składowe są określane według reguły, że a_{ij} jest liczbą elementów i-tego typu na j-tym rozkroju, **i=1, m, j=1, k.**

Naturalną postacią kryterium jakości optymalizacji jest sumaryczne zużycie surowca, czyli w tym przypadku sumaryczna długość rozcinanych pasów tkaniny: $F(x) = w^T x$, gdzie w_i jest długością pasa tkaniny niezbędną do uzyskania jednego rozkroju i-tego typu, **i=1,k.**

Modelem matematycznym takiego problemu jest następujące zadanie optymalizacji liniowej całkowitoliczbowej:

$$F(x) = w^T x \rightarrow \min \tag{1}$$

$$Ax \geq n_p \tag{2}$$

$$x \geq 0 \text{ i całkowite.} \tag{3}$$

Wektor **n_p** został zbudowany z elementów n_p_i. Do rozwiązania problemu (1)-(3) można wykorzystać znany w literaturze ([4],[5]) algorytm Gilmore'a i Gomory'ego (G-G).

4. Algorytm rozwiązania zadania rozkroju tkaniny dla wielu wyrobów

Podstawowy schemat postępowania w algorytmie G-G jest następujący:

Krok 1

Wyznaczyć rozwiązanie bazowe dopuszczalne **B** dla problemu (1)-(3). Obliczyć macierz odwrotną B^{-1} oraz wektor cen w_B dla zmiennych bazowych.

Krok 2

Wyznaczyć wektor cen dualnych $c = w_B \cdot B^{-1}$. Znaleźć nowy rozkrój dopuszczalny, $a \in R^m$, dla którego $ca - w_s \rightarrow \max$, gdzie w_s jest długością tego rozkroju.

Krok 3

Jeżeli $ca - w_s \leq 0$ to STOP. Macierz bazowa B zawiera optymalne strategie rozkrojów, a **x** jest optymalnym rozwiązaniem problemu (1)-(3). W przeciwnym przypadku przejść do kroku 4.

Krok 4

Przeprowadzić proces reoptymalizacji, tzn. wprowadzić do bazy strategię *a* na miejsce jednej z już tam się znajdujących. Wyznaczyć macierz odwrotną B^{-1} do nowej macierzy bazowej **B** oraz wektor cen w_B i powrócić do kroku 2.■

Przedstawiony powyżej ogólny schemat postępowania musi być zaadaptowany do szczególnej sytuacji występującej w analizowanym problemie. W szczególności można zauważyć, że nie ma w tym przypadku kłopotów ze znalezieniem rozwiązania dopuszczalnego problemu (1)-(3) (Krok 1). Wynika to z faktu, że dopuszczalnym rozwiązaniem jest macierz **B** = **I**. Rozwiązanie to jest dopuszczalne zawsze wtedy, gdy problem jest dopuszczalny. Początkowe składowe wektora **w** są następujące: $w_i = \min \{ w_p_{ij} | w_p_{i,1-j} \leq w_s; j=0,1\}$, $i=1,m$.

Najważniejszym elementem opracowanego na bazie algorytmu G-G programu obliczeniowego była adaptacja sytuacji występującej w Kroku 2. W trakcie przeszukiwania dopuszczalnych rozwiązań, niezależnie od zastosowanej metody postępowania, niezbędna jest analiza wartości wyrażenia $ca - w_s$. W trakcie budowy kolejnego rozwiązania nie jest bowiem znana wartość w_s, czyli długość pasa materiału zajmowanego przez rozkrój. Zagadnienie to rozwiązano traktując w_s jako parametr. Można teraz, przymując $w_s = w_{par}$, napisać $ca - w_{par} = w_{par}(c_p a - 1)$, gdzie $c_p = c/w_{par}$. Zagadnienie wyznaczenia nowego rozkroju w kroku 2 sprowadza się zatem do wyznaczenia takiego postępowania, dla którego $c_p a \rightarrow \max$, a warunek w Kroku 3 przyjmuje znaną postać: if $(c_p a \leq 1)$ STOP.

Reguła określająca składowe wektora c_p ma również prostą interpretację fizyczną. Poszukiwanie nowego rozkroju polega na wyznaczeniu postępowania charakteryzującego się największą wydajnością - składowe wektora c_p to ceny dualne elementów liczone na jednostkę długości surowca. Poniżej, w konwencji języka C, przedstawiono procedurę wyznaczania wartości parametru w_{par}:

```
fmax=1;
for(i=0;i<m;i++)
        for(j=1;;j++){
                w_par=j*w_p[i][0];
                if(w_par>dlugosc_stolu) break;
                wyznaczanie_cen_dualnych_w_funkcji(w_par);
                f=poszukiwanie_rozkroju_o_dlugosci(w_par);
                if(f>fmax){
                        fmax=f;
                        zapamietaj_rozkroj();
                }
        }
```

5. Zadanie rozkroju tkaniny dla jednej sztuki wyrobu

Zadanie rozkroju tkaniny dla jednej sztuki wyrobu charakteryzuje się niewielką liczbą elementów do rozkroju. Czyni to praktycznie bezużytecznym algorytm G-G, ponieważ podstawowe założenie tego algorytmu, to znaczy zaniedbanie wymagań na całkowitoliczbowość składowych wektora x, jest tu niedopuszczalne. W skali dużego zadania jest praktycznie do pominięcia problem,co zrobić, gdy zamiast 10 tysięcy elementów otrzyma się 9 998 lub 10 001. Jest to jednak oczywisty problem dla drobnego producenta, który zamiast, na przykład, jednego blatu stołu otrzyma ich dwa lub zero. W przypadku dwupoziomowego podejścia, jakim charakteryzuje się algorytm G-G, to znaczy praktycznie niezależnego wyznaczania strategii i potem krotności jej stosowania, wymaganie równościowego spełnienia ograniczeń (2) jest praktycznie niemożliwe do spełnienia. Należy wtedy szukać rozwiązania, które dokładnie spełnia ograniczenia (3), tak jak zostały sformułowane.

Czyni to problem (1)-(3) praktycznie znacznie trudnieszym do rozwiązania. Większość znanych rozwiązań opiera się na heurezach. Własnością znanych algorytmów tego typu jest to, że bazują one, po pierwsze, na idei rozwiązania zachłannego. W przypadku algorytmu G-G każdy rozkrój znajdujący się w rozwiązaniu bieżącym może być usunięty przez jakieś kolejne rozwiązanie wchodzące do bazy. Dowolny obraz rozkroju wyznaczony przez algorytm zachłanny może być od razu przekazywany na produkcję, bez potrzeby oczekiwania na zakończenie obliczeń. Inną własnością większości heurez jest ich ukierunkowanie na bieżący największy element. Przykłady funkcjonowania algorytmu o takich cechach zostaną przedstawione poniżej.

6. Testy obliczeniowe

Wyniki przedstawione w pracy zostały wykorzystane przy opracowaniu systemu "Rozkroje" pracującego w jednej z fabryk mebli znajdujących się na Dolnym Śląsku. System składa się z bazy danych oraz czterech procedur optymalizacyjnych dostosowanych do potrzeb

i możliwości zainstalowanych w fabryce urządzeń wykorzystywanych do rozkroju. Całość systemu została napisana w języku C++ na komputery serii IBM PC. System pracuje od 1992 roku i pozwala na optymalizację rozkroju wszystkich rodzajów surowca wykorzystywanego w fabryce. Jest to między innymi surowa płyta pilśniowa i wiórowa różnej grubości oraz różne rodzaje laminatów i tkanin.

Zamieszczone poniżej wyniki dotyczą rzeczywistego problemu rozkroju z tej fabryki. Wszystkie formularze oraz znajdujące sie na nich nazwy i określenia zostały opracowane bądź wprowadzone przez jego użytkowników - specjalistów od organizacji i technologii produkcji.

ROZLICZENIE SREDNIEJ WYDAJNOSCI ROZKROJOW
A. MATERIAL: IT20 TKANINA TAPIC.140 WYMIAR : 0x1400mm
B. WYROB : 400440 Fotel KATY LICZBA : 100szt

Nr ROZ.	NAZWA ELEMENTU -	SYMB	NETTO dlug x szer	POW net	LICZ elem	LICZ plyt	pow.P br-m2	pow.E ne-m2	wydaj [%]
	-		dlug x szer	net	el.	zap	br-m2	ne-m2	le-lz
	bok	f1	820x480	0.39	199	200		78.1	-1
	siedzisko	f2	820x580	0.47	96	100		45.5	-4
	podlokietnik	f3	840x700	0.58	150	150		88.2	0
	podnozek	f4	650x320	0.20	97	100		20.1	-3
	oparcie gorne	f5	1030x610	0.62	100	100		62.8	0
	oparcie dolne	f6	1060x770	0.81	145	150		118.1	-5
	klapa	f7	940x850	0.79	99	100		78.9	-1
	bodno przed.boku	f8	560x160	0.08	196	200		17.3	-4
	bodno wewnetrz.boku	f9	310x210	0.06	240	250		15.4	-10

Rys.1. Przykładowe wyniki obliczeń
Fig.1. Results of calculations

PLAN ROZKROJU Nr 9
A. MATERIAL : IT20 TKANINA TAPIC.140 WYMIAR : 0x1400mm
B. WYROB : 400440 Fotel KATY LICZBA ROZKR. : 3 szt
C. WYDAJNOSC ROZKROJU : W =(Nu/Nb)*100 = 93.8 %
D. ROZKROJ OBOWIAZUJE OD DNIA .....

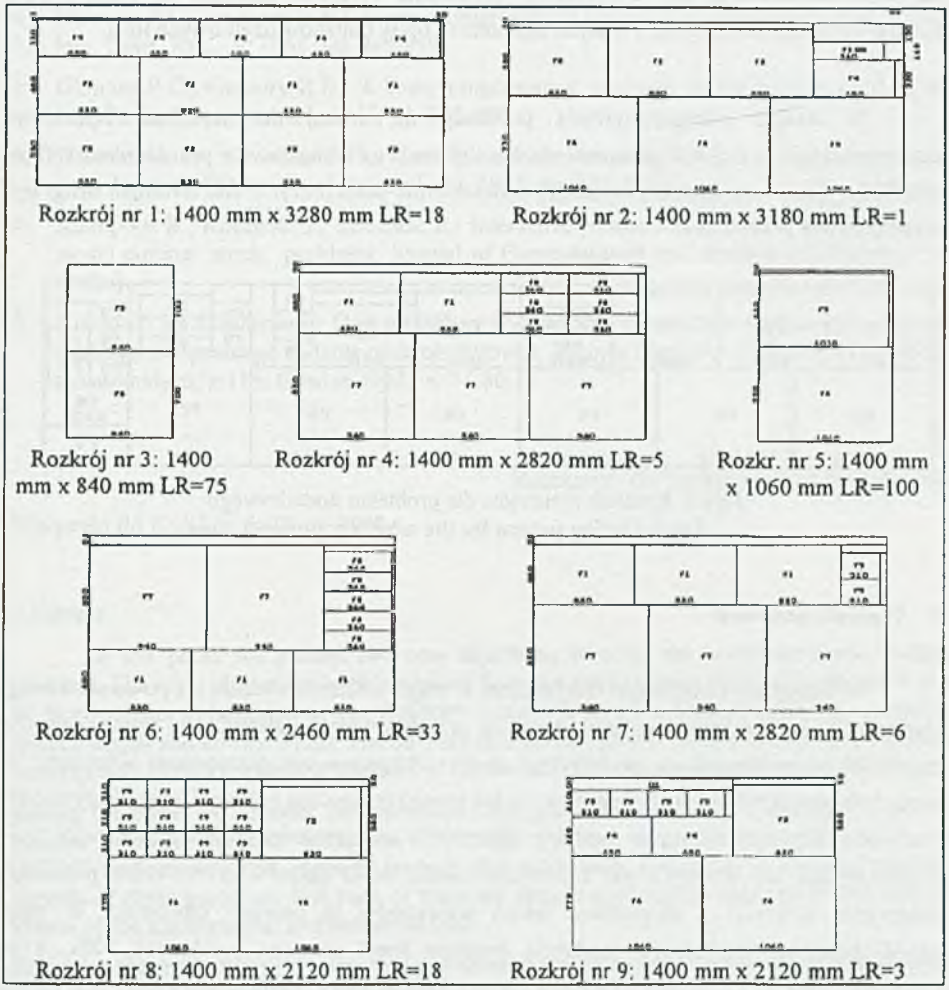
Lp -	NAZWA ELEMENTU -	SYMBOL -	BRUTTO dlug	BRUTTO szer	NETTO dlug	NETTO szer	szt -	netto [m2]
1	siedzisko	f2	820	580	820	580	1	0.47
2	podnozek	f4	650	320	650	320	2	0.41
3	oparcie dolne	f6	1060	770	1060	770	2	1.63
4	bodno wewnetrz.boku	f9	310	210	310	210	4	0.26

Rys.2. Opis przykładowego rozkroju
Fig.2. Descritpion of the particular cutting pattern

Dane wejściowe do zadania optymalizacji dotyczące elementów do rozkroju znajdują się na rys.1. Rysunek jest kopią z ekranu jednego z dokumentów wyjściowych tworzonych przez system. Problem dotyczy rozkroju tkaniny tapicerowanej z beli o szerokości 1400 mm na 9 różnych elementów o symbolach f1, f2,...,f9. Liczby zamawianych elementów (100 -250 sztuk) świadczą o tym, że zadanie dotyczy większej partii wyrobów. Na rys.1 znajdują się

również pewne zbiorcze informacje dotyczące rozwiązania uzyskanego za pomocą pierwszego z algorytmów omawianych w pracy.

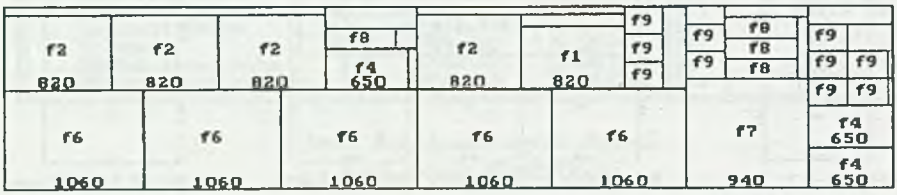
Na rys.2 przedstawiono szczegółowe dane dotyczące jednego z uzyskanych rozkrojów. Znajduje się na nim między innymi informacja o krotności tego rozkroju (3 szt.) i jego wydajności (93.8%). Rysunki wszystkich rozkrojów zostały zamieszczone na rys.3. Pod każdym rozkrojem podano długość odkrawywanego pasa tkaniny i krotność jego stosowania (LR).



Rys.3. Rysunki rozkrojów dla problemu przykładowego
Fig.3. Cutting patterns for the particular problem

Ponieważ, na życzenie użytkownika, niecałkowite krotności stosowania wyznaczonych strategii rozkroju zaokrąglane są w dół, uzyskane ilości poszczególnych elementów mogą być mniejsze od zapotrzebowania. Widać to w ostatniej kolumnie tabeli na rys.1, gdzie wyprowadzane są różnice le - lz. Pozostaje zatem do rozwiązania problem rozkroju siedmiu różnych elementów f1, f2, f4, f6, f7, f8, f9 w ilościach odpowiadających wartościom z tej kolumny. Do uzyskania rozwiązania tego problemu można, oczywiście, wykorzystać drugi z algorytmów przedstawionych w pracy. Schemat rozkroju został zamieszczony na rys.4. Z przyczyn edytorskich, dla zwiększenia czytelności rysunku, usunięto z niego wiele dodatkowych opisów (wymiary małych elementów, opisy odpadów użytkowych itp.).

W trakcie przygotowywania publikacji do druku, do uzyskania wydruków zamieszczonych na rys. 1-4, przeprowadzono obliczenia na komputerze z procesorem Pentium 100 MHz. Czas rozwiązania pierwszego problemu nie przekroczył 5 sek. Problem drugi był rozwiązywany przez 1 sek.



Rys.4. Rysunek rozkrojów dla problemu dodatkowego
Fig.4. Cutting pattern for the auxilliary problem

7. Wnioski końcowe

W Instytucie Cybernetyki Technicznej w ciągu ostatnich siedmiu lat powstało szereg algorytmów optymalizacji rozkroju surowca przystosowanych głównie do rozwiązywania zagadnień pojawiających się w fabrykach mebli. Otrzymane oprogramowanie wdrożono w wielu polskich fabrykach mebli uzyskując w ten sposób praktyczne potwierdzenie efektywności i użyteczności opracowanych metod i algorytmów obliczeniowych. Narzędzia tego typu charakteryzują się autentycznym zapotrzebowaniem wielu gałęzi i to nie tylko polskiego przemysłu. Korzyści z eksploatacji takich algorytmów są bowiem olbrzymie. W skali przedsiębiorstwa, w którego produkcie finalnym koszt surowca przekracza 60%, a w przypadku fabryk mebli produkujących na przykład zestawy mebli kuchennych jest nawet większy, oszczędności surowca rzędu 1% dają olbrzymie efekty. Dowodzą tego wyniki zebrane przez autorów niniejszej pracy.

LITERATURA

1. Coffman E.G., Shor P.W.: Average-case analysis of cutting and packing in two dimensions, European Journal of Operational Research, 44, 1990, pp. 134-144.
2. Dowsland K.A., Dowsland W.B.: Packing problems, European Journal of Operational Research, 56, 1992, pp. 2-14.
3. Dyckhoff H.: A typology of cutting and packing problems, European Journal of Operational Research, 44, 1990, pp. 145-159.
4. Gilmore P.C., Gomory R.E.: A linear programming approach to the cutting stock problem, Opns. Res., 9, 1961, pp. 849-859.
5. Gilmore P.C., Gomory R.E.: A linear programming approach to the cutting stock problem, Pt. II, Opns. Res., 11, 1963, pp. 863-888.
6. Haessler R. W., Sweeney P. E.: Cutting stock problems and solution procedures, European Journal of Operational Research, 54, 1991, pp. 141-150.
7. Klempous R., Kotowski J., Szlachcic E.: Interactive procedures in large scale two-dimensional cutting stock problems, Journal of Computational and Applied Mathematics (w druku).
8. Kotowski J,, Szlachcic E.: Opis procedury wyznaczania pierwszego rozwiazania dopuszczalnego dla pewnego zadania rozkroju surowca, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, z.115, Gliwice 1994, s. 71-80.

Recenzent: Prof dr inż. Henryk Kowalowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

Abstract

In this paper we present two new algorithms to solve the two-dimensional cutting problem. The main idea of this problem issued from the extraordinary form of the stock. It is a texture material upholstered at the furniture factory. It forms a bale of cloth, theoretically, infinite length and known width. The obvious optimisation goal is to find the set of the cutting patterns with the corresponding numbers of slit that uses the minimal length of the bale.

During the paper we consider two versions of the optimisation problem. They differ with the number of small elements. Using the Dyckhoff's typology they are of type 2/V/O/M and 2/VO/F respectively. This property leads to the outstanding difference of the mathematical models of these problems. For both of them we discuss optimisation algorithms and present results of the mathematical and numerical tests.

From the obtained results it is clear that presented approach forms an efficient solution method if the problems are to be solved in microcomputers.