ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 14 Energetyka z. 2 1957

Witold Około-Kułak

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

Wymiana ciepła przez promieniowanie w układzie trzech powierzchni doskonale szarych w ośrodku diatermicznym

Przedmiotem rozważań w niniejszym artykule jest wymiana ciepła przez promieniowanie pomiędzy trzema powierzchniami nie zamykającymi sobą przestrzeni. W oparciu o bilans energetyczny wyprowadzono podstawowe zależności pomiędzy tzw. jasnościami tych powierzchni i stosunkami opromieniowania. Podano metodę obliczania energii cieplnej wymienionej przez promieniowanie pomiędzy dwiema dowolnymi spośród trzech powierzchni układu. Wywody wyjaśniono przykładami.

1. Wstęp

Przypadek wymiany ciepła przez promieniowanie pomiędzy trzema powierzchniami o różnych temperaturach jest bez porównania częściej spotykany w praktyce aniżeli o wiele prostszy przypadek wymiany energii promienistej pomiędzy tylko dwiema powierzchniami [1], [2].

Układ trójpowierzchniowy zamykający całkowicie przestrzeń został opracowany z punktu widzenia wymiany energii promienistej przez Ju. A. Surinowa [5]. Droga, po której ten uczony dochodzi do ostatecznych wyników, prowadzi poprzez układy równań całkowitych liniowych, opisujących podstawowe prawa promieniowania.

W pracy niniejszej będzie omówiony przypadek nieco ogólniejszy, a mianowicie gdy powierzchnie nie stykają się ze sobą, przy tym w celu udostępnienia wywodów szerokiemu ogółowi techników środki matematyczne będą dostosowane do poziomu wiedzy z dziedziny matematyki zawodowego inżyniera.

Układ złożony z trzech powierzchni, z których żadna nie jest wklęsła, o wyrównanych temperaturach T_1, T_2, T_3 °K, nie zamykających sobą przestrzeni, będziemy dla uproszczenia w dalszym ciągu nazywali układem trójpowierzchniowym otwartym.

W odróżnieniu od układu zamkniętego, tj. takiego, w którym powierzchnie stykając się ze sobą szczelnie zamykają przestrzeń, układ trójpowierzchniowy otwarty traci energię promieniowania, która bezpośrednio

lub w wyniku odbić wielokrotnych od trzech rozważanych powierzchni opuszcza układ poprzez luki między powierzchniami i nie może już do niego powrócić.

Oba układy trójpowierzchniowe: otwarty i zamknięty są z punktu widzenia wymiany energii przez promieniowanie niewspółmiernie bardziej

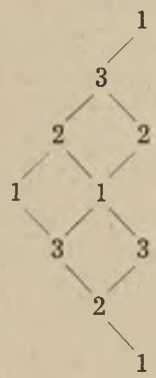
Rys. 1. Układ trójpowierzchniowy otwarty

skomplikowane niż układ dwupowierzchniowy. Przyczyną tego jest niezliczona ilość dróg, którymi promienie mogą przebiegać, odbijając się kolejno od poszczególnych płaszczyzn.

W układzie dwupowierzchniowym zamkniętym, w którym żadna z powierzchni nie jest wklęsła, istnieje tylko jedna droga

1 — 2 — 1 — 2 — 1 — . . .itd. [1]

Natomiast w układach trójpowierzchniowych zamkniętych każde odbicie wiązki promieni wnosi dwie możliwości



. . . itd. [2]

Jak widać z powyższego schematu, po trzech kolejnych odbiciach istnieje już osiem możliwych dróg wędrówki promieni.

W wyniku n odbić istniałoby 2^n odrębnych dróg. Ponieważ należy wziąć pod uwagę nieskończenie wielką ilość kolejnych odbić, powstaje

[1] Przez cyfry 1, 2 należy rozumieć powierzchnie F_1, F_2.
[2] Przez cyfry 1, 2 ,3 należy rozumieć powierzchnie F_1, F_2, F_3.

poważna trudność w postaci nieskończonej ilości możliwych i różnych dróg wiązki promieni.

W układach otwartych kwestia powyższa jeszcze bardziej komplikuje się z powodu możliwości rozproszenia energii promieniowania poza obręb układu.

Według Ju. A. Surinowa istnieją następujące metody rozwiązywania zagadnień promieniowania:

1. Metoda odbić wielokrotnych,
2. Metoda opromieniowania,
3. Metoda jasności,
4. Metoda strumieni całkowitego promieniowania.

Metoda odbić wielokrotnych w przypadku układu trójpowierzchniowego nie nadaje się do zastosowania. Spośród pozostałych trzech zastosujemy metodę jasności.

Metoda jasności polega na ustaleniu wzajemnych zależności pomiędzy tzw. jasnościami powierzchni oraz stosunkami opromieniowania. Przez jasność J powierzchni należy rozumieć sumę wszystkich promieni opuszczających rozważaną powierzchnię. Będzie to zatem suma emisji własnej powierzchni E_i i wszystkich promieni odbitych od rozważanej powierzchni [4].

Metoda jasności prowadzi do układu zwykłych liniowych równań algebraicznych, jednakże pod warunkiem przyjęcia pewnych założeń upraszczających.

2. Założenia upraszczające

Przypadek wymiany ciepła w układzie trójpowierzchniowym rozwiążemy po przyjęciu następujących założeń upraszczających:

A. Powierzchnie F_1, F_2, F_3 są doskonale szare i jednorodne.

B. Powierzchnie ściśle podlegają prawu Lamberta.

C. Powierzchnie są izotermiczne.

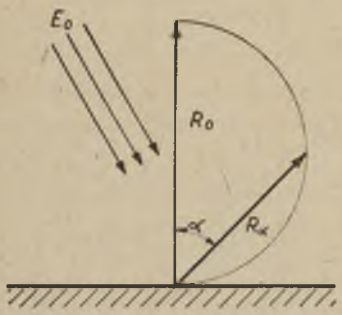
D. Lokalne stosunki opromieniowania w dowolnych kombinacjach dwu par spośród trzech powierzchni są niezmienne.

E. Promieniowanie rozproszone poza układem nigdy nie wraca już do niego z powrotem.

ad A. Przez powierzchnie doskonale szare rozumiemy takie powierzchnie, które w identyczny sposób odbijają, pochłaniają i rozpraszają promieniowania o każdej długości fali. Cechą zasadniczą powierzchni doskonale szarych będzie zatem warunek A_λ = idem, R_λ = idem. W konsekwencji absorpcyjność A oraz refleksyjność R powierzchni doskonale szarych również nie jest zależna od temperatury. Mimo bowiem zależności

intensywności promieniowania (zgodnie z prawem Plancka) od temperatury stosunek energii promieniowania odbitego do padającego będzie taki sam dla całego obszaru widma jak i dla elementarnego wycinka $d\lambda$, ponieważ dla każdego z tych wycinków wielkości A_λ i R_λ są takie same.

Warunek jednorodności danej powierzchni zapewnia dodatkowo spełnienie powyższego warunku dla całego obszaru rozpatrywanej dowolnej powierzchni F_i. Oznacza to, że powierzchnia F_i nie może składać się np. z kilku powierzchni doskonale szarych, lecz różnorodnych.



Rys. 2. Promieniowanie odbite od powierzchni powinno podlegać zgodnie z założeniem prawu Lamberta. E_0 — energia opromieniowania powierzchni; R_0 — promieniowanie odbite w kierunku normalnym; R_α — promieniowanie odbite w kierunku tworzącym kąt α z normalnym.

ad B. Zgodnie z prawem Lamberta tzw. emisja kierunkowa $\overline{E_\alpha}$ oraz emisja o kierunku normalnym do powierzchni $\overline{E_0}$ spełniają następującą zależność:

$$\overline{E_\alpha} = \overline{E_0} \cdot \cos \alpha \tag{1}$$

Znaczenie emisji kierunkowej będzie podane w dalszej części, dotyczącej pojęć zasadniczych.

Jeżeli wiązka promieniowania padająca pod dowolnym kątem na rozważaną powierzchnię jest częściowo odbijana i rozpraszana w ten sposób (rys. 2), że rozproszenie kierunkowe $\overline{R_\alpha}$ spełnia analogiczną do poprzedniej zależność

$$\overline{R_\alpha} = \overline{R_0} \cdot \cos \alpha \,, \tag{1a}$$

wówczas uważamy, że powierzchnia podlega ściśle prawu Lamberta.

Należy podkreślić, że warunek określony równaniem (1a) jest trudniejszy do zrealizowania niż warunek zastrzeżony równaniem (1).

ad C. Każda z powierzchni układu powinna mieć wyrównaną temperaturę. Niejednostajności temperatury powierzchni mogą mieć przyczynę w nierównomiernym doprowadzaniu ciepła do powierzchni przez przewodzenie lub też mogą być spowodowane nierównomiernym natężeniem opromieniowania. Ta ostatnia przyczyna znika, jeżeli dowolny element pozostałych dwu powierzchni wysyła promieniowanie o jednakowym natężeniu na każdy z elementów rozpatrywanej powierzchni lub na całą roz-

patrywaną powierzchnię F_i. Warunek ten ściśle wiąże się z założeniem upraszczającym D.

ad D. Jeśli powierzchnie podlegają prawu Lamberta, to warunek niezmienności lokalnych stosunków opromieniowania jest ściśle spełniony tylko dla nielicznych układów, np. dla układu powierzchni leżących na wspólnej wewnętrznej powierzchni kulistej [3]. Taki układ odznacza się właściwością nader ciekawą: stosunek konfiguracji

$$\varphi_{1-2} = \frac{F_2}{F_0},$$

(gdzie F_0 m^2 oznacza powierzchnię kuli), jest najzupełniej niezależny od wielkości i położenia powierzchni F_1 [3]. Zatem wspomniany stosunek będzie taki sam zarówno dla skończonej wartości F_1, jak i dla elementarnej dF_1. Ten ostatni jednak nazywamy lokalnym stosunkiem konfiguracji.

$$\varphi_{d_1-2}$$

i określamy za pomocą wzoru (2).

Po przyjęciu założenia, że rozpatrywane powierzchnie nie są wklęsłe, warunek ten nie może być ściśle spełniony.

Jeżeli jednak powierzchnie nie są zbyt blisko siebie położone, to odstępstwo spowodowane nieznaczną zmiennością lokalnych stosunków konfiguracji prawdopodobnie nie będzie miało zbyt dużego wpływu na wynik obliczeń.

ad E. Założenie, iż promieniowanie rozproszone poza układ nie wraca do niego z powrotem, jest równoznaczne z przyjęciem, że układ trójpowierzchniowy jest otoczony szczelną, doskonale czarną osłoną o temperaturze 0 °K.

3. Pojęcia zasadnicze oraz ważniejsze oznaczenia

Ośrodek diatermiczny jest to taki ośrodek, który nie emituje ani nie absorbuje promieni cieplnych.

Oznaczenia:

E_1, E_2, E_3 kcal — emisje własne powierzchni F_1, F_2, F_3;

Q_{1-2}, Q_{2-3}, Q_{1-3} kcal — energie cieplne wymienione przez promieniowanie pomiędzy powierzchniami: F_1 i F_2, F_2 i F_3, F_1 i F_3;

J_1, J_2, J_3 kcal — jasność powierzchni F_1, F_2, F_3,

$E_{0,i}$ kcal — suma energii promienistych, padających na rozważaną powierzchnię F_i;

A_i — absorpcyjność (stosunek pochłaniania) powierzchni F_i;

R_i — refleksyjność (stosunek odbijania) powierzchni F_i;

φ_{i-k} — stosunek opromieniowania pomiędzy powierzchniami F_i oraz F_k. Jest to stosunek energii, która wychodzi z powierzchni F_i i pada na powierzchnię F_k do całkowitej emisji energii opuszczającej powierzchnię F_i.

Wielkość tę, w przypadku gdy powierzchnie podlegają prawu Lamberta, nazywamy *stosunkiem konfiguracji* i jest ona zależna jedynie od wzajemnego położenia obu powierzchni w przestrzeni;

φ_{di-k} — lokalny stosunek opromieniowania pomiędzy elementarną powierzchnią dF_i oraz powierzchnią F_k. Wielkość tę po zastosowaniu prawa Lamberta nazywamy lokalnym stosunkiem konfiguracji. Lokalny stosunek konfiguracji jest określony wzorem

$$\varphi_{di-k} = \frac{1}{\pi} \int_{F_2} \frac{\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2}{\varrho^2} \cdot dF_2 . \tag{2}$$

Zasady, prawa i zależności zastosowane w dalszych wywodach:

1. Zasada wzajemności [3], [1]

$$F_1 \cdot \varphi_{1-2} = F_2 \cdot \varphi_{2-1} . \tag{3}$$

2. Zasada zamkniętości [3]

$$\varphi_{1-1} + \varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \ldots + \varphi_{1-n} = 1 . \tag{4}$$

3. Prawo Kirchhoffa: z którego wynika dla każdej powierzchni F_i związek

$$\varepsilon_i = A_i . \tag{5}$$

4. Zależność pomiędzy absorpcyjnością i refleksyjnością powierzchni nieprzezroczystej (nie przepuszczającej promieniowania)

$$A + R = 1 . \tag{6}$$

5. Prawo Stefana Boltzmanna

$$\frac{E^*}{F} = e^* = \varepsilon \cdot C_c \cdot \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 . \tag{7}$$

4. Wymiana energii promienistej w układzie trójpowierzchniowym otwartym, o powierzchniach niewklęsłych

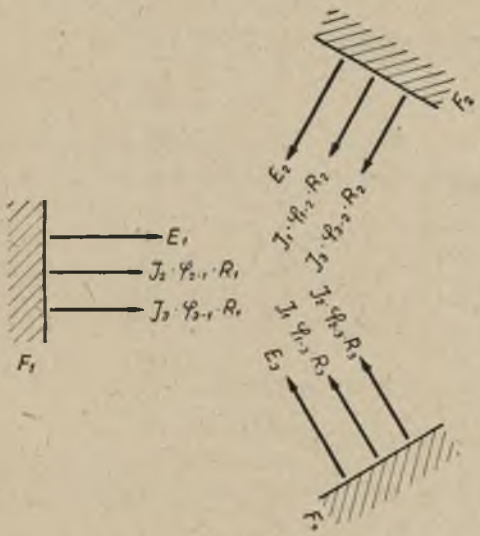
Dany jest układ trójpowierzchniowy, którego własności zgodne są z założeniami A — E (rys. 3).

Zgodnie z definicją pojęcia jasności J jako sumy emisji własnej i wszystkich promieni odbitych od rozważanej powierzchni, możemy utworzyć trzy równania określające jasności J_1, J_2, J_3 powierzchni F_1, F_2 F_3

$$
\begin{aligned}
J_1 &= E_1 + R_1 (J_2 \cdot \varphi_{2-1} + J_3 \cdot \varphi_{3-1}), \\
J_2 &= E_2 + R_2 (J_1 \cdot \varphi_{1-2} + J_3 \cdot \varphi_{3-2}), \\
J_3 &= E_3 + R_3 (J_1 \cdot \varphi_{1-3} + J_2 \cdot \varphi_{2-3}).
\end{aligned}
\tag{A}
$$

Po uporządkowaniu powyższego układu trzech równań o tyluż niewiadomych otrzymamy

$$
\begin{aligned}
J_1 - R_1 \cdot \varphi_{2-1} \cdot J_2 - R_1 \cdot \varphi_{3-1} \cdot J_3 &= E_1, \\
-R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot J_1 + J_2 - R_2 \cdot \varphi_{3-2} \cdot J_3 &= E_2. \\
-R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot J_1 - R_3 \cdot \varphi_{2-3} \cdot J_2 + J_3 &= E_3.
\end{aligned}
\tag{B}
$$



Rys. 3. Schemat promieniowania energii w układzie trójpowierzchniowym otwartym

W celu obliczenia niewiadomych jasności J_1, J_2 J_3 obliczamy początkowo wyznacznik

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1, & -R_1 \cdot \varphi_{2-1}, & -R_1 \cdot \varphi_{3-1} \\ -R_2 \cdot \varphi_{1-2}, & 1, & -R_2 \cdot \varphi_{3-2} \\ -R_3 \cdot \varphi_{1-3}, & -R_3 \cdot \varphi_{2-3}, & 1 \end{vmatrix}.
$$

Po rozwinięciu wartość D_n można określić następująco:

$$
\begin{aligned}
D_n = 1 - R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2} \cdot \varphi_{2-3} - R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1} - R_1 \cdot R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-1} - \\
- R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_{2-1} \cdot \varphi_{3-2} \cdot \varphi_{1-3} - R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-1}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

W celu uproszczenia otrzymanego wyrażenia weźmy pod uwagę iloczyn $\varphi_{2-1} \cdot \varphi_{3-2} \cdot \varphi_{1-3}$ i zastosujmy do niego trzykrotnie zasadę wzajemności

$$
\begin{aligned}
F_2 \cdot \varphi_{2-1} &= F_1 \cdot \varphi_{1-2}, \\
F_3 \cdot \varphi_{3-2} &= F_2 \cdot \varphi_{2-3}, \\
F_1 \cdot \varphi_{1-3} &= F_3 \cdot \varphi_{3-1}.
\end{aligned}
$$

Wspomniany iloczyn można będzie przedstawić w następującej postaci:

$$\varphi_{2-1} \cdot \varphi_{3-2} \cdot \varphi_{1-3} = \frac{F_1 \cdot F_2 \cdot F_3}{F_2 \cdot F_3 \cdot F_1} \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-1}.$$

Jak widzimy, ostatnie dwa wyrażenia w równaniu (8) są identyczne.

Wspomniane wyrażenie określające wartość D_n można jeszcze dalej uprościć w następujący sposób:

$$D_n = 1 - R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \left[\frac{\varphi_{3-2} \cdot \varphi_{2-3}}{R_1} + \frac{\varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1}}{R_2} + \frac{\varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-1}}{R_3} + 2\,\varphi_c \right] \quad (8a)$$

W powyższym wprowadzono oznaczenie

$$\varphi_c = \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-1}. \quad (9)$$

Dzięki cyklicznej, uporządkowanej postaci wzór określający D_n jest niezbyt trudny do zapamiętania, szczególnie gdy go przedstawić w następującej formie:

$$D_n = 1 - R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \left(\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\varphi_{i-k} \cdot \varphi_{k-i}}{2\,R_n} + 2 \cdot \varphi_c \right) \quad (8b)$$

$$(i, k, n = 1, 2, 3; \quad n \neq i; \quad n \neq k, \quad i \neq k)$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń, załóżmy jeszcze

$$E_2 = 0, \quad E_3 = 0.$$

Założenie takie jest jednoznaczne z „wygaszeniem" promieniowania własnego (emisji pierwotnej) powierzchni F_2 i F_3.

Operacja taka pozwala obliczyć jasność składową, J_{i-1} dowolnej z trzech powierzchni, przy tym jasność ta jest wynikiem wyłącznie emisji własnej E_1 powierzchni F_1.

Obliczamy następny z kolei wyznacznik D_{2-1}

$$D_{2-1} = \begin{vmatrix} 1, & E_1, & -R_1 \cdot \varphi_{3-1} \\ -R_2 \cdot \varphi_{1-2}, & 0, & -R_2 \cdot \varphi_{3-2} \\ -R_3 \cdot \varphi_{1-3}, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Wykonując powyższe otrzymujemy

$$D_{2-1} = E_1 \cdot R_2 \left(\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}\right). \quad (10)$$

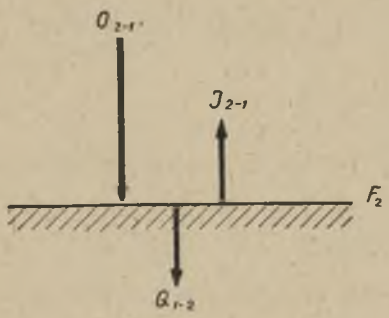
Jasność składową J_{2-1} powierzchni F_2 pochodzącą od emisji powierzchni F_1 otrzymamy dzieląc równanie (10) przez (8a)

$$J_{2-1} = \frac{E_1 \cdot R_2}{D_n} \left(\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}\right). \quad (11)$$

Przechodzimy w dalszym ciągu do obliczenia energii pochodzącej z emisji E_1 powierzchni F_1, a pochłoniętej przez powierzchnię F_2. W tym celu wprowadzimy pojęcie opromieniowania O_i powierzchni F_i. Przez opromieniowanie należy rozumieć sumę wszystkich promieni padających na rozważaną powierzchnię. W rozważanym przypadku pomiędzy składowym opromieniowaniem powierzchni F_2 pochodzącym od emisji powierzchni F_1 i składową jasnością powierzchni F_2 zachodzi następujący związek:

$$O_{2-1} \cdot R_2 = J_{2-1}. \tag{12}$$

Oznacza to, że część promieni padających po odbiciu od powierzchni F_2 tworzy jej jasność składową J_{2-1}.



Rys. 4. Bilans energetyczny powierzchni F : O_{2-1} — składowe opromieniowanie powierzchni F_2 pochodzące z emisji powierzchni F_1, J_{2-1} — składowa jasność powierzchni F_2; Q_{1-2} — ciepło odprowadzone przez przewodzenie

Zgodnie z rysunkiem 4 tworzymy bilans powierzchni F_2. Bilans ten umożliwi określenie energii Q_{1-2} pochodzącej z emisji E_1 powierzchni F_1, a pochłoniętej przez powierzchnię F_2

$$Q_{1-2} = O_{2-1} - J_{2-1}.$$

Łącząc powyższą zależność z równaniem (12) otrzymamy dalej

$$Q_{1-2} = J_{2-1}\left(\frac{1}{R_2} - 1\right) = J_{2-1} \cdot \frac{A_2}{R_2}. \tag{13}$$

Pozostaje już tylko wstawić zależność (12) w równanie (11)

$$Q_{1-2} = \frac{E_1 A_2}{D_n}\left(\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}\right). \tag{14}$$

W dalszym ciągu należy określić energię promienistą pochodzącą z emisji własnej E_2 powierzchni F_2, a pochłoniętą przez powierzchnię F_1.

Aby rozwiązać to zadanie, można zastosować identyczne z poprzednim rozumowanie, polegające na „wygaszeniu" emisji własnych E_1 i E_3 powierzchni F_1 i F_3 i rozwiązaniu przy tych założeniach układu równań (A). O wiele prostszą drogą będzie można przyjąć po uwzględnieniu zasady *inwariantności*.

Zgodnie z zasadą inwariantności charakter i przebieg zjawiska fizycznego nie może być zależny w żadnym przypadku od układu odniesienia, który jest przyjęty najzupełniej dowolnie. Układ odniesienia przyjmuje się zazwyczaj tak, aby możliwie uprościć obliczenia.

Łatwo jest zauważyć, że wzór (8 b) określający D_n jest całkowicie „inwariantny", tzn. wartość D_n jest zupełnie niezależną od tego, którą powierzchnię uważamy za pierwszą, którą za drugą itp. Przez inwariantność będziemy rozumieć taką cechę, że jeżeli zamienić miejscami dowolne dwa indeksy w rozpatrywanym wzorze, to jego wartość nie ulega zmianie.

W rozpatrywanym przypadku, we wzorze (8 b) można zamienić dowolne dwa spośród trzech indeksów: 1, 2, 3 i mimo to wartość D_n pozostanie nie zmieniona.

Po zastosowaniu zasady inwariantności do wzoru (14) otrzymamy

$$Q_{2-1} = \frac{E_2 \cdot A_1}{D_n} (\varphi_{2-1} + \varphi_{2-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-1}). \tag{15}$$

Aby określić energię Q_{r1-2} wymienioną pomiędzy powierzchniami F_1 i F_2, należy utworzyć różnicę

$$Q_{r1-2} = Q_{1-2} - Q_{2-1}. \tag{16}$$

Przedtem jednak w celu uproszczenia ostatecznego wyniku wykażemy, że zachodzi następująca równość:

$$\begin{aligned} &F_1 \cdot (\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}) = \\ &= F_2 \cdot (\varphi_{2-1} + \varphi_{2-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-1}). \end{aligned} \tag{17}$$

Prawa strona powyższego równania stanie się identyczna z lewą po trzykrotnym zastosowaniu zasady wzajemności (3):

$$\begin{aligned} F_2 \cdot \varphi_{2-1} &= F_1 \cdot \varphi_{1-2}, \\ F_2 \cdot \varphi_{2-3} &= F_3 \cdot \varphi_{3-2}, \\ F_3 \cdot \varphi_{3-1} &= F_1 \cdot \varphi_{1-3}. \end{aligned}$$

Wielkości równania (17) figurujące w nawiasach po obu stronach znaku równości posiadają ściśle określone znaczenie fizyczne: na skutek istnienia powierzchni F_3 wymiana energii pomiędzy powierzchniami F_1 i F_2 ulega zwiększeniu. Wspomniana powierzchnia F_3 działa bowiem jak niedoskonałe lustro, odbijając częściowo otrzymaną z powierzchni F_1 energię promieniowania, z której część pada na powierzchnię F_2.

Emisja pierwotna promieniowana przez powierzchnię F_1 i F_2 może być określona zgodnie z prawem Stefana Boltzmanna.

$$E_1 = \varepsilon_1 \cdot F_1 \cdot C_c \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \cdot \tau. \tag{18}$$

$$E_2 = \varepsilon_2 \cdot F_2 \cdot C_c \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \cdot \tau. \tag{19}$$

gdzie τ h — czas.

Wstawiając powyższe wartości we wzory (14) i (15), a rezultat w równanie (16), po uwzględnieniu (17) otrzymamy

$$Q_{r1-2} = F_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot C_c \cdot (\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}) \cdot \frac{1}{D_n} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \cdot \tau. \tag{20}$$

Równanie powyższe określa w zupełności energię promieniowania wymienioną pomiędzy powierzchniami F_1 i F_2. Staramy się je przedstawić w prostszej formie, co jest możliwe dzięki wprowadzeniu pojęcia stosunku wymiany energii promienistej ε_{1-2}. Stosunek wymiany energii promienistej występuje we wzorze obejmującym wszystkie możliwe przypadki wymiany energii pomiędzy dwiema powierzchniami

$$Q_{r1-2} = F_1 \cdot \varepsilon_{1-2} \cdot C_c \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \cdot \tau. \tag{21}$$

Porównując ze sobą wzory (20) i (21) dochodzimy do określenia stosunku wymiany energii promienistej w rozważanym przypadku

$$\varepsilon_{1-2} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 (\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}) \cdot \frac{1}{D_n}. \tag{22}$$

5. Kontrola otrzymanego wyniku

Otrzymane wzory można poddać kontroli na przypadkach granicznych. Gdy na przykład powierzchnia F_3 jest doskonale czarna, wymiana ciepła pomiędzy powierzchniami F_1 i F_2 odbywa się bezpośrednio, bowiem doskonale czarna powierzchnia nie odbija żadnych promieni. Przypadek wymiany energii promieniowania pomiędzy dwiema powierzchniami jest znany w literaturze [2].

Połóżmy zatem $R_3 = 0$ i obliczmy dla tego granicznego przypadku stosunek wymiany energii promieniowania. Wzór (8 a) uprości się wówczas do postaci

$$D_n = 1 - R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1}.$$

Stosunek wymiany energii promienistej określony wzorem (22), dla $R_3 = 0$ przyjmuje wartość

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varphi_{1-2}}{1 - R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-2}}. \tag{23}$$

Biorąc pod uwagę zależności

$$R_1 = 1 - A_1 = 1 - \varepsilon_1,$$
$$R_2 = 1 - A_2 = 1 - \varepsilon_2$$

dochodzimy ostatecznie po kilku prostych przeróbkach do postaci

$$\frac{1}{\varepsilon_{1-2}} = \frac{1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varphi_{1-2}} + \varphi_{1-2} \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 - \frac{1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2} \right) \tag{23a}$$

Wzór powyższy jest identyczny ze wzorem określającym stosunek wymiany energii w układzie dwupowierzchniowym [2].

Do identycznego wyniku dochodzimy kładąc we wzorach (8 a) i (22) $\varphi_{1-3} = 0$ oraz $\varphi_{2-3} = 0$. Ten przypadek graniczny może dotyczyć np. układu trójpowierzchniowego, w którym powierzchnia F_3 maleje do zera.

6. Przykłady liczbowe

1. Dany jest układ trójpowierzchniowy otwarty o cechach zgodnych z założeniami A—E. Wielkości poszczególnych powierzchni oraz ich właściwości podane są w tabeli 1.

Tabela 1

Powierzchnia	Refleksyjność	Absorpcyjność
$F_1 = 1\ m^2$	$R_1 = 0{,}2$	$A_1 = 0{,}8$
$F_2 = 2\ m^2$	$R_2 = 0{,}25$	$A_2 = 0{,}75$
$F_3 = 3\ m^2$	$R_3 = 0{,}4$	$A_3 = 0{,}6$

Stosunki konfiguracji rozważanego układu podaje tabela 2.

Tabela 2

$\varphi_{1-2} = 0{,}1$	$\varphi_{1-3} = 0{,}15$
$\varphi_{2-1} = 0{,}05$	$\varphi_{2-3} = 0{,}21$
$\varphi_{3-1} = 0{,}05$	$\varphi_{3-2} = 0{,}14$

W tabeli 2 można dowolnie obrać tylko trzy stosunki konfiguracji nie związane z sobą zasadą wzajemności. Pozostałe należy obliczyć.

Pierwszym działaniem, które należy wykonać, będzie kontrola, czy stosunki konfiguracji spełniają zasadę wzajemności. Po przeprowadzeniu takiej kontroli przechodzimy do obliczenia D_n na podstawie wzoru (8 b)

$$D_n = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}4 \left[\frac{0{,}14 \cdot 0{,}21}{0{,}2} + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{0{,}4} + \frac{0{,}15 \cdot 0{,}05}{0{,}25} + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}05 \right] =$$
$$= 0{,}996816$$

W dalszym ciągu określimy stosunek wymiany energii na podstawie wzoru (22)

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}75}{0{,}996168}(0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0.4 \cdot 0{,}14) = 0{,}06529\,.$$

Obliczymy jeszcze stosunek wymiany energii ε'_{1-2} dla przypadku, gdy powierzchnia F_3 została usunięta. Na podstawie wzoru (23 a) można obliczyć stosunek wymiany energii promieniowania dla układu dwupowierzchniowego

$$\frac{1}{\varepsilon'_{1-2}} = \frac{1}{0{,}6 \cdot 0{,}1} + 0{,}1 \cdot 0{,}5\left(\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}75} - 1 - \frac{1}{0{,}6}\right),$$

$$\varepsilon'_{1-2} = 0{,}060015\,.$$

Otrzymana wartość stosunku wymiany energii jest mniejsza o około 0,005, co odpowiada około 8%. Tyle właśnie wpływa obecność trzeciej powierzchni na wzrost stosunku wymiany energii promieniowania.

2. W celu przeprowadzenia kontroli otrzymanych w rozdziale 4 wyników można również posłużyć się wzorem otrzymanym przez Surinowa [5]. Surinow przeanalizował dokładnie układ trójpowierzchniowy zamykający szczelnie przestrzeń i doszedł do następującego wyniku:

$$e_{0,1} = \frac{[R_2 \cdot \varphi_{2-1}(\varphi_{1-2} + R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-2}) + R_3 \cdot \varphi_{3-1}(\varphi_{1-3} + R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-3})]\, e_1}{1 - R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 - A_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1} - A_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-1} - A_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-2}} +$$

$$+ \frac{(\varphi_{1-2} + R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-2})\, e_2 + (\varphi_{1-3} + R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-3})\, e_3}{1 - R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 - A_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1} - A_2 R_1 R_3\, \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-1} - A_1 R_2 R_3\, \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-2}} \tag{24}$$

Wzór powyższy określa tzw. opromieniowanie 1 m^2 powierzchni F_1. (Surinow używa w swej pracy oznaczenia: $e_{\text{pad } 1}$). Przez opromieniowanie danej powierzchni należy rozumieć sumę energii wszystkich promieni padających na rozważaną powierzchnię.

Ponieważ układ trójpowierzchniowy zamknięty może być uważany za szczególny przypadek układu otwartego, zatem wzory otrzymane w rozdziale 2 powinny dać identyczny wynik z podanym przez Surinowa. Układ trójpowierzchniowy zamknięty o powierzchniach niewklęsłych określają następujące równania wyrażające zasadę zamkniętości:

$$\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} = 1\,, \qquad \varphi_{2-3} + \varphi_{2-1} = 1\,, \qquad \varphi_{3-1} + \varphi_{3-2} = 1\,.$$

Dany jest układ trójpowierzchniowy zamknięty, którego cechy zgodne są z założeniami A—E (rozdz. 2). Wielkości poszczególnych powierzchni oraz ich cechy ujmuje tabela 3.

Tabela 3

Powierzchnia	Refleksyjność	Absorpcyjność
$F_1 = 3\ m^2$	$R_1 = 0{,}5$	$A_1 = 0{,}5$
$F_2 = 4\ m^2$	$R_2 = 0{,}75$	$A_2 = 0{,}25$
$F_3 = 5\ m^2$	$R_3 = 0{,}8$	$A_3 = 0{,}2$

Stosunki konfiguracji powyższego układu podane są w tabeli 4.

Tabela 4

$\varphi_{1-2} = 1/3$	$\varphi_{1-3} = 2/3$
$\varphi_{2-1} = 1/4$	$\varphi_{2-3} = 3/4$
$\varphi_{3-1} = 2/5$	$\varphi_{3-2} = 3/5$

Należy obliczyć stosunek wymiany energii promienistej ε_{1-2}.

Po sprawdzeniu zgodności danych w tabeli 4 z zasadami wzajemności oraz zamkniętości przystępujemy do obliczenia D_n na podstawie wzoru (8a)

$$D_n = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}}{0{,}5} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{0{,}8} + \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}}{0{,}75} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \right),$$

$$D_n = 0{,}532083\,.$$

Stosunek wymiany energii ε_{1-2} obliczamy na podstawie wzoru (22)

$$\varepsilon_{1-2} = 0{,}5 \cdot 0{,}25 \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0{,}8 \cdot \frac{3}{5}}{0{,}532083} = 0.153485\,.$$

Kontrolę otrzymanego wyniku przeprowadzimy za pomocą wzoru otrzymanego przez Surinowa (24).

Początkowo obliczamy mianownik D_s

$$D_S = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} +$$

$$- 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} - 0{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}532083\,.$$

Jak widzimy, wartość mianownika jest identyczna z wartością otrzymaną ze wzoru (8b). Należy jednak podkreślić, że zgodność ta występuje jedynie dla układu zamkniętego, dla takiego bowiem układu Surinow wyprowadza wzór (24).

Dalszy ciąg obliczenia będzie oparty o następujące rozumowanie: W liczniku wzoru Surinowa widzimy trzy wyrażenia, pierwsze, w nawiasie graniastym, określa część energii padającej na 1 m^2 powierzchni F_1

pochodzącej z emisji powierzchni F_1. Ten wyraz nie jest nam potrzebny, do wymiany energii bowiem pomiędzy powierzchniami F_1 i F_2 nie jest potrzebna znajomość energii pochłoniętej przez tę samą powierzchnię, która ją wyemitowała. Drugi wyraz w liczniku przedstawia energię pochodzącą z emisji powierzchni F_2 i padającą na powierzchnię F_1. Zajmiemy się tym właśnie wyrażeniem. W celu otrzymania energii pochłoniętej przez 1 m^2 powierzchni F_1, a pochodzącej z emisji powierzchni F_2 należy ten wyraz pomnożyć przez $A_1 = \varepsilon_1$

$$\overset{*}{e}_{2-1} = \varepsilon_1 \cdot (\varphi_{1-2} + R_3 \cdot \overset{*}{\varphi}_{1-3}\varphi_{3-2}) \cdot \varepsilon_2 \cdot C_c \cdot \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \cdot \frac{1}{D_S}.$$

Dla określenia energii pochłoniętej przez 1 m^2 powierzchni F_2, a pochodzącej z emisji powierzchni F_1 wystarczy zamienić ze sobą indeksy 1 i 2

$$\overset{*}{e}_{1-2} = \varepsilon_2 \cdot (\varphi_{2-1} + R_3 \cdot \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-1})\, \varepsilon_1 \cdot C_c \cdot \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \cdot \frac{1}{D_S}$$

Całkowita energia pochodząca z F_2, pochłonięta przez F_1 wynosi

$$\overset{*}{E}_{2-1} = F_1 \cdot \overset{*}{e}_{2-1}.$$

Podobnie energia pochodząca z F_1 pochłonięta przez F_2 ma wartość

$$\overset{*}{E}_{1-2} = F_2 \cdot \overset{*}{e}_{1-2}.$$

Energia $\overset{*}{Q}_{r1-2}$ wymieniona między powierzchniami F_1 i F_2 jest równa różnicy

$$\overset{*}{Q}_{r1-2} = \overset{*}{E}_{1-2} - \overset{*}{E}_{2-1}.$$

Po uwzględnieniu zależności (17) otrzymujemy ostatecznie

$$\overset{*}{Q}_{r1-2} = F_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2(\varphi_{1-2} + R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-2}) \cdot \frac{1}{D_S} \cdot C_c \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]$$

Ponieważ dla układu trójpowierzchniowego zamkniętego $D_S = D_n$, jak to wynika z wartości D_S podanej przez Surinowa ([5], str. 728), zatem otrzymany wzór jest identyczny z poprzednio otrzymanym równaniem (20).

W celu określenia wpływu powierzchni F_3 na wymianę ciepła pomiędzy powierzchniami F_1 i F_2 załóżmy, że powierzchnia F_3 została usunięta. W tym przypadku $R_3 = 0$ oraz

$$D_n = 1 - R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1},$$

$$D_n = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{31}{32},$$

$$\varepsilon_{1-2} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \frac{1}{D_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{31} = 0{,}043010$$

Jak widzimy w tym przykładzie, wpływ powierzchni F_3 był bardzo duży, dzięki niej bowiem stosunek wymiany energii wzrósł od wartości 0,043010 do 0,153485. Należy to przypisać dużej wartości $R_3 = 0{,}8$ oraz wielkości powierzchni F_3.

7. Zakończenie

Wymiana ciepła przez promieniowanie w układzie trójpowierzchniowym otwartym prowadzi do znacznie bardziej skomplikowanych zależności niż w układach dwupowierzchniowych [1], [2]. Szczególnie żmudne jest obliczanie wartości wyznacznika D_n określonego wzorem (8 b). Dzięki prawidłowości i symetrii tego wzoru obliczenie nie jest jednak ani zniechęcające, ani trudne. Z tego samego powodu wzór (8 b) po kilkakrotnym użyciu można zapamiętać.

Łatwiej jednak zapamiętać ten wzór rozumiejąc znaczenie poszczególnych wyrażeń. Weźmy na przykład wyraz pierwszy, otrzymany po otworzeniu nawiasu

$$R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2} \cdot \varphi_{2-3}.$$

Promienie cieplne wielokrotnie przebiegają odcinek drogi $F_2 - F_3$. Po każdym odbiciu od F_2 pozostaje już tylko część określona refleksyjnością R_2. Z pozostałych tylko część φ_{2-3} dociera do F_3. Po odbiciu od F_3 część R_3 pozostałych promieni powtarza proces w kierunku przeciwnym. Dzięki temu właśnie w rozpatrywanym wyrażeniu mamy iloczyn wielkości R_2, R_3, φ_{2-3}, φ_{3-2} mających zasadniczy wpływ na rozważanym odcinku drogi.

Na innych, pozostałych odcinkach drogi występują dalsze wyrażenia:

na odcinku od F_1 do F_2 : $R_1 \cdot R_2 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-1}$,

i na pozostałym F_1 do F_3 : $R_1 \cdot R_3 \cdot \varphi_{1-3} \cdot \varphi_{3-1}$.

Pozostałe wyrażenia

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_c$$

przedstawiają wpływ innej, wielokrotnie powtarzającej się drogi $F_1 - F_2 - F_3$, w której podobnie jak poprzednio mają znaczenie trzy refleksyjności: R_1, R_2, R_3 oraz trzy stosunki opromieniowania powtarzające się w porządku cyklicznym:

$$\varphi_{1-2},\ \varphi_{2-3},\ \varphi_{3-1},$$

jako parametry określające pozostałą część promieniowania w obrębie trzech rozważanych powierzchni.

W wyrażeniu określającym D_n widzimy zatem wszystkie drogi promieni, odznaczające się możliwością wielokrotnych odbić. Wyrażenie $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \varphi_{1-2} \cdot \varphi_{2-3} \cdot \varphi_{3-1}$ posiada mnożnik 2, krążenie bowiem promieniowania może się odbywać jeszcze w przeciwnym kierunku

$$F_1 - F_3 - F_2.$$

W liczniku wzoru (22) określającego stosunek wymiany energii promienistej w nawiasie figurują wyrażenia

$$\varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} \cdot R_3 \cdot \varphi_{3-2}.$$

Wyrażenia te są związane z nie powtarzającymi się drogami promieniowania, przy tym pierwsza z nich związana z φ_{1-2} jest drogą najkrótszą, pierwotną, druga zaś, także pierwotna, jest drogą via powierzchnia F_3.

Jak widzimy, sporo kłopotu przedstawia obliczenie tylko stosunku ε_{1-3}. Pamiętajmy jednak, że do zupełnego rozwiązania wymiany energii promienistej potrzebne są dalsze stosunki ε_{1-3}, ε_{2-3}, nadto konieczna jest znajomość rozproszonych poza układ energii oraz jasności składowych każdej powierzchni, pochodzących z własnego promieniowania. Zagadnienie pełnego bilansu układu trójpowierzchniowego otwartego zasługuje na osobne opracowanie. W tym miejscu ograniczymy się jedynie do określenia pozostałych stosunków wymiany energii promienistej. Ponieważ znany już jest wyraz D_n przeto obliczenia są już bardzo proste. Wzory określające ε_{1-3} i ε_{2-3} otrzymamy na podstawie równania (22)

$$\varepsilon_{1-3} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 (\varphi_{1-3} + \varphi_{1-2} \cdot R_2 \cdot \varphi_{2-3}) \cdot \frac{1}{D_n},$$

$$\varepsilon_{2-3} = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 (\varphi_{2-3} + \varphi_{2-1} \cdot R_1 \cdot \varphi_{1-3}) \cdot \frac{1}{D_n}.$$

Na zakończenie poczuwam się do obowiązku złożenia podziękowania prof. dr. inż. Stanisławowi Ochęduszce za cenne wskazówki przy wykonywaniu powyższej pracy.

Otrzymano 7 lutego 1956 r.

BIBLIOGRAFIA

[1] St. Ochęduszko, *Teoria maszyn cieplnych*, cz. III, Warszawa 1955, PWT, str. 78—81.

[2] W. Około-Kułak, *Wymiana ciepła na drodze promieniowania pomiędzy dwiema powierzchniami w ośrodku diatermicznym*, „Gospodarka Cieplna" nr 5, Warszawa 1954, str. 22—26.

[3] Г. Л. Поляк, Анализ теплообмена излучением методом салдо. Журнал Техн. Физ. 3. 1935, (Pracy tej nie posiadamy, lecz korzystamy z krótkiego streszczenia w dziele: Ф. Д. Дубынин (i inni), Котельные установки. Гос. Эн. Издат., Москва-Ленинград 1941.

[4] Ю. А. Суринов, Интегральные уравнения теплового излучения и методы расчета лучистого обмена в системах „серых" тел, разделенных диатермической средой. И.А.Н., СССР, О.Т.Н. 7, 1948.

[5] Ю. А. Суринов, Лучистый теплообмен в излучающей системе состоящей из трех серых тел. И.А.Н., СССР, О.Т.Н. 5, 1952.

[6] Ю. А. Суринов, Анализ некоторых основных понятий и задач теории теплового излучения. И.А.Н., СССР, О,Т.Н. 4, 1950.