ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 14 Energetyka z. 2 1957

Witold Około-Kułak

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

Właściwe zastosowanie analizy wymiarowej

W artykule określono szczegółowo sposób (mechanizm) działania analizy wymiarowej. Przytoczono cały szereg usterek charakterystycznych dla tej metody. Usterki te wyjaśniono na przykładach. Wskazano niewłaściwe jak również odpowiednie zastosowania analizy wymiarowej.

I. Analiza wymiarowa, którą w zeszłym stuleciu zapoczątkowali Jean Baptiste Fourier oraz Joseph Bertrand, przeniknęła do takich gałęzi nauki jak: mechanika, inżynieria chemiczna, termodynamika (szczególnie przepływ ciepła).

W polskiej literaturze technicznej poświęca się analizie wymiarowej od pewnego czasu sporo uwagi [1], [2], [3], [10].

Ze względu na łatwość i szybkość, z jaką metoda ta prowadzi do wyników końcowych, analiza wymiarowa znalazła szerokie zastosowanie szczególnie w tych działach nauki, gdzie ścisłe równania matematyczne określające fizyczną stronę przebiegu zjawiska nie są jeszcze sformułowane.

Ponieważ jest to metoda bardzo specyficzna i zupełnie niepodobna do innych stosowanych najczęściej w naukach ścisłych — nie jest trudno popełnić szereg błędów przy jej stosowaniu. Nie uniknęli ich zresztą uczeni nawet tej miary co John Wiliam Rayleigh, który chcąc określić natężenie przepływu ciepła na drodze konwekcji wymuszonej dla pewnego przypadku — nie wziął w ogóle pod uwagę lepkości płynu i wskutek tego otrzymał wzór niekompletny [4]. Również i Riabouschinsky padł ofiarą pomyłki wprowadzając do działań analizy wymiarowej dwie odrębne pojęciowo, lecz identyczne wymiarowo prędkości: molarną (strumienia masy) płynu oraz molekularną prędkość cząstek gazowych [2], [4].

Ta właściwość metody, w której na każdym kroku grozi możliwość popełnienia grubego błędu, sprawiła, że analiza wymiarowa ma zaciętych przeciwników.

Z drugiej strony krótkość wywodów i możliwość otrzymywania ostatecznych wyników na podstawie jedynie powierzchownej znajomości strony fizycznej zjawiska sprawiły, że ma ona również zwolenników, a nawet entuzjastów.

Stąd konieczność zajęcia w tej sprawie decydującego stanowiska.

Przede wszystkim należy dać odpowiedź na kilka pytań zasadniczych: Co to jest analiza wymiarowa? Na czym polega jej istota? Jakie są możliwości popełnienia błędów przy stosowaniu analizy wymiarowej? Gdzie powinna, a gdzie nie powinna być stosowana?

II. Specyficzne cechy tej metody dowodzą niezbicie, że analizę wymiarową należy zaliczyć do pewnego rodzaju algebry. Algebra ta określona jest operacjami na pewnym zbiorze wielkości wymiarowanych oraz oparta na pewnych aksjomatach, np. przemienności łączności itp. Podstawy tego rodzaju ujęcia analizy wymiarowej ustalił Drobot [2].

Nie jest rzeczą przypadku, że twórcą analizy wymiarowej jest genialny fizyk i matematyk Fourier, który twierdził, że każde poprawnie ułożone równanie ujmujące przebieg fizycznego zjawiska powinno spełniać postulat jednorodności wymiarów.

Myśl Fouriera podjął w dalszym ciągu Bertrand, ale w stosunku do jeszcze nie wykrytych lub niezbyt dokładnie określonych zjawisk fizycznych, dla których nie znano jeszcze równań matematycznych określających ich przebieg.

W wyniku mocnej podbudowy matematycznej będącej zasługą Federmana i Afanassjewej-Ehrenfest ustalono ścisły związek między analizą wymiarową i teorią podobieństwa. Również tej ostatniej przypadła zasługa wyjaśniania paradoksu Riabouschinskiego.

III. W celu wyjaśnienia istoty analizy wymiarowej wielu autorów podaje prosty przykład zaczerpnięty z kinematyki. Wyprowadza się np. wzory określające drogę przebytą przez swobodnie spadające ciało lub prędkość tego ciała w zależności od przyspieszenia siły ciężkości i wysokości:

$$s = C \cdot g \cdot t^2 \qquad \text{lub} \qquad w = C \cdot \sqrt{g \cdot h}$$

Okazuje się przy tym, że wielkość bezwymiarowa C występująca we wzorach tego typu nie może być metodami analizy wymiarowej wyznaczona.

Analiza wymiarowa jako metoda jest zdumiewająco szybka i prosta, przy tym rozumowanie dotyczące strony fizycznej zachodzącego zjawiska jest nader skąpe i zazwyczaj ogranicza się do ustalenia, które z wielkości fizycznych mają wpływ na przebieg rozważanego zjawiska. Dalsze operacje prowadzące do wyniku końcowego są już tylko bardzo prostymi działaniami algebraicznymi, które można wykonać niemal automatycznie.

Ilość przykładów ilustrujących działania zwane analizą wymiarową jest spora, lecz właściwie pomija się zupełnie sprawę, na czym polega sam mechanizm działania, a więc istota analizy wymiarowej.

Spróbujmy jednak odpowiedzieć na to pytanie. W tym celu śladem entuzjastów analizy wymiarowej weźmy przykład zaczerpnięty z kinematyki. Będzie to jednak jeszcze prostszy przykład niż przytoczone uprzednio wzory:

Określić drogę l m przebytą w czasie t sec przez ciało poruszające się z prędkością w m/sek.

W celu określenia drogi jako funkcji prędkości i czasu zastosujemy metodę Rayleigha. Metoda ta jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Fouriera o jednorodności wymiarów równań ujmujących zjawisko fizyczne: wymiar wielkości znajdujących się po lewej stronie znaku równości musi być identyczny z wymiarem obowiązującym prawą stronę.

Jeżeli zatem założymy, że poszukiwana zależność

$$l = f(t,w)$$

da się przedstawić w postaci jednomianu

$$l = C \cdot w^{m_1} \cdot t^{m_2},$$

co jest jednym z postulatów analizy wymiarowej, to po wstawieniu odpowiednich wymiarów wielkości fizycznych dochodzimy do tożsamości dymensyjnej

$$L^1 \cdot T^0 = \left(\frac{L}{T}\right)^{m_1} \cdot T^{m_2}$$

stanowiącej podstawę metody Rayleigha.

Tożsamość powyższa wystąpi wówczas, gdy będą spełnione następujące równania:

dla wymiaru długości L: $m_1 = 1$,
dla czasu T: $-m_1 + m_2 = 0$.

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy bardzo prosty wynik

$$m_1 = m_2 = 1.$$

Oznacza to, że przebyta przez ciało droga jest proporcjonalna do iloczynu pierwszych potęg prędkości i czasu

$$l = C \cdot w \cdot t.$$

Prześledźmy teraz drogę, która doprowadziła do ostatecznego wyniku.

Punktem wyjścia był, jak łatwo zauważyć, wymiar prędkości wynikający z *definicji* tego pojęcia

$$w = \frac{l}{t} \text{ m/sec}$$

i to już wystarczyło do rozwiązania zadania.

Jak widzimy z tego przykładu, wymiar wielkości fizycznej (z pominięciem podstawowych pojęć danego układu) jest bezpośrednią konsekwencją jej definicji. Jeżeli to proste twierdzenie dałoby się jednoznacznie odwrócić, doszlibyśmy do wniosku, że biorąc pod uwagę wymiar danej wielkości fizycznej i wprowadzając go do obliczeń charakteryzujących analizę wymiarową uwzględniamy tym samym w całej rozciągłości jej definicję. Tak dzieje się w wypadku, gdy wprowadzamy najprostsze pojęcia wtórne, jak np. prędkość, przyspieszenie itp.

Przechodząc do bardziej skomplikowanych pojęć wielkości fizycznych, jak siła, współczynnik przewodzenia ciepła, ciepło właściwe, lepkość itp., nie trudno jest zauważyć, że wymiar tych wielkości jest już ściśle związany z pewnymi prawami fizyki. W ten sposób pisząc np., że wymiar siły jest identyczny z wymiarem iloczynu masy przez przyspieszenie — stosujemy milcząco drugie prawo Newtona, a w dalszym ciągu wszędzie, gdzie występuje tak określony wymiar siły, będzie milcząco zastosowane wspomniane prawo.

Zatem wymiar danej wielkości fizycznej zdradza jej podporządkowanie odpowiedniemu prawu fizyki. Na przykład wymiar współczynnika przechodzenia ciepła wynika z podstawowego prawa Fouriera dotyczącego przewodzenia ciepła. To samo można powiedzieć i o dynamicznym współczynniku lepkości, współczynniku wnikania ciepła i innych wtórnych wielkości fizycznych. We wszystkich tych wielkościach tkwią wymiary będące dowodem nierozerwalnej łączności danego pojęcia z jego definicją lub odpowiednim prawem fizyki.

Dalszy wniosek jest już oczywisty: wszelkie działania polegające na operacjach wymiarami są równoznaczne z milczącym zastosowaniem podstawowych praw lub definicji fizycznych, pod warunkiem jednak, że twierdzenie o pochodzeniu wymiaru danego pojęcia jest *jednoznacznie* odwracalne.

Widzimy zatem, na czym polega analiza wymiarowa.

Jeśli chodzi o samą czynność, to należy stwierdzić, że analiza wymiarowa zazwyczaj nie dostarcza jednoznacznych wyników lub też w ogóle nie prowadzi do rezultatu. Nie ma nigdy pewności co do poprawności otrzymanego wzoru, nawet w najprostszych przypadkach. Na przykład w otrzymanym uprzednio wzorze określającym przebytą przez ciało drogę, nie jest wiadoma wartość C, o której wiemy tylko tyle, że jest bezwymiarowa.

IV. Stosując wspomnianą poprzednio metodę Rayleigha otrzymujemy bardzo często za małą ilość równań niezależnych w stosunku do ilości niewiadomych. W takim właśnie przypadku analizy wymiarowej nie da się zastosować i zachodzi konieczność dostarczenia dodatkowych informacji o fizycznej stronie przebiegu zjawiska.

Przyczyną tych ujemnych właściwości może być tylko niepewność co do postulatu tkwiącego u źródeł samej metody.

Czyżby twierdzenie o przynależności wymiaru do odpowiedniego prawa fizycznego lub definicji było nie zawsze jednoznacznie odwracalne? Jeśli tak jest naprawdę, to jasne się staje, że analiza wymiarowa nie jest wolna od całego szeregu usterek lub nawet bardzo poważnych wad.

Zasługą M. W. Kirpiczewa jest zebranie i określenie najpoważniejszych usterek, tak charakterystycznych dla analizy wymiarowej. Jest rzeczą bardzo ważną poznać je dokładnie, dlatego przytaczamy je w pełnym brzmieniu za wspomnianym autorem [4]:

1. Analiza wymiarowa nie może dostarczyć danych o wielkościach bezwymiarowych.

2. Metody stosowane w analizie wymiarowej nie pozwalają rozróżnić wielkości o identycznych wymiarach, mających jednak różne znaczenie fizyczne.

3. Można popełnić omyłkę opuszczając wielkość, która ma istotny wpływ na przebieg zjawiska.

4. W równaniach opisujących zjawisko występują czasem wielkości stałe, lecz wymiarowane. Takie wielkości trudno wykryć za pomocą analizy wymiarowej.

5. Do analizy wymiarowej mogą być omyłkowo włączone wielkości nie mające związku z rozpatrywanym zjawiskiem.

6. Analiza wymiarowa nie uwzględnia warunków jednoznaczności zjawisk (do których zaliczamy również warunki brzegowe) i dlatego nie wprowadza jednoznaczników (monowalentów) w równania kryterialne (tzn. równania ujmujące zjawisko za pomocą bezwymiarowych kryteriów, np. $Nu = f\ (Re, Pr)$).

7. Analiza wymiarowa nie może zapewnić dotrzymywania dwu podstawowych wymogów teorii podobieństwa, a to:

a) uwzględnienia wszystkich równań określających zjawisko,

b) niewprowadzania żadnych równań nie mających związku z rozpatrywanym zjawiskiem.

Jak widać z powyższego zestawienia, analiza wymiarowa jest metodą szczególnego rodzaju, jest terenem zdradliwym i niebezpiecznym, wymagającym niezwykłej ostrożności i doświadczenia.

Pierwsza usterka jest zrozumiała: metoda oparta wyłącznie na działaniach wielkościami wymiarowymi nie może dostarczyć żadnych informacji w odniesieniu do wielkości bezwymiarowych. Stwierdziliśmy to już na możliwie najprostszym przykładzie przytoczonym poprzednio.

Jeśli chodzi o drugą usterkę, należy zauważyć, że wyjaśnia ją fakt niejednoznacznej odwracalności twierdzenia o związku wymiaru wielkości z prawem fizycznym lub definicji. Na przykład wymiar średnicy, promienia czy też odległości jest zawsze tylko wymiarem długości, którym operuje analiza wymiarowa, i dlatego po otrzymaniu rezultatu, czyli po zastosowaniu podstawowego postulatu tej metody, postulatu o odwracalności twierdzenia o związku wymiaru z definicją wielkości fizycznej nie wiadomo już, z jakim rodzajem długości mamy w istocie do czynienia w otrzymanym wzorze, szczególnie wówczas, gdy ów wymiar występuje w pewnej potędze.

Dla potwierdzenia słuszności punktu 2 weźmy przykład, który podaje Drobot na wstępie swej pracy o analizie wymiarowej: Silnik o mocy N napędza mieszarkę, której łopatki o średnicy D obracają się z prędkością kątową ω w cieczy o współczynniku dynamicznym lepkości η. Jak zależy prędkość kątowa η, N, D?

Na drodze analizy wymiarowej dochodzi się do wzoru

$$\omega = C \cdot \sqrt{\frac{N}{\eta \cdot D^3}},$$

z którego wynika, że moc użyta do napędu mieszarki jest proporcjonalna do trzeciej potęgi średnicy. Jednak, jak łatwo zauważyć, wchodzą tu w grę dwie odrębne średnice: średnica łopatki przyjęta w zadaniu oraz średnica koła opisywanego w czasie obrotu przez środek łopatki. Jeżeli tę ostatnią oznaczymy przez d, to w powyższym wzorze w miejsce D^3 można podstawić następujące wyrażenia

$$D^2 d, \quad D d^2, \quad d^3 \quad \text{i wreszcie} \quad D^a \cdot d^{3-a}.$$

Która z tych możliwości wchodzi w grę, nie można stwierdzić na drodze analizy wymiarowej.

Powyższy przykład również może posłużyć do ilustracji usterek wymienianych w punkcie 3 i 5, podanych przez Kirpiczewa. Działanie mieszarki cieczy zależy w wysokim stopniu od rodzaju ruchu, jaki występuje w rozpatrywanym zjawisku. Dla ruchu burzliwego, szczególnie przy dużych wartościach liczb Reynoldsa, wpływ lepkości jest znikomy [10]. Dzięki temu w rozpatrywanym przypadku można pominąć lepkość jako czynnik mało ważny, natomiast należy wprowadzić gęstość płynu, w którym wirują łopatki. Taki przypadek omówimy jeszcze później. Opuszczono więc tutaj czynnik istotny, jakim jest gęstość (punkt 3), wprowadzono zaś jako wielkość mającą znaczenie lepkość, której wpływ, jak wiemy, jest znikomy (punkt 5).

Otrzymany wzór byłby zatem aktualny tylko dla cieczy bardzo lepkich, w których nie mogą się wytworzyć wiry. Ale i dla ruchu czysto laminarnego wyprowadzony wzór nie jest także wolny od zastrzeżeń. Chodzi o to, że skoro istotą oporu, jaki stawia wirnik mieszarki, są naprężenia styczne spowodowane lepkością płynu, to w myśl odpowiedniego wzoru definiującego współczynnik lepkości dynamicznej

$$\sigma_t = \eta \cdot \frac{dw}{dx}$$

znanego pod nazwą wzoru Newtona, kierunek zmiany prędkości w jest mierzony prostopadle do kierunku przesunięcia dwu sąsiednich warstw cieczy. Wynika stąd, że do wzoru powinien wejść także wymiar długości prostopadły do kierunku ruchu cząstek mieszanego płynu, a więc powinno się uwzględnić dwie nowe długości: wymiary szczeliny utworzonej przez wirnik pomiędzy osłoną mierzone w kierunku poziomym i pionowym. Tu jednak analiza wymiarowa ostatecznie zawodzi, wchodzą bowiem w grę warunki jednoznaczności, do których zaliczają się następujące:

1) warunki geometryczne, określające kształt i wymiary ciał biorących udział w zjawisku,

2) fizyczne własności, określające cechy ciał i ośrodka (np. równanie ciągłości dla płynów, cecha nieściśliwości dla cieczy, równanie stanu dla gazów),

3) warunki brzegowe, określające zjawisko na granicach ciała,

4) warunki dotyczące czasu, gdy zjawisko jest nie ustalone w czasie.

W rozpatrywanym przypadku do warunków jednoznaczności zalicza się m. in. warunki brzegowe. Tych jednak w myśl punktu 6 analiza wymiarowa nie jest w stanie brać pod uwagę.

Dalsze wreszcie zastrzeżenie dotyczyłoby wielkości C istniejącej w otrzymanym wzorze. Nie ma najmniejszych podstaw do uznawania tej bezwymiarowej wielkości za stałą liczbę. Dla zilustrowania tego faktu weźmy pod uwagę nowy przykład:

„Określić natężenie przepływu ciepła od pręta do otoczenia w zależności od różnicy temperatur, przekroju pręta, jego obwodu, współczynników przewodzenia i wnikania ciepła".

Rozpoczynamy od ustalenia wymiarów poszczególnych wielkości fizycznych wchodzących w zakres badanego zjawiska:

Q^* kcal/h — natężenie przepływu ciepła,
F m^2 — powierzchnia przekroju pręta,
O m — długość obwodu pręta,
λ kcal/(m · h · 1°) — współczynnik przewodzenia ciepła w materiale pręta,

α kcal/(m$^2 \cdot$ h $\cdot$ 1°) — współczynnik wnikania ciepła od pręta do otoczenia,

Θ 1° — różnica temperatur pomiędzy prętem i otoczeniem.

Należy na drodze analizy wymiarowej znaleźć następującą zależność

$$Q^* = \mathrm{f}\,(F, O, \lambda, \alpha, \Theta).$$

W celu określenia poszukiwanej zależności ustalamy tożsamość dymensyjną

$$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}} = \left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m} \cdot 1^\circ \cdot \mathrm{h}}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m}^2 \cdot 1^\circ \cdot \mathrm{h}}\right)^{a_2} \cdot (\mathrm{m})^{a_3} \cdot (1^\circ)^{a_4}.$$

Tożsamość powyższa dostarcza następujących równań:

dla metrów: $-a_1 - 2a_2 + a_3 = 0,$
dla stopni: $-a_1 - a_2 + a_4 = 0,$
dla godzin: $-a_1 - a_2 = -1,$
dla kilokalorii: $a_1 + a_2 = 1.$

Ponieważ dwa ostatnie z otrzymanych równań są identyczne, zatem dysponujemy jedynie trzema niezależnymi równaniami, w których są 4 niewiadome. Łącząc ze sobą drugie i trzecie równanie otrzymujemy

$$a_4 = 1.$$

Oznacza to, że natężenie przepływu ciepła jest proporcjonalne do bliżej nie ustalonej różnicy temperatur. Jak widzimy, na drodze analizy wymiarowej otrzymaliśmy niewiele, po zupełnym bowiem wykorzystaniu powyższych równań otrzymamy już tylko zależność

$$-a_2 + a_3 = 1,$$

co łącznie z ostatnim równaniem dostarcza związku

$$a_1 + a_3 = 2.$$

Na tej drodze nie można otrzymać rozwiązania. Należy zastanowić się, dlaczego wynik tych działań jest taki nikły. Powróćmy więc do praw wyjściowych, które określają przebieg rozpatrywanego zjawiska. Są to prawa Fouriera

$$Q^*_x = -F \cdot \lambda \cdot \frac{d\Theta}{dx},$$

oraz Newtona

$$dQ^*_x = O \cdot \alpha \cdot \Theta \cdot dx.$$

Wprowadzając pojęcie oporu cieplnego przewodzenia

$$dR_\lambda = \frac{dx}{\lambda}$$

oraz oporu wnikania

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

można wspomniane prawa napisać w postaci

$$Q^*_\lambda = -F\frac{d\Theta}{dR_\lambda}; \quad dQ^*_\alpha = O\cdot\frac{\Theta}{R_\alpha}\cdot dx.$$

Jak łatwo się przekonać, wymiarowo ostatnie dwa równania są identyczne. Inaczej mówiąc, wymiary oporu cieplnego przewodzenia i oporu wnikania ciepła są wymiarowo identyczne, lecz różne pojęciowo. Mamy zatem w tym przypadku do czynienia z podaną przez Kirpiczewa usterką wymienioną w punkcie 2.

Dzięki wymnożeniu odpowiednieh wymiarów, występujących w obu wzorach, jednoznaczna odwracalność twierdzenia o związku wymiarów z przynależnym prawem fizyki przestała istnieć. Innymi słowy, *dla analizy wymiarowej* nie ma żadnej różnicy pomiędzy prawem Fouriera i prawem Newtona, jeśli napisać je w powyższej postaci.

Przez działania typowe dla analizy wymiarowej, polegające na odwróceniu twierdzenia o pochodzeniu wymiarów, podobne wymiarowo, lecz różne pojęciowo współczynniki przewodzenia ciepła i wnikania ciepła „pomieszały" się podczas mnożenia wymiarów i nie mogą być już na tej drodze rozdzielone.

Spróbujmy jednak ułożyć równania opisujące prawa Fouriera i Newtona w ten sposób, aby uniemożliwić wspomniane pomieszanie pojęć właściwe analizie wymiarowej. Jak widzimy, w pierwszym z tych równań figuruje iloczyn $F\cdot\lambda$ o wymiarze kcal · m/(1 °h), w drugim natomiast $O\cdot\alpha$ o wymiarze kcal/(m · 1° · h).

Gdyby każdy z powyższych iloczynów potraktować jako jedną wielkość fizyczną, mając na względzie to, że każdy z czynników wchodzących w skład iloczynu wywiera równorzędny wpływ na przebieg zjawiska — otrzymalibyśmy następującą tożsamość dymensyjną:

$$\frac{\text{kcal}}{\text{h}} = \left(\frac{\text{kcal}\cdot\text{m}}{1^\circ\cdot\text{h}}\right)^{b_1}\cdot\left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}\cdot 1^\circ\cdot\text{h}}\right)^{b_2}\cdot(1^\circ)^{b_3}.$$

Tożsamość powyższa jest spełniona, gdy da się rozwiązać następujący układ równań dla poszczególnych wymiarów:

dla metrów: $+b_1 - b_2 = 0,$

dla stopni: $-b_1 - b_2 + b_3 = 0.$

dla godzin: $-b_1 - b_2 = -1$,
dla kilokalorii: $b_1 + b_2 = 1$.

Ponieważ dwa ostatnie równania są identyczne, mamy układ trzech równań niezależnych o trzech niewiadomych. Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy następujący wynik:

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = 1.$$

Oznacza to, że poszukiwany wzór może być napisany w następującej formie:

$$Q^* = C \cdot \sqrt{(F \cdot \lambda) \cdot (O \cdot \alpha)} \cdot \Theta.$$

Mimo że postać wzoru jest na pozór poprawna, a nawet odpowiada rzeczywistej wartości dla przypadku, gdy długość pręta zdąża do nieskończoności, droga, na której otrzymaliśmy powyższy wynik, jest daleka od poprawności.

Chodzi mianowicie o to, że w wywodzie nie wzięliśmy pod uwagę długości pręta i jeśli traktować wielkość bezwymiarową C jako stałą, to z powyższego wzoru wynikałoby, że długość pręta L nie ma wpływu na natężenie przepływu ciepła od pręta do otoczenia. W rzeczywistości jest jednak inaczej, proste bowiem rozumowanie wykazuje, że im większa jest długość pręta L, tym większe jest natężenie przepływu ciepła. Należy zatem stwierdzić, czy wielkość bezwymiarowa C nie jest czasem funkcją pewnych wielkości bezwymiarowych, utworzonych ze zmiennych parametrów mających istotny wpływ na przebieg zjawiska.

Spróbujmy zatem zastosować tzw. teoremat Buckinghama, wynikający z twierdzenia tegoż autora, które znane jest pod nazwą: *twierdzenie* π. W myśl wspomnianego twierdzenia ilość kryteriów bezwymiarowych jest równa różnicy pomiędzy najmniejszą ilością zmiennych parametrów określających zjawisko i ilością niezależnych jednostek przyjętego układu.

W naszym przypadku mamy następujące parametry określające zjawisko

$$O, \alpha, F, \lambda, L, \Theta.$$

Natomiast ilość niezależnych jednostek układu wynosi 4:

m, h, kcal, 1°.

W myśl teorematu Buckinghama ilość bezwywiarowych kryteriów wynosiłaby zatem

$$6 - 4 = 2,$$

co nie jest zgodne z prawdą.

Błędem byłoby również traktować jednostki temperatury 1° i ciepła kcal jako jednostki zależne, wówczas bowiem ilość kryteriów wypadałaby 3, co jest jeszcze gorszym wynikiem niż poprzedni.

Pozostaje jeszcze jedna ewentualność czasami zalecana: złączyć bardzo zbliżone wymiarowo parametry w jedną grupę. W naszym przypadku tę grupę stanowiłyby długość L, obwód pręta O i powierzchnia F. W tym przypadku ilość kryteriów byłaby równa zeru, czyli wielkość bezwymiarowa C byłaby stałą (liczbą). Ponieważ i ten przypadek jako niezgodny z prawdą należy odrzucić, widzimy, że wciąż nie wiadomo nic o wyrażeniu C poza tym, że jest ono bezwymiarowe.

Należy zatem wywód wzoru przeprowadzony poprzednio anulować, wprowadzić długość pręta L jako wielkość mającą istotny wpływ na przebieg rozpatrywanego zjawiska i rozwiązać nowy układ równań wynikający z tożsamości wymiarowej. W tym przypadku jednak okazałoby się, że mamy za mało równań dla wyznaczenia niewiadomych.

Po raz drugi analiza wymiarowa wpędziła nas w ślepą uliczkę.

Dzięki nieodwracalności (lub niejednoznacznej odwracalności) twierdzenia o pochodzeniu wymiarów wielkości fizycznych działania stanowiące istotę analizy wymiarowej, a polegające na przejściu od wymiarów rozpatrywanych wielkości do właściwej postaci wzoru fizycznego, który wyraża pewne prawo fizyki, nie doprowadzają do poprawnych wyników, szczególnie gdy w grę wchodzą wielkości różne, lecz identyczne wymiarowo (L, O) lub prawa fizyki określające tę samą wymiarowo wielkość (w naszym przypadku prawa Fouriera i Newtona).

Jedynym poprawnym wyjściem jest przeprowadzić do końca wywód matematyczny oparty na rozwiązaniu zależności wynikających z praw Fouriera, Newtona i I zasady termodynamiki, zastosowanych do rozpatrywanego przypadku.

Wywód matematyczny prowadzi do rozwiązania liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu [6]. W całce ogólnej tego równania figurują dwie stałe całkowania, które łatwo jest wyznaczyć z warunków brzegowych. Ponieważ w myśl punktu 6 zestawienia Kirpiczewa analiza wymiarowa nie uwzględnia warunków brzegowych, staje się jasne, dlaczego nie można było poprzednio dojść do poprawnego wyniku przy określaniu kwestii zmienności czy stałości wartości C.

Ostateczne rozwiązanie tego zadania (dla przypadku ruchu ustalonego oraz po przyjęciu pewnych założeń upraszczających) ma postać

$$Q^* = \sqrt{F \cdot \lambda \cdot O \cdot \alpha} \cdot \Theta \cdot \mathrm{tgh}(A \cdot L),$$

gdzie

$$A = \sqrt{\frac{O \cdot \alpha}{F \cdot \lambda}}.$$

Jak widzimy, bezwymiarowa wielkość C nie jest stała, lecz zależy od O, α, F, λ, L, a zatem od wszystkich z wyjątkiem temperatury wielkości, określających rozpatrywane zjawisko.

Ponieważ charakter funkcji tgh x jest tego rodzaju, że dla x zdążających do nieskończoności funkcja tgh x zdąża do jedności, zatem dla pręta nieskończenie długiego bezwymiarowa wielkość C jest stała i wynosi 1.

Przy rozwiązywaniu powyższego zadania na drodze analizy wymiarowej, nie ma najmniejszych logicznych przesłanek na to, aby długość pręta L umieścić wyłącznie w bezwymiarowej wielkości C, a obwód pręta O zarówno w wielkości C, jak i w dalszej części wzoru, tzn. w jednomianie potęgowym.

Ogólnie biorąc zachodzi obawa, że najpewniejsze wyniki na drodze analizy wymiarowej osiągamy wówczas, gdy mamy przed sobą gotowy wzór wyprowadzony na innej, bardziej przekonywającej drodze.

Wniosek powyższy jest słuszny tylko dla takich przypadków, w których zjawisko fizyczne jest określone za pomocą dwu odrębnych praw określających tę samą wymiarowo wielkość. Takimi są właśnie prawa Fouriera i Newtona.

Dla potwierdzenia powyższego rozpatrzymy jeszcze jeden przykład z dziedziny hydromechaniki:

„Określić moc mechaniczną, niezbędną do pokonania oporów, powstałych podczas wirowania tarczy w płynie".

Ustalamy początkowo wielkości fizyczne mające wpływ na przebieg zjawiska oraz ich wymiary:

moc	— N	wymiar	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$
gęstość płynu	— γ	„	$M \cdot L^{-3}$,
lepkość płynu	— η	„	$M \cdot T^{-1} \cdot L^{-1}$,
prędkość kątowa	— n_0^*	„	T^{-1},
średnica tarczy	— D	„	L

Chodzi o znalezienie zależności

$$N = f(\gamma, \eta, D, n_0^*).$$

Warunek jednorodności wymiarowej wymaga, aby była spełniona następująca tożsamość dymensyjna:

$$\mathrm{M} \cdot L^2 \cdot T^{-3} = L^{m_1} \cdot (\mathrm{M} \cdot L^{-3})^{m_2} \cdot (\mathrm{M} \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{m_3} \cdot (T^{-1})^{m_4}.$$

Tożsamość powyższa będzie spełniona, gdy będą słuszne równania:

dla długości $L : 2 = m_1 - 3\, m_2 - m_3$
dla masy $\mathrm{M} : 1 = m_2 + m_3$,
dla czasu $T : -3 = -m_3 - m_4$.

Jak widzimy z powyższego, dysponujemy jedynie trzema równaniami niezależnymi o czterech niewiadomych, co uniemożliwia rozwiązanie zadania na drodze analizy wymiarowej.

Łatwo jednak przekonać się, że układ ten będzie miał jednoznaczne rozwiązania, gdy pominąć wpływ np. lepkości, tzn. położyć $m_3 = 0$.

Taki przypadek wystąpi dla dużych wartości liczb Reynoldsa, wówczas bowiem wpływ lepkości płynu jest znikomy [10].

Rozwiązaniami układu będą wówczas wartości

$$m_2 = 1, \qquad m_1 = 5, \qquad m_4 = 3.$$

Poszukiwana zależność przyjmuje postać [9].

$$N = C \cdot D^5 \cdot (n_o^*)^3 \cdot \gamma.$$

Otrzymany wynik potwierdza doświadczenie. W dziale dotyczącym budowy turbin znany jest dobrze wzór Stodoli określający tzw. straty tarcia i wentylacji tarczy wirnikowej obracającej się w atmosferze pary wodnej [6], [9].

$$N = \alpha \cdot [1{,}46 \cdot D^2 + 0{,}83 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot D \cdot l^{1,5}] \cdot \left(\frac{u}{100}\right)^3 \cdot \gamma.$$

We wzorze tym poza znanymi wielkościami oznaczają:

α — bezwymiarową wielkość zależną od stanu pary i ewentualnej zawartości wilgoci,

ε — bezwymiarową wielkość (stopień zasilania) zależną od obciążenia oraz od konstrukcji turbiny,

l — długość łopatki,

u — prędkość obwodową wirnika.

Przytoczony wzór określa jednocześnie dwie straty. Pierwsza z nich, strata tarcia wirnika o gaz, jest określona za pomocą pierwszego wyrażenia w nawiasie graniastym. Jak widzimy, strata tarcia jest proporcjonalna do iloczynu $D^2 \cdot u^3 \cdot \gamma$, ponieważ jednak

$$u = \pi \cdot D \cdot n_o^*,$$

zatem strata ta jest proporcjonalna do iloczynu $D^5 \cdot n_o^{*3} \cdot \gamma$. Wynik ten jest identyczny z otrzymanym na drodze analizy wymiarowej.

Druga część wzoru Stodoli określa tzw. straty „wentylacji", spowodowanej przez łopatki wirujące w atmosferze pary. Zjawisko to jest równoznaczne z mieszaniem pary i dlatego wiąże się z poprzednio rozważanym przykładem mieszarki. Zasadą działania mieszarki jest wytworzenie wirów, wiadomo bowiem jeszcze od czasów doświadczeń Reynoldsa, że ruch laminarny nie powoduje mieszania.

Wzór Stodoli jest słuszny dla przypadku tarczy wirującej w nieograniczonym ośrodku. Osłona turbiny powoduje zmniejszenie tych strat dzięki temu, że w tych przypadkach zmieniają się warunki brzegowe, których analiza wymiarowa zgodnie z punktem 6 nie jest w stanie respektować.

Wracając do rozpatrywanego przykładu, załóżmy teraz inny przypadek. Dla małych wartości liczb Reynoldsa charakter ruchu ulega zasadniczej zmianie: wiry znikają, przepływ staje się laminarny i ustala się w czasie. W tym przypadku wpływ gęstości ośrodka zanika, a istotę oporów stanowią siły lepkości. Należy zatem położyć teraz

$$m_2 = 0 \quad \text{oraz} \quad m_3 \neq 0.$$

Po rozwiązaniu układu równań dymensyjnych otrzymamy wynik

$$N = C \cdot D^3 \cdot (n_o^*)^2 \cdot \eta .$$

Wynik ten, jak łatwo zauważyć, pokrywa się ze wzorem

$$\omega = C \cdot \sqrt{\frac{N}{\eta \cdot D^3}}$$

otrzymanym poprzednio dla przypadku mieszarki, prędkość bowiem kątowa ω jest identyczna z n^*_o. Jeszcze jeden przykład potwierdzający fakty omyłek tak częste dla analizy wymiarowej: otrzymany wzór określający warunki działania mieszarki nie jest słuszny dla zjawiska mieszania.

Należy jednak bezstronnie stwierdzić, że winą w tym przypadku nie można obarczać analizy wymiarowej, każda bowiem metoda da złe wyniki przy przyjęciu błędnych założeń.

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia kwestia, dlaczego zadanie staje się nierozwiązalne za pomocą analizy wymiarowej, gdy założymy równorzędność wpływu lepkości i gęstości.

Wpływ gęstości ośrodka jest zrozumiały w przypadku istnienia wirów, wówczas bowiem przyczyną oporu ośrodka, w którym wiruje tarcza, są siły bezwładności przyspieszanego przez wirnik płynu. Wielkość tych sił określa drugie prawo Newtona, w myśl którego siła jest proporcjonalna do iloczynu masy i przyspieszenia. Ponieważ w działaniach związanych z zastosowaniem analizy wymiarowej znajdują się wymiary takich wielkości jak masa i moc, jest więc respektowane prawo Newtona, które stanowi pomost przy przejściu od masy do siły, a następnie od siły do pracy i mocy. Lecz oprócz sił bezwładności wystąpią w tym przypadku również i siły spowodowane lepkością ośrodka określone wzorem

$$K_\tau = F \cdot \sigma_\tau = \eta \cdot \frac{dw}{dx} \cdot F$$

Mamy zatem do czynienia z dwoma odrębnymi prawami określającymi tę samą wielkość fizyczną (siłę). Jak wiemy z przykładu transportu ciepła w pręcie, analiza wymiarowa nie jest w stanie uwzględnić obu takich praw jednocześnie, metoda ta bowiem jest „czuła” tylko na wymiary, a w żadnym przypadku nie na sens fizyczny praw przyrody.

V. Jeżeli zjawisko podlega jeszcze nie wykrytemu prawu, analiza wymiarowa jest całkowicie bezsilna. Wnosi ona jedynie i to nie zawsze w całości, tylko to, co już fizyka posiada i nic więcej. Jeżeli zatem stosujemy analizę wymiarową do zjawiska dotąd nie poznanego dokładnie, to rezultat może być pozytywny tylko wówczas, gdy zjawisko podlega znanym prawom, a szczęśliwym zbiegiem okoliczności dobierze się takie wielkości fizyczne określające jego przebieg, które wynikają z praw rządzących owym zjawiskiem.

Dlatego właśnie w takich przypadkach intuicja i wyczucie przebiegu fizycznej strony zjawiska są niezbędne.

Analiza wymiarowa prowadzi z reguły na manowce, gdy nie doceniamy fizycznej strony zjawiska lub nie bierzemy jej w dostatecznej mierze pod uwagę. Weźmy przykładowo teoremat Buckinghama, na którym w ostatnich czasach często opierają się autorowie nowszych dzieł.

Kirpiczew w swej pracy pt. *Analiza wymiarowa* [4] poświęca tej sprawie parę słów. W myśl tego teorematu ilość kryteriów bezwymiarowych, dostatecznie opisujących zjawisko, jest równa różnicy pomiędzy ilością parametrów określających zjawisko a ilością niezależnych wymiarów użytego układu jednostek. Jednak Kirpiczew wykazał, że teoremat ten nie zasługuje właściwie na nazwę teorematu, jest to bowiem przyjęcie lub założenie sprawdzające się tylko w pewnych szczególnych przypadkach. Na szczegółowym przykładzie, dotyczącym wymiany ciepła pomiędzy ścianką rury i płynem, Buckingham ilustruje swój wywód. Kirpiczew wykazał na tym samym przykładzie, że Buckingham popełnił dwie omyłki: pierwsza polega na wprowadzeniu czterech kryteriów w miejsce trzech dostatecznie opisujących zjawisko, druga — na zaniedbaniu liczby Reynoldsa w przypadku ruchu burzliwego [4]. Ponadto przykład ten jest dowodem błędności założenia, że bezwymiarowe kryterium może posiadać tylko jedną wtórną wielkość fizyczną (za wtórne wielkości Buckingham uważa takie parametry, jak: współczynniki wnikania i przewodzenia ciepła, dynamiczny współczynnik lepkości, ciepło właściwe). Kirpiczew wytyka ten błąd podając przykład kryterium (Nusselta), które zawiera dwie wtórne wielkości. Przykład ten, jak podkreśla Kirpiczew, wykazuje jednocześnie błędność wywodu drugiego teorematu podobieństwa opartego na takim błędnym założeniu.

Dobrym przykładem na niewłaściwe podejście do analizy wymiarowej jest tzw. paradoks Riabouschinskiego. Przekonywujące wyjaśnienie tego paradoksu jest zasługą T. A. Afanassjewej-Ehrenfest. Niestety, praca tej uczonej nie jest dostatecznie znana i w tym tylko należy szukać przyczyny, że mimo upływu tylu lat od jej ogłoszenia (1925 r.) wielu autorów bezskutecznie łamie sobie głowę nad wyjaśnieniem domniemanego paradoksu.

W artykule ogłoszonym w 1915 r. Rayleigh rozważa następujące zadanie [4], [8]: Ciało stałe określonego kształtu jest omywane strumieniem cieczy. Temperatury ciała t_0 i cieczy $t > t_0$ są to niezmienne. Należy określić natężenie przepływu ciepła od cieczy do ciała.

Na przykładzie tym Rayleigh demonstruje swoją metodę, z którą już zapoznaliśmy się poprzednio. Wskutek pominięcia bardzo istotnego wpływu lepkości cieczy uczony ten otrzymuje wzór niekompletny w postaci

$$Nu = f\,(Pe)$$

We wzorze powyższym brakuje kryterium Reynoldsa, które wystąpi dopiero po wprowadzeniu kinematycznego współczynnika lepkości.

Wkrótce po ogłoszeniu artykułu Rayleigha Riabouschinsky [4] zakwestionował otrzymany wynik twierdząc, że jeśli wyrugować z wzoru otrzymanego przez Rayleigha temperaturę i wyrazić ją za pomocą średniej kinetycznej energii drobin otrzymuje się zależność

$$Nu = f\,(Pe,\, cl^3).$$

Jak widać, wchodzi teraz w grę nowa wielkość $c \cdot l^3$, wskutek czego rozpatrywane zjawisko jest mniej określone niż poprzednio.

Zatem uwzględnienie teorii kinetycznej ciepła miałoby dawać wzór mniej określony, bo zależny od dwu zmiennych, a nie od jednej, jak to było wówczas, gdy temperaturę traktowało się jako wielkość pierwotną (niezależną od innych).

Na tym właśnie polega paradoks Riabouschinskiego.

Nad paradoksem tym toczyła się przez wiele lat jałowa dyskusja. Dopiero praca Afanassjewej-Ehrenfest wyjaśniła go całkowicie.

Oto co pisze w tej sprawie Kirpiczew:

„Z punktu widzenia teorii podobieństwa omyłka Riabouschinskiego jest oczywista, naruszył on bowiem obydwa podstawowe prawa teorii podobieństwa (przypadek 7). Riabouschinsky w równaniach matematycznych ujmujących zjawisko, temperaturę wyraził za pomocą średniej energii kinetycznej drobin, tj za pomocą wielkości (prędkości molekularnej, masy drobinowej), których nie spotyka się w żadnych z równań matematycznych określających to zjawisko (naruszenie punktu 7b). W związku z tym w równaniu Riabouschinskiego występuje dodatkowy wskaźnik podobieństwa. Nie ma żadnych podstaw, aby w równaniu dymensyjnym wiązać ze sobą wielkości tego samego wymiaru, lecz mające różne znaczenia, jak prędkość płynu i prędkość molekularna drobin".

VI. Przytoczone wywody wykazują konieczność wielkiej ostrożności w zastosowaniu analizy wymiarowej. W świetle powyższych rozważań nasuwa się nawet pytanie, czy poza zakresem specjalnych prac badawczych należy ją stosować, skoro w metodzie tej jest tak duże prawdopodobieństwo popełnienia błędu.

Czy wolno na przykład stosować tę metodę tam, gdzie są znane i wielokrotnie doświadczalnie sprawdzone piękne wywody oparte są na zrozumieniu i odpowiedniej interpretacji praw fizycznych?

Wywód oparty na analizie wymiarowej jest zazwyczaj wielokrotnie krótszy od właściwego wywodu fizycznego, nie rzuca jednak właściwego światła na przebieg rozpatrywanego zjawiska. Dlatego **stosowania analizy wymiarowej jako metody dydaktycznej nie można zalecać.** Wnosi ona bowiem dodatkowe szkody obniżając poziom wykładu i skłania uczących się do stosowania wygodnej łatwizny kosztem właściwego zrozumienia istoty zjawiska.

W zakończeniu swej pracy o analizie wymiarowej Kirpiczew pisze:

„Tylko metoda analizy równań matematycznych ujmujących zjawisko może dać całkowicie pewne rezultaty. Dlatego mając do wyboru obie metody (analizę wymiarową oraz analizę równań matematycznych wynikających z praw fizyki) należy tej ostatniej właśnie dać pierwszeństwo. Jednakże, jeżeli równania matematyczne ujmujące zjawisko nie są znane, z dwu metod pozostaje tylko jedna — analiza wymiarowa. Stosując jednak tę metodę, nie należy zapominać, że otrzymane wyniki nie są całkowicie pewne, i należy szukać ich potwierdzenia na drodze eksperymentalnej lub teoretycznej".

Analiza wymiarowa powinna być zatem przede wszystkim narzędziem (nie jedynym zresztą) w rękach badacza, powinna być stosowana w instytutach naukowych, laboratoriach, pracowniach, słowem, w specjalnych zakładach badawczych. Zastosowana natomiast w dydaktyce jako metoda wyprowadzania znanych wzorów przynosi wręcz opłakane skutki, powodując zwykle zamiast wyjaśnienia przedmiotu — powstawanie coraz nowych wątpliwości i nieporozumień.

Otrzymano 15 maja 1955 r.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Ciborowski, *Inżynieria chemiczna*, cz. II, Warszawa 1953, PWT.
[2] S. Drobot, *O analizie wymiarowej*, PAN, Zastosowania matematyki, tom I, 1954, zeszyt 4.
[3] T. Hobler, *Ruch ciepła i wymienniki*, Warszawa 1953, PWT.
[4] М. В. Кирпичев: Анализ размерности. И.А.Н., СССР, О.Т.Н. 9, 1954.
[5] М. В. Кирпичев и П. К. Конаков: Математические основы теории подобия, А. Н., СССР, Москва 1949.

[6] St. Ochęduszko, *Teoria maszyn cieplnych*, cz. II 1953, cz. III 1955, Warszawa PWT.
[7] Дж. Робертс: Теплота и Термодинамика. Гос. Издат. Техн.-Теор. Лит., Москва-Ленинград 1950.
[8] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике. Гос. Издат. Техн.-Теор. Лит., Москва 1954.
[9] A. Stodola. *Damf- u. Gasturbinen*, Berlin 1924, str. 163.
[10] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna* t. II, Warszawa 1954 PWT.

[6] St. Ochęduszko, *Teoria maszyn cieplnych*, cz. II 1953, cz. III 1955, Warszawa PWT.

[7] Дж. Робертс: Теплота и Термодинамика. Гос. Издат. Техн.-Теор. Лит., Москва-Ленинград 1950.

[8] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике. Гос. Издат. Техн.-Теор. Лит., Москва 1954.

[9] A. Stodola. *Damf- u. Gasturbinen*, Berlin 1924, str. 163.

[10] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna* t. II, Warszawa 1954 PWT.