BUDOWNICTWO z. 15

JERZY NIEWIADOMSKI

PRACA STATYCZNA POWŁOKOWYCH CHŁODNI KOMINOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM STANU ZGIĘCIOWEGO

P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A

ZESZYT NAUKOWY Nr 127 – GLIWICE 1965

SPIS TREŚCI

Str.

1. Wstęp 5
   1. 1. Przedmiot pracy i założenia 5
   1. 2. Sposób rozwiązania zagadnienia 6
   1. 3. Zakres zastosowań rozwiązania 7
   1. 4. Przegląd treści 8
2. Zasadniczy stan naprężenia i odkształcenia w powłokach obrotowych 9
   2. 1. Uwagi wstępne 9
   2. 2. Równania błonowej teorii powłok obrotowych . . 10
   2. 3. Błonowy stan naprężenia 13
   2. 4. Błonowy stan naprężenia w powłoce hiperboloidalnej . 15
   2. 5. Wpływ temperatury 20
   2. 6. Zasadniczy stan zgięciowy; powłoka walcowa i stożkowa 22
   2. 7. Zasadniczy stan zgięciowy w powłoce hiperboloidalnej . 28
   2. 8. Ogólne rozwiązanie zasadniczego stanu naprężeń . . 33
   2. 9. Wpływ zaburzenia brzegowego 35
3. Pierścień kołowy na podłożu sprężystym 37
   3. 1. Równania geometryczne 38
   3. 2. Równania fizyczne 41
   3. 3. Równania równowagi 46
   3. 4. Wpływ krzywizny i rozpełzania gruntu 52
4. Rozwiązanie układu powłokowej chłodni kominowej . . . 54
   4. 1. Uwagi ogólne 54
   4. 2. Równania równowagi pierścienia górnego 56
   4. 3. Równania nierozdzielności 61
   4. 4. Równania równowagi pierścienia fundamentowego . . 66
   4. 5. Równania kanoniczne rozwiązania chłodni 71
5. Przykłady 74
   5. 1. Wyznaczenie zasadniczego stanu naprężenia w powłoce hiperboloidalnej 74
   5. 2. Rozwiązanie chłodni hiperboloidalnej poddanej wpływom pełzania i krzywizny terenu 86

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 127

JERZY NIEWIADOMSKI

PRACA STATYCZNA POWŁOKOWYCH CHŁODNI KOMINOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM STANU ZGIĘCIOWEGO

PRACA HABILITACYJNA Nr 42

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 24. XI. 1964 r.

GLIWICE 1965

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

Nakł. 100+175 egz. Ark. wyd. 8 Ark druk. 7 Papier offsetowy kl. V, 70x100 70 g
Oddano do druku 30. 12. 1964 Podpis. do druku 18. 2. 1965 Druk ukończ. w lutym 1965
Zam. 39 8. 1. 1965 F-18 Cena zł 10,—

Skład — druk i oprawę wykonano
w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

α, β ; z, β	- współrzędne krzywoliniowe odniesione do linii krzywizn głównych,
z	- oś powłoki obrotowej,
r, r', r''	- promień dowolnego poziomego przekroju powłoki i jego pochodne względem z,
R_i	- promienie głównych krzywizn ($i = 1,2$),
$2h$	- grubość powłoki,
r lub r, r_s	- promień osi geometrycznej i osi sprężystości pierścienia kołowego,
1, 2	- główne osie bezwładności poprzecznego przekroju pierścienia,
χ	- kąt między osią 1 a normalną do płaszczyzny pierścienia,
ϑ	- kąt między osią z a normalną do powłoki lub podbudowy,
ψ	- kąt nachylenia stopy fundamentowej,
u, v, w	- składowe przemieszczenia powłoki i pierścienia,
u^*, v^*, w^*	- składowe przemieszczenia pierścienia (IV, V rozdz.),
$\bar{u}^{(o)}, \bar{v}^{(o)}, \bar{w}^{(o)}$	- składowe przemieszczenia podłoża,
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	- składowe przemieszczenia podstawy pierścienia fundamentowego,
φ_i	- kąty obrotu elementu powłoki,
φ_i, φ lub φ^*	- kąty obrotu i kąt skręcenia przekroju pierścienia,
$k_{\alpha\beta}$	- przemieszczenia osi pierścienia od wpływu jednostkowych przemieszczeń na liniach połączenia ($\alpha, \beta = u, v, w, \varphi$),
$\bar{k}_{\alpha\beta}$	- przemieszczenia linii środkowej podstawy pierścienia fundamentowego od wpływu jednostkowych przemieszczeń na linii połączenia,
ε_i, γ	- składowe odkształcenia błonowego powłoki,

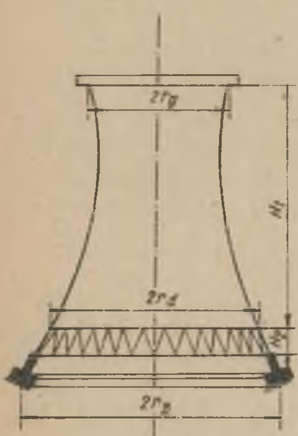
$\varkappa_i, \tau$	- składowe odkształcenia zgięciowego powłoki i pierścienia,
$\varepsilon^*, \varkappa_i^*, \tau^*$	- składowe odkształcenia pierścienia (IV, V rozdz.),
$\bar{\Phi}$	- funkcja naprężeń,
N_1, S ..	- siły błonowe w powłoce,
Q_1, M_1, M_{12}	- siły poprzeczne i momenty w powłoce,
X, Y, Z	- składowe powierzchniowego obciążenia powłoki,
$N, M_i,$	- siła osiowa i momenty w pierścieniu (i=1,2, 3) (rozdz. III),
N^*, M_i^*	- siła osiowa i momenty w pierścieniu (rozdz. IV, V),
$r_{\alpha\beta}$	- siły oddziaływania pierścienia od wpływu jednostkowych przemieszczeń na liniach połączenia (α, β = u, v, w, φ),
$\bar{r}_{\alpha\beta}$	- siły oddziaływania podłoża od wpływu jednostkowych przemieszczeń na linii połączenia,
$\bar{P}_\alpha, \bar{M}_\alpha$	- składowe oddziaływania podłoża (α = x, y, z),
f_i, F_i, G_i	- pomocnicze funkcje dla stanu błonowego w powłoce hiperboloidalnej (i = 1, 2),
g_i	- pomocnicze funkcje dla stanu zgięciowego w powłoce hiperboloidalnej (i = 1, 2 ... 5),
I_i, C_o lub I_i^*, C_o^*	- momenty bezwładności przekroju poprzecznego pierścienia (i = 1, 2),
E, G,	- moduły Younga i Kirchoffa, współczynnik Poissona,
C, T	- cechy sprężyste podłoża,
ε, R	- intensywność rozpełzania i promień krzywizny terenu.
m	- numer wyrazu szeregu.

1. WSTĘP

1.1. Przedmiot pracy i założenia

W pracy przedstawiono rozwiązanie układu powłokowej chłodni kominowej, poddanej różnorodnym wpływom jak obciążenia powierzchniowe, wpływy termiczne i wpływy ruchów podłoża gruntowego.

Przyjęto płaszcz komina wywiewnego w postaci powłoki obrotowej, wzmocnionej wzdłuż górnej krawędzi poziomym pierścieniem o stałym przekroju poprzecznym i połączonej z pierścieniem fundamentowym przy pomocy układu skośnych słupów przegubowych p. rys.1. Pierścień fundamentowy również o stałym przekroju poprzecznym, spoczywa bezpośrednio na podłożu gruntowym, które potraktowano jako dwuparametrowe podłoże winklerowskie, o współczynnikach C i T.



Rys. 1

W rozwiązaniu uwzględniono sprężystą współpracę wszystkich elementów chłodni i podłoża gruntowego, wprowadzające przy tym upraszczające założenia odnośnie stanu naprężenia i odkształcenia w powłoce i statycznego oddziaływania słupów podbudowy.

Przyjęto, że dla spotykanych w praktyce obciążeń stan naprężenia i odkształcenia w powłoce komina rozdzielać się będzie zawsze na dwa stany: na stan powoli zmieniający się tzw. zasadniczy stan naprężenia i odkształcenia, i stan o dużym wskaźniku zmienności związany z tzw. zaburzeniem brzegowym. W rozwiązaniu zwrócono uwagę przede wszystkim na zasadniczy stan naprężenia i odkształcenia uwzględniając wpływ zaburzenia brzegowego tylko na krawędzi górnej, wzmocnionej pierścieniem. W przypadku bowiem pierścienia odkształcalnego zaburzenie brzegowe, mimo swojego lokalnego charakteru, może pośrednio wpływać na stan naprężenia w całej powłoce.

Oddziaływanie słupów podbudowy przyjęto jako rozłożone w sposób ciągły wzdłuż krawędzi dolnej. Z uwagi na działanie słupów zbliżone bardziej do obciążenia punktowego, przyjęcie takie oczywiście nie pozwoli na ujęcie rzeczywistego stanu naprężenia i odkształcenia w strefie przykrawędziowej. Biorąc pod uwagę, że szerokość tej strefy mniej więcej równa się odległości między głowicami słupów, pominięcie punktowego działania słupów nie będzie mieć dużego wpływu na wielkości przemieszczeń krawędzi dolnej i tym samym na siły w powłoce, za wyjątkiem wspomnianej strefy.

1.2. Sposób rozwiązania zagadnienia

Rozwiązanie układu chłodni przeprowadzono w dwóch etapach. W pierwszym etapie wyznacza się siły w powłoce komina od obciążenia powierzchniowego i wpływów termicznych wg teorii błonowej, traktując powłokę jako utwierdzoną na obu krawędziach.W szczególnym przypadku powłoki walcowej i płaskiego, wiotkiego pierścienia górnego, siły błonowe można wyznaczyć jak w powłoce utwierdzonej tylko wzdłuż krawędzi dolnej, a górą opartej na przeponie. Rozwiązanie błonowe pozwala oczywiście spełnić tylko dwa spośród czterech warunków geometrycznych, które można ustawić na utwierdzonej krawędzi. Dwa pozostałe warunki dotyczące ugięcia normalnego i kąta obrotu, wymagają obciążenia krawędzi momentem zginającym i siłą poprzeczną, które oblicza się wg teorii zaburzenia brzegowego. We wspomnianym szczególnym przypadku wg tej teorii wyznacza się na górnej krawędzi tylko siłę poprzeczną.

Pierwszy etap traktować można jako rozwiązanie całego układu chłodni obciążonego zadanym obciążeniem powierzchniowym oraz pewnymi dodatkowymi siłami przyłożonymi na liniach połączenia powłoki z pierścieniem górnym i słupami podbudowy. W przypadku ruchów podłoża gruntowego należy w pierwszym etapie obliczyć jeszcze dodatkowe siły na powierzchni kontaktu podłoża gruntowego z pierścieniem fundamentowym, zakładając, że jest on nieskończenie sztywny.

W celu uzyskania rozwiązania od zadanych obciążeń powłoki i przemieszczeń podłoża, w drugim etapie rozwiązano cały układ obciążony na liniach połączenia (rozumiejąc pod taką linią również środkową linię powierzchni kontaktu podłoża z fundamentem) siłami równymi co do wielkości a przeciwnie skierowanymi w stosunku do sił pierwszego etapu. Zastosowano tu do powłoki komina przybliżony sposób wyznaczania zasadniczego stanu naprężenia, który stosunkowo prosto umożliwia uwzględnienie statycznego wpływu momentów stanu czysto - zgięciowego na siły błonowe - p. artykuł autora [7]. Przy obliczaniu momentu zginającego i siły poprzecznej na brzegu górnym oparto się na teorii tzw. prostego zaburzenia brzegowego wg [3].

Równania rozwiązania drugiego etapu otrzymano zapisując równania równowagi dla górnego pierścienia i pierścienia fundamentowego oraz równania nierozdzielności na linii połączenia powłoki z podbudową. Przy ustawianiu tych równań korzystano z równania prac przygotowanych dla wirtualnego stanu przemieszczeń i wirtualnego stanu naprężeń, co pozwoliło nadać rozwiązaniu zwartą i jednolitą formę. Oparcie rozwiązania na zasadzie prac przygotowanych okazało się ponadto nader efektywne, zwłaszcza przy ustawianiu równań równowagi dla pierścieni.

1.3. Zakres zastosowań rozwiązania

Osiowa symetria ustroju chłodni umożliwiła przedstawienie wszystkich wielkości statycznych i geometrycznych układu w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych zmiennej β, gdzie β - kąt środkowy.

Zasadnicze stany naprężenia w powłoce chłodni odpowiadające zerowemu i pierwszemu wyrazowi szeregów ($m = 0$ i $m = 1$) mogą być wyznaczane w oparciu o teorię błonową, jeśli abstrahować od odcinkowego działania słupów podbudowy, co pozostaje w związków z faktem, że dla tych wartości m przemieszczenia czysto zgięciowego stanu w powłoce okazują się przemieszczeniami jak dla ciała sztywnego. W tych przypadkach sztywność elementów układu jak i cechy podłoża gruntowego nie mają wpływu na zasadniczy stan naprężenia w powłoce i siły w słupach podbudowy.

Zasadnicze stany naprężenia dla $m \geqslant 2$ zależność już będą zarówno od cech sprężystych górnego pierścienia, podbudowy i powłoki jak i współczynników podłoża C i T.

Mając powyższe na uwadze, rozwiązanie układu chłodni przeprowadzono w sposób najwłaściwszy dla stanów odpowiadających $m \geqslant 2$, a mianowicie w dwóch etapach, z uwzględnieniem w drugim etapie statycznego wpływu stanu czysto zgięciowego. Wprawdzie przedstawione w pracy rozwiązanie pozwala wyznaczyć siły błonowe w powłoce oraz siły w podbudowie i dla przypadków $m = 0$, $m = 1$, to jednak z uwagi na wspomniany brak wpływu sztywności elementów układu i podłoża na stan naprężenia, rozłożenie rozwiązania na dwa etapy staje się wówczas zbędne. Dla tych wartości m siły błonowe w powłoce oraz siły w słupach podbudowy można wyznaczyć bezpośrednio i niezależnie od siebie z samych równań równowagi.

Rozwiązanie układu chłodni kominowej oparte na równaniach zasadniczego stanu naprężenia, które stanowią ogólniejsze równania od równań teorii błonowej i w przypadku powłoki walcowej odpowiadają równaniom półzgięciowej teorii Własowa p. [7], umożliwia wyznaczenie sił wewnętrznych w tych wszystkich przypadkach kiedy krawędzie powłoki komina doznają znacznych przemieszczeń. Do takich przypadków zaliczyć należy nie tylko przypadek chłodni poddanej wpływom ruchów podłoża gruntowego, który w niniejszej pracy rozpatrzony został na konkretnym przykładzie chłodni hiperboloidalnej, ale również przypadki obciążenia parciem wiatru chłodni posadowionych na słabszych gruntach, p. [6].

Rozwiązania oparte na równaniach teorii błonowej z góry zakładają, że przemieszczenia krawędzi powłoki i wynikające z nich odkształcenia zgięciowe będą dostatecznie małe. W znanych autorowi pracach z reguły przyjmuje się powłokę jako utwierdzoną wzdłuż dolnej krawędzi - p. [9], co stanowi jeszcze większe ograniczenie, gdyż równoznaczne jest z założeniem, że przemieszczenia podbudowy nie wpływają nawet na zmianę stanu błonowego.

1.4. Przegląd treści

Jak wyjaśniono w ustępie 1.2. rozwiązanie układu chłodni kominowej poddanej różnorodnym wpływom sprowadzić można do rozwiązania układu obciążonego tylko na liniach połączenia, określonego jako drugi etap. Wyprowadzenie równań rozwiązania drugiego etapu wymagało wstępnego rozpracowania teorii zasadniczego stanu naprężenia i uogólnienia znanych rozwiązań dla pierścienia kołowego.

W związku z powyższym w drugim rozdziale niniejszej pracy podane zostały statyczne i geometryczne równania teorii błonowej dowolnej powłoki obrotowej w oparciu o monografie [2], [8], [10]. Z uwagi na dostateczne opracowanie błonowej teorii powłok walcowych i stożkowych w literaturze [1], [2], [3], [4], [10] bliżej omówiono tylko wyznaczanie błonowego stanu naprężenia i przemieszczeń dla powłoki hiperboloidalnej.

Statyczne i geometryczne równania dla tej powłoki po odpowiedniej zamianie zmiennej niezależnej przechodzą w równania różniczkowe o stałych współczynnikach. Równania te po scałkowaniu pozwalają uzyskać zamknięte wzory zarówno na siły błonowe w przypadku obciążeń brzegowych, jak i na przemieszczenia dla czysto zgięciowego stanu. Dla przypadku niejednorodnych równań przedstawiono rozwiązanie szeregowe oparte na metodzie ortogonalizacji.

Równania zasadniczego stanu zgięciowego w przypadku powłoki walcowej i stożkowej prowadzą do zamkniętych wzorów na wszystkie siły wewnętrzne. Dla powłoki hiperboloidalnej uzyskano wzory zamknięte tylko na momenty; wyznaczenie sił błonowych dla tego stanu wymaga już rozwiązań szeregowych, które otrzymać można w podobny sposób jak rozwiązania niejednorodnych równań stanu błonowego.

Dodając rozwiązanie stanu błonowego do rozwiązania zasadniczego stanu zgięciowego otrzymano ogólne rozwiązanie zasadniczego stanu naprężenia i odkształcenia w dowolnej powłoce obrotowej. Utrzymując n wyrazów w szeregach trygonometrycznych na funkcję naprężeń i funkcję przemieszczeń, uzyskuje się rozwiązanie zawierające 4 n dowolnych stałych całkowania określających amplitudy sił i przemieszczeń na dolnej krawędzi.

Ponadto w rozdziale tym przedstawiono sposób wyznaczania zasadniczego stanu naprężenia w dowolnej powłoce obrotowej poddanej wpływom termicznym, oparty na równaniach teorii błonowej.

W trzecim rozdziale wyprowadzono równania geometryczne i fizyczne dla kołowego pierścienia o dowolnym, stałym przekroju poprzecznym, zakładając, że oś skręcania przekroju nie pokrywa się z osią geometryczną. Zwrócono przy tym uwagę na możliwości uproszczenia tych równań w przypadku cienkich pierścieni. Ponadto w rozdziale tym wyprowadzono wyrażenia na pracę sił wewnętrznych i zewnętrznych dla pierścienia kołowego dowolnie obciążonego wzdłuż linii równoległej do jego osi i spoczywającego na sprężystym podłożu. Przyjęto przy tym, że podłoże doznało pewnych przemieszczeń, w szczególności przemieszczeń pochodzących od krzywizny i rozpełzania terenu. Wspomniane wyrażenia podstawione do równania prac przygotowanych pozwalają łatwo uzyskać równania równowagi dla takiego dość ogólnego przypadku. Podobnie jak w powłoce wszystkie występujące tu statycznie i geometryczne wielkości przedstawiono w postaci szeregów trygonometrycznych zmiennej β .

Wyniki uzyskane w drugim i trzecim rozdziale pozwoliły na wyprowadzenie równań rozwiązania drugiego etapu, którym poświęcony jest czwarty rozdział pracy.

W rozwiązaniu drugiego etapu za główne niewiadome przyjęto osiem amplitud przemieszczeń na górnej krawędzi powłoki i linii połączenia słupów podbudowy z pierścieniem fundamentowym oraz dwie amplitudy sił błonowych na linii połączenia słupów z powłoką. Dzięki przyjęciu przemieszczeń na liniach połączenia za główne niewiadome otrzymano stosunkowo prosty układ dziesięciu równań algebraicznych, któremu nadano postać układu równań kanonicznych metody mieszanej. Postać tę uzyskano wyrażając w równaniach prac przygotowanych dla wirtualnego stanu przemieszczeń, zarówno siły wewnętrzne w pierścieniach, jak i wariacje przemieszczeń przez wariacje przemieszczeń przyjętych za główne niewiadome. Takie postępowanie pozwoliło zastąpić żmudne rozważania statyczne formalnymi przekształceniami opartymi na prostych związkach geometrycznych.

Rozdział piąty zawiera dwa przykłady liczbowe. W pierwszym przykładzie wyznaczono zasadniczy stan naprężenia w powłoce hiperboloidalnej o stosunku półosi $\frac{a}{b} = \frac{30m}{60m}$.

W drugim przykładzie rozwiązano układ chłodni hiperboloidalnej poddanej wpływom krzywizny i rozpełzania terenu.

Materiały o charakterze pomocniczym podano w dwóch załącznikach na końcu pracy.

W załączniku Nr 1 zestawione zostały przy zastosowaniu jednolitych oznaczeń, równania ogólnej teorii powłok oraz równania teorii błonowej i zaburzenia brzegowego, z których korzystano w drugim rozdziale pracy.

W załączniku Nr 2 podano wzory na wielkości pomocnicze do wyznaczenia zasadniczego stanu zgięciowego w powłoce hiperboloidalnej.

2. ZASADNICZY STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W POWŁOKACH OBROTOWYCH

2.1. Uwagi wstępne

Równania teorii powłok umożliwiają jak wiadomo, nie tylko wyznaczenie błonowego stanu naprężenia w powłoce, ale również pozwalają określić przemieszczenia jej środkowej powierzchni z tzw. geometrycznych równań teorii, które ogólnie stanowią niejednorodny układ cząstkowych równań różniczkowych drugiego rzędu. Równania te, w przypadku niewystępowania odkształceń błonowych, przechodzą w jednorodny układ równań określający tzw. czysto zgięciowy stan, któremu towarzyszy wyłącznie zginanie środkowej powierzchni. Pojęcie czysto zgięciowego stanu jest jednak pojęciem umownym, gdyż momentom tego stanu odpowiadać będą zawsze jakieś siły styczne i normalne tzw.siły błonowe, co wynika bezpośrednio z równań równowagi wewnętrznej ogólnej teorii powłok. W większości jednak przypadków dzięki dostatecznie sztywnemu podparciu brzegów powłoki odkształcenia zgięciowe nie osiągają znacznych wartości i odpowiadające im momenty praktycznie pozostają bez wpływu na siły błonowe. Nie mniej mogą zaistnieć przypadki, kiedy elementy brzegowe powłoki nie będą dostatecznie sztywne, lub doznają tak znacznych wymuszonych przemieszczeń, że momenty czysto zgięciowego stanu osiągną już znaczne wartości i nie będzie można pominąć ich wpływu statycznego. Trudno wówczas mówić o czysto zgięciowym stanie i dlatego dla takich przypadków wprowadzono w niniejszej pracy określenie - zasadniczy stan zgięciowy.

W artykule autora [7] podany został prosty sposób przybliżonego wyznaczania zasadniczego stanu zgięciowego, oparty na równaniach teorii błonowej. Uzyskane tam wyniki dla powłok walcowej i stożkowej przedstawione zostaną w ustępie 2.6; w tym samym ustępie podane zostaną również równania i wzory potrzebne do określenia zasadniczego stanu zgięciowego w powłoce hiperboloidalnej.

Statyczne równania teorii błonowej wraz z równaniami zasadniczego stanu zgięciowego, pozwalają wyznaczyć stany naprężenia charakteryzujące się małym wskaźnikiem zmienności, czyli tzw. zasadnicze stany naprężenia. Tak rozumiany zasadniczy stan naprężenie posiada tylko nieco węższy sens od zasadniczego stanu naprężenia wg klasyfikacji, podanej w [3].

2.2. Równania błonowej teorii powłok obrotowych

Statyczne i geometryczne równania błonowej teorii powłok obrotowych zapiszemy jak dla powłoki obrotowej o osi pionowej, odniesionej do układu współrzędnych z, β - rys.2.

Równania różniczkowe równowagi wewnętrznej przyjmiemy wg [10] str. 25 (p. załącznik Nr 1 równania (VII)). Wyrażając siłę N_1 przez pomocniczą funkcję Φ

$$N_1 = \frac{1}{r}(1+r'^2)^{1/2}\Phi \tag{2.01}$$

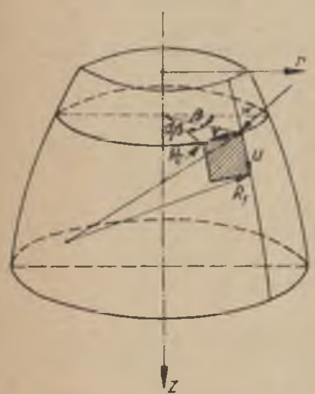
oraz wyrażając N_2 przez N_1 z trzeciego równania równowagi, otrzymamy z dwóch pierwszych równań

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = -r(X+r'Z), \\ &r\frac{\partial S}{\partial z} + r''\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + 2r'S = (1+r'^2)^{1/2} r\left[(1+r'^2)^{1/2}\frac{\partial Z}{\partial \beta} - Y\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.02}$$

Oznaczenia składowych sił wewnętrznych i powierzchniowych pokazano na rys.3.[x)]

Różniczkując pierwsze równanie (2.02) względem z, a drugie względem β i eliminując $\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \beta}$ dochodzimy do jednego równania drugiego rzędu ze względu na Φ

$$\left.\begin{aligned} &rr''\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[r^3(X+r'Z)\right] \\ &-r^2(1+r'^2)^{1/2}\left[-(1+r'^2)^{1/2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} + \frac{\partial Y}{\partial \beta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.03}$$



Rys. 2

W uzupełnieniu (2.01) zapisać możemy następujące wyrażenia na pozostałe siły

$$N_2 = r''(1+r'^2)^{-1/2}\Phi - r(1+r'^2)^{1/2}Z, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - r(X+r'Z). \tag{2.04}$$

Równania geometryczne uzyskamy z ogólnych równań np.[8]str. 25, uwzględniając wyrażenia na współczynniki pierwszej formy kwadratowej A, B i promienie krzywizny R_1, R_2 jak dla powłoki obrotowej odniesionej do układu z, β – [10]. str.25.

$$\left.\begin{aligned} &(1+r'^2)^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial z} + r''(1+r'^2)^{-3/2}w = \frac{1}{2Eh}(N_1 - \nu N_2), \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{r'}{r}(1+r'^2)^{-1/2}u - \frac{1}{r}(1+r^2)^{-1/2}w = \frac{1}{2Eh}(N_2 - \nu N_1), \\ &-\frac{\partial u}{\partial \beta} + r^2(1+r'^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1+\nu}{Eh} rS, \end{aligned}\right\} \tag{2.05}$$

(p. załącznik Nr 1 równania (VIII)).

Występujące w tych równaniach oznaczenia dla przemieszczeń wyjaśnia rys.2.

x) Rys. 3 na str. 24

Eliminując z dwóch pierwszych równań w oraz wyrażając N_2 przez N_1, otrzymamy po zróżniczkowaniu wzgl. β

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1}{rr''}(1+r'^2)^{1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\beta}+\frac{r'}{r}(1+r'^2)^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial\beta}=\\&=\frac{1}{2Eh}\left\{\left(\frac{1+r'^2}{rr''}+\frac{rr''}{1+r'^2}-2\nu\right)\frac{\partial N_1}{\partial\beta}-(1+r'^2)^{1/2}\left[r-\frac{\nu}{r''}(1+r'^2)\right]\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(2.06)$$

Podstawiając do powyższego równania za $\frac{\partial u}{\partial\beta}$ wyrażenie jakie uzyskuje się z trzeciego równania (2.05) a następnie różniczkując trzecie równanie (2.05) względem z i eliminując $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\beta}$ otrzymamy jedno równanie drugiego rzędu ze względu na v/r

$$\left.\begin{aligned}&rr''\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{v}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left[r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{r}\right)\right]=\frac{rr''}{2Eh}\left\{\left(\frac{1+r'^2}{rr''}+\frac{rr''}{1+r'^2}-2\nu\right)\frac{\partial N_1}{\partial\beta}-\right.\\&-(1+r'^2)^{1/2}\left[r-\frac{\nu}{r''}(1+r'^2)\right]\frac{\partial Z}{\partial\beta}-\\&\left.-\frac{2(1+\nu)}{(1+r'^2)^{1/2}}\left[r'S+h\frac{1+r'^2}{rr''}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{h}S\right)\right]\right\};\end{aligned}\right\}\quad(2.07)$$

przemieszczenia u i w wyrażają się przy tym następująco przez v/r

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial\beta}=-r^2(1+r'^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{1+\nu}{Eh}rS,\\&w=(1+r'^2)^{1/2}\frac{\partial v}{\partial\beta}+r'u-\frac{r}{2Eh}(1+r'^2)^{1/2}\left[\left(\frac{rr''}{1+r'^2}+\right.\right.\\&\left.\left.+\nu\right)N_1-r(1+r'^2)^{1/2}Z\right].\end{aligned}\right\}\quad(2.08)$$

Równania (2.03) i (2.07) pozwalają na określenie błonowego stanu naprężenia i przemieszczeń z dokładnością do czterech funkcji, z których dwie wyrażać będą zmianę sił, a dwie zmianę przemieszczeń na określonych liniach środkowej powierzchni powłoki. Po przedstawieniu zasadnych i poszukiwanych funkcji w postaci szeregów trygonometrycznych zmiennej β, co zostanie przeprowadzone w następnym ustępie, stanynaprężenia i przemieszczenia będą dla każdego wyrazu rozłożenia określone z dokładnością do czterech stałych. Stałe te wyznaczymy w taki sposób, aby uzyskać rozwiązanie, w którym siły błonowe zależne będą od dwóch amplitud sił na krawędzi dolnej, a przemieszczenia styczne na tej krawędzi przyjmować będą wartości zerowe. Wpływ przemieszczeń stycznych krawędzi dolnej uwzględniony zostanie bowiem przy wyznaczaniu zasadniczego stanu zgięciowego.

2.3. Błonowy stan naprężenia

Przedstawiając składowe obciążenia jak i siły wewnętrzne w formie pojedynczych szeregów trygonometrycznych zmiennej β

$$\left.\begin{aligned}
&X = \Sigma X_m \cos m\beta, \; Y = \Sigma Y_m \sin m\beta, \; Z = \Sigma Z_m \cos m\beta; \\
&N_1 = \Sigma N_{1m} \cos m\beta, \; N_2 = \Sigma N_{2m} \cos m\beta, \; S = \Sigma S_m \sin m\beta; \\
&\Phi = \Sigma \Phi_m \cos m\beta,
\end{aligned}\right\} \tag{2.09}$$

otrzymamy dla dowolnego m po podstawieniu do (2.03), (2.01) i (2.04)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left(r^2 \frac{d\Phi_m}{dz}\right) + m^2 r r'' \Phi_m = \frac{d}{dz}\left[r^3 (X_m + r' Z_m)\right] + \\
&+ r^2 (1+r'^2)^{1/2} m\left[Y_m + m(1+r'^2)^{1/2} Z_m\right];
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&N_{1m} = \frac{1}{r}(1+r'^2)^{1/2} \Phi_m, \\
&N_{2m} = r''(1+r'^2)^{-1/2} \Phi_m - r(1+r'^2)^{1/2} Z_m, \\
&S_m = \frac{-1}{m}\left[\frac{d\Phi_m}{dz} + r(X_m + r' Z_m)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Przyjmując, że rozwiązanie równania (2.10) powinno czynić zadość następującym warunkom brzegowym na dolnej krawędzi

$$\text{dla} \qquad z = z_d \quad N_{1m} = N_{1m}^{(d)}, \quad S_m = S_m^{(d)} \tag{2.12}$$

gdzie $N_{1m}^{(d)}$ i $S_m^{(d)}$ amplitudy zadanych sił stycznych, będziemy mogli nadać temu rozwiązaniu następującą postać

$$\left.\begin{aligned}
&N_{1m} = N_{1m}^{(o)} + N_{1mN} \cdot N_{1m}^{(d)} + N_{1mS} S_m^{(d)}, \; N_{2m} = N_{2m}^{(o)} + N_{2mN} \cdot \\
&\cdot N_{1m}^{(d)} + N_{2ms} S_m^{(d)}, \; S_m = S_m^{(o)} + S_{mN} \cdot N_{1m}^{(d)} + S_{ms} \cdot S_m^{(d)}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Występujące w powyższych wyrażeniach funkcje $N_{1m}^{(o)}$, $N_{2m}^{(o)}$ i $S_m^{(o)}$ przedstawiają wpływ obciążenia powierzchniowego na siły błonowe.

Przemieszczenia odpowiadające stanowi błonowemu określonemu wzorami (2.13) znajdziemy w oparciu o równanie (2.07). Przyjmując

$$u = \Sigma u_m \cos m\beta, \quad v = \Sigma v_m \sin m\beta, \quad w = \Sigma w_m \cos m\beta, \tag{2.14}$$

i podstawiając powyższe wyrażenia szeregowe do (2.07) i (2.08) otrzymamy dla dowolnego m

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left[r^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{v_m}{r}\right)\right]+m^2 rr''\left(\frac{v_m}{r}\right) = \frac{rr''}{2Eh}\left\{m\left(\frac{1+r'^2}{rr''}+\frac{rr''}{1+r'^2}-2\nu\right)N_{1m}-\right.\\ &-\frac{m}{r''}(1+r'^2)^{1/2}\left[rr''-\nu(1+r'^2)\right]Z_m+\\ &\left.+\frac{2(1+\nu)}{(1+r'^2)^{1/2}}\left[r' S_m+h\frac{1+r'^2}{rr''}\frac{d}{dz}\left(\frac{r}{h}S_m\right)\right]\right\}; \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_m=\frac{1}{m}\left[(1+r'^2)^{-1/2}r^2\frac{d}{dz}\left(\frac{v_m}{r}\right)-\frac{1+\nu}{Eh}\,r\,S_m\right], w_m = m(1+r'^2)^{1/2}v_m+\\ &+r' u_m - \frac{r}{2Eh}(1+r'^2)^{1/2}\left[\left(\frac{rr''}{1+r'^2}+\nu\right)N_{1m}-r(1+r'^2)^{1/2}Z_m\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Dla szczególnego przypadku powłoki o stałej grubości $h = \text{const}$, ostatni wyraz po prawej stronie równania (2.15) można zapisać prościej, a mianowicie

$$\frac{2(1+\nu)}{rr''}\frac{d}{dz}\left[(1+r'^2)^{1/2} r\, S_m\right]. \tag{2.15a}$$

Biorąc pod uwagę, że zasadniczy stan zgięciowy ujmować będzie wpływ stycznych przemieszczeń krawędzi dolnej, poszukiwać będziemy takiego rozwiązania równania (2.15), które by spełniało następujące warunki

$$\text{dla} \qquad z = z_d \qquad u_m = v_m = 0 \tag{2.17}$$

Rozwiązaniu temu będziemy mogli również nadać postać rozwiązania (2.13)

$$\left.\begin{aligned} &u_m = u_m^{(o)}+u_{mN}N_{1m}^{(d)}+U_{ms}S_m^{(d)}, \quad v_m = v_m^{(o)}+v_{mN}N_{1m}^{(d)}+v_{ms}S_m^{(d)},\\ &w_m = w_m^{(o)}+w_{mN}N_{1m}^{(d)}+w_{ms}S_m^{(d)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

przy czym występujące tu funkcje $u_m^{(o)}$ i $v_m^{(o)}$ przedstawiają wpływ obciążenia powierzchniowego.

Wyrażenia (2.13) i (2.18) pozwolą na określenie błonowego stanu naprężeń i przemieszczeń dla dowolnego obciążenia powierzchniowego z dokładnością do amplitud $N_{1m}^{(d)}$ i $S_m^{(d)}$ sił stycznych na dolnej krawędzi.

Rozwiązanie równań różniczkowych (2.10) i (2.15) dla powłoki walcowej i stożkowej sprowadza się jak wiadomo do kwadratury i dla obciążeń brzegowych i prostszych obciążeń wierzchniowych prowadzi do zamkniętych wzorów na siły i przemieszczenia p. [1], [3], [8]. Trudności mogą powstać dopiero przy bardziej złożonych obciążeniach powierzchniowych lub innych typach powłok obrotowych. W tych przypadkach korzystną okazać się może przy całkowaniu równań różniczkowych teorii błonowej, metoda ortogonalizacji, którą przedstawimy w następnym ustępie w zastosowaniu do niejednorodnych równań powłoki hiperboloidalnej.

2.4. Błonowy stan naprężenia w powłoce hiperboloidalnej

Równania (2.10) i (2.15) dla powłoki hiperboloidalnej sprowadzić można, stosując sposób zamiany zmiennych, do równań różniczkowych o stałych współczynnikach, dzięki czemu prosto uzyskuje się wzory zamknięte na siły błonowe dla obciążenia brzegowego i na przemieszczenia dla czysto zgięciowego stanu.

Z równania południka jednopowłokowej hiperboloidy obrotowej otrzymamy następujące wzory na promień r i jego pochodne względem zmiennej z

$$r = \frac{a}{b}(b^2+z^2)^{1/2}, \quad r' = \frac{a^2}{b^2}\frac{z}{r}, \quad r'' = \frac{a^4}{b^2}\frac{1}{r^3}, \qquad (2.19)$$

gdzie a, b, - półosie hiperboli.

Uwzględniając powyższe wyrażenia i wprowadzając nową zmienną niezależną α

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{b} \qquad (2.20)$$

czyniącą zadość równaniu różniczkowemu

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{b}{b^2+z^2} = \frac{a^2}{b}\frac{1}{r^2} \qquad (2.21)$$

– p. [10] str. 178, otrzymamy z równania różniczkowego (2.10) następujące równanie o stałych współczynnikach

$$\frac{d^2\Phi_m}{d\alpha^2} + m^2\Phi_m = -\frac{b}{a^2}\frac{d}{d\alpha}F_{1m} + m\frac{b^2}{a^4}F_{2m}, \qquad (2.22)$$

gdzie

$$F_{1m} = r^3(X_m + r'Z_m), \quad F_{2m} = (1+r'^2)^{1/2} r^4 \left[m(1+r'^2)^{1/2} Z_m + Y_m\right]. \qquad (2.23)$$

Wzory na amplitudy sił przyjmą tu następującą postać

$$\left.\begin{aligned} &N_{1m} = (1+r'^2)^{1/2}\frac{1}{r}\Phi_m, \quad N_{2m} = r''(1+r'^2)^{-1/2}\Phi_m - \\ &-(1+r'^2)^{1/2} r\, Z_m, \quad S_m = -\frac{1}{m}\left[\frac{a^2}{b}\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi_m}{d\alpha} + r(r'Z_m + X_m)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Wprowadzając nową zmienną α, do równania geometrycznego (2.15) otrzymamy również równanie o stałych współczynnikach

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{v_m}{r}\right) + m^2\left(\frac{v_m}{r}\right) = \frac{1}{2Eh}\Big\{m\Big[(1+r'^2)(r''r)^{-1} + \\ &+(1+r'^2)^{-1}r''r - 2\nu\Big] N_{1m} + 2(1+\nu)\Big[h\frac{b}{a^2}(1+r'^2)^{1/2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{r}{h}S_m\right) + \\ &+ (1+r'^2)^{-1/2} r' S_m\Big] - \frac{m}{r''}(1+r'^2)^{1/2}\Big[r''r - \nu(1+r'^2)\Big] Z_m\Big\}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Po wyznaczeniu $\frac{v_m}{r}$ z powyższego równania, amplitudy pozostałych przemieszczeń znajdziemy ze wzorów (2.15) uwzględniając, że $\frac{d}{dz} = \frac{a^2}{b\,r^2}\cdot\frac{d}{d\alpha}$ – p. (2.21).

W przypadku h = const. drugi wyraz po prawej stronie równania (2.25) można zapisać prościej i równaniu temu nadać następującą postać podobną do formy równania (2.22)

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{v_m}{r}\right) + m^2\left(\frac{v_m}{r}\right) = \frac{1}{2Eh}\left[2(1+\nu)\frac{b}{a^2}\frac{d}{d\alpha}G_{1m} + mG_{2m}\right], \qquad (2.25a)$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} G_{1m} &= (1+r'^2)^{1/2} r\, S_m, \\ G_{2m} &= \left(\frac{1+r'^2}{rr''} + \frac{rr''}{1+r'^2} - 2\nu\right) N_{1m} - \\ &- \frac{1}{r''}(1+r'^2)^{1/2}\left[rr'' - \nu(1+r'^2)\right] Z_m. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Dla przypadku brzegowego obciążenia powłoki równanie (2.22) przechodzi w jednorodne równanie różniczkowe.

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\alpha^2} + m^2 \Phi_m = 0, \tag{2.27}$$

którego całkę ogólną zapiszemy w postaci

$$\Phi_m = A_{1m} \sin m\alpha + A_{2m} \cos m\alpha \tag{2.28}$$

Wyznaczając stałe całkowania A z warunków (2.12) otrzymamy ze wzorów (2.24) następujące wyrażenia na funkcje występujące w (2.14)

$$\left.\begin{aligned} N_{1mN} &= \frac{r_d}{(1+r_d'^2)^{1/2}} \frac{(1+r'^2)^{1/2}}{r} f_{1m}^{(\alpha)}, \quad N_{1ms} = \frac{br_d^2}{a^2} \frac{(1+r'^2)^{1/2}}{r} f_{2m}^{(\alpha)}; \\ S_{mN} &= -\frac{a^2}{b}(1+r_d'^2)^{-1/2} r_d \frac{1}{r^2} f_{2m}^{(\alpha)}, \quad S_{ms} = r_d^2 \cdot \frac{1}{r^2} f_{1m}^{(\alpha)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

gdzie

$$f_{1m}^{(\alpha)} = \cos m(\alpha_d - \alpha), \quad f_{2m}^{(\alpha)} = \sin m(\alpha_d - \alpha). \tag{2.30}$$

W oparciu o jednostkowe stany naprężeń możemy utworzyć symetryczne i antysymetryczne stany naprężeń, które wykorzystamy przy całkowaniu równań geometrycznych. Łatwo stwierdzić, że do dając do jednostkowego stanu $N_{1m}^{(d)} = 1$ raz stan dla $S_m = k_s$, a drugi raz stan dla $S_m^{(d)} = k_a$, gdzie

$$k_s = \frac{a^2}{br_d}(1+r_d'^2)^{-1/2} \operatorname{tg} m\alpha_d, \quad k_a = \frac{-a^2}{br_d}(1+r_d'^2)^{-1/2} \operatorname{ctg} m\alpha_d, \tag{2.31}$$

otrzymamy w pierwszym przypadku symetryczny stan naprężenia, a w drugim stan antysymetryczny. Wartości sił określają przy tym wzory dla symetrii

$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(s)} &= \frac{r_d}{(1+r_d'^2)^{1/2}} \frac{(1+r'^2)^{1/2}}{r} \frac{\cos m\alpha}{\cos m\alpha_d}, \quad S_m^{(s)} = \\ &= \frac{a^2}{b} \frac{r_d}{(1+r_d'^2)^{1/2}} \frac{1}{r^2} \frac{\sin m\alpha}{\cos m\alpha_d} \end{aligned}\right\} \qquad (2.32a)$$

dla antysymetrii

$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(a)} &= \frac{r^d}{(1+r_d'^2)^{1/2}} \frac{(1+r^2)^{1/2}}{r} \frac{\sin m\alpha}{\sin m\alpha_d}, \quad S_m^{(a)} = \\ &= -\frac{a^2}{b} \frac{r_d}{(1+r_d'^2)^{1/2}} \frac{1}{r^2} \frac{\cos m\alpha}{\sin m\alpha_d} \end{aligned}\right\} \qquad (2.32b)$$

W przypadku powierzchniowego obciążenia powłoki rozwiązanie równania (2.22) sprowadzić można do kwadratury stosując znany sposób uzmiennienia stałych. Z uwagi jednak na złożoną postać funkcji F_1 i F_2 takie rozwiązanie wymagać będzie rozłożenia funkcji w szereg. Można również bezpośrednio poszukiwać rozwiązania tego równania w formie szeregowej, np. w postaci szeregów trygonometrycznych w oparciu o metodę ortogonalizacji.

W tym przypadku wpierw poszukiwać będziemy całki szczególnej równania (2.22) w postaci szeregu

$$\Phi_m = \Sigma a_{mi} \cdot \Phi_{mi} \qquad i = 1,2,3, \ldots n \qquad (2.33)$$

abstrahując od spełnienia a priori warunków brzegowych (2.12), którym uczynić będzie można zadość później przez dodanie do rozwiązania szeregowego rozwiązania zadania jednorodnego, wzory (2.29).

Stosując metodę ortogonalizacji do równania (2.22) możemy zapisać

$$\int_{\alpha}^{\alpha_d} \left[\Sigma a_{mi} \left(\frac{d^2\Phi_{mi}}{d\alpha^2} + m^2\Phi_{mi} \right) + \frac{b}{a^2} \frac{d}{d\alpha} F_{1m} - m \frac{b^2}{a^4} F_{2m} \right] \Phi_{mk} d\alpha = 0, \qquad (2.34)$$

$$k = 1,2,3 \ldots n$$

co prowadzi do układu n rowńań algebraicznych ze względu na parametry a_{mi}

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} a_{mi} = \Delta_k. \qquad k = 1,2,3 \ldots n \qquad (2.35)$$

Współczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne tego układu znajdziemy z następujących wzorów

$$\delta_{ki} = \int_{\alpha_g}^{\alpha_d} \left(\frac{d^2}{d\alpha^2}\Phi_{mi} + m^2 \Phi_{mi}\right)\Phi_{mk} d\alpha , \tag{2.36a}$$

$$\Delta_k = \frac{b}{a^2}\left[\int_{\alpha_g}^{\alpha_d} \left(m\frac{b}{a^2}F_{2m} + F_{1m}\frac{d\Phi_{mk}}{d\alpha}\right)d\alpha - \left| F_{1m}\Phi_{mk}\right|_{\alpha_g}^{\alpha_d}\right]. \tag{2.36b}$$

W rozwiązaniu szeregowym (2.33) z reguły korzystne będzie rozłożenie obciążenia powierzchniowego na symetryczne i antysymetryczne ze względu na zmienną α i wyznaczenie osobno funkcji naprężeń dla symetrii i osobno dla antysymetrii.

Równanie różniczkowe czysto zgięciowego stanu naprężenia otrzymamy z równania (2.25) przyjmując zero po jego prawej stronie

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{v_m}{r}\right) + m^2\left(\frac{v_m}{r}\right) = 0. \tag{2.37}$$

Wyznaczając stałe całkowanie B_m występujące w ogólnej całce równania (2.37)

$$\frac{v_m}{r} = B_{1m}\sin m\alpha + B_{2m}\cos m\alpha \tag{2.38}$$

z warunków

$$\text{dla} \quad \alpha = \alpha_d \qquad u_m = u_m^{(d)}, \qquad v_m = v_m^{(d)}, \tag{2.39}$$

możemy rozwiązaniu nadać następującą ogólną postać

$$\left.\begin{aligned} &u_m = u_{mu}u_m^{(d)} + u_{mv}\cdot v_m^{(d)}, \quad v_m = v_{mu}u_m^{(d)} + v_{mv}v_m^{(d)},\\ &w_m = w_{mu}u_m^{(d)} + w_{mv}v_m^{(d)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} &u_{mu} = (1+r_d'^2)^{1/2}(1+r'^2)^{-1/2} f_{1m}^{(\alpha)}, u_{mv} = \frac{a^2}{br_d}(1+r^2)^{-1/2} f_{2m}^{(\alpha)};\\ &v_{mu} = -\frac{b}{a^2}(1+r_d'^2)^{1/2} r\, f_{2m}^{(\alpha)}, \quad v_{mv} = \frac{r}{r_d} f_{1m}^{(\alpha)};\\ &w_{mu} = \frac{b}{a^2}(1+r_d'^2)^{1/2}(1+r'^2) r \frac{d}{d\alpha}\left[(1+r'^2)^{-1/2} f_{1m}^{(\alpha)}\right],\\ &w_{mv} = \frac{r}{r_d}(1+r'^2)\frac{d}{d\alpha}\left[(1+r'^2)^{-1/2} f_{2m}^{(\alpha)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

Poszukiwać będziemy rozwiązania pełnego równania (2.25) czyniącego zadość warunkom (2.17), jako sumy szczególnego rozwiązania pełnego równania w postaci

$$\frac{v_m}{r} = \sum b_{mi} \left(\frac{v_m}{r}\right)_i , \tag{2.42}$$

i ogólnego rozwiązania równania uproszczonego wg (2.39)i(2.40).

Stosując metodę ortogonalizacji do równania (2.25) sprowadzimy rozwiązanie szczególne, podobnie jak w przypadku zadania statycznego, do układu n równań algebraicznych ze względu na parametry b_{mi}; współczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne układu dla h = const. obliczymy teraz z następujących wzorów

$$\delta_{ki} = \int_{\alpha_g}^{\alpha_d} \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{v_m}{r}\right)_i + m^2 \left(\frac{v_m}{r}\right)_i \right] \left(\frac{v_m}{r}\right)_k d\alpha , \tag{2.43a}$$

$$\Delta_k = \frac{1}{2Eh} \left\{ 2(1+\nu) \frac{b}{a^2} \left[-\int_{\alpha_g}^{\alpha_d} G_{1m} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{v_m}{r}\right)_k d\alpha + \left| G_{1m} \left(\frac{v_m}{r}\right)_k^{\alpha_g} \right|_{\alpha_g}^{\alpha_d} \right] + m \int_{\alpha_g}^{\alpha_d} G_{2m} \left(\frac{v_m}{r}\right)_k d\alpha \right\} . \tag{2.43b}$$

Podobne wzory otrzymuje się dla powłoki o zmiennej grubości h . W rozwiązaniu szczególnym pełnego równania geometrycznego korzystne będzie również rozłożenie zadania na symetryczne i antysymetryczne. Przy wyznaczaniu przemieszczeń od obciążeń brzegowych należy, przy takim rozłożeniu, korzystać ze wzorów (2.32) na siły wewnętrzne i w miejsce jednego szeregu (2.42) poszukiwać dwóch szeregów, z których jeden określać będzie symetryczny, a drugi - antysymetryczny stan przemieszczeń. Dodając do siebie stany symetryczny i antysymetryczny pomnożone przez odpowiednie współczynniki, otrzymamy w wyniku szczególny stan przemieszczeń odpowiadający pewnym obciążeniom brzegowym, w szczególności jednostkowym obciążeniom na krawędzi dolnej. Szczegóły związane z takim obliczeniem przedstawione zostaną w pierwszym przykładzie liczbowym w ustępie 5.1.

2.5. Wpływ temperatury

Równania (2.10) i (2.15) stanu błonowego pozwolą w większości przypadków, wyznaczyć stan naprężenia w powłokach obrotowych poddanych wpływowi temperatury. Rozwiązanie dowolnej powłoki na działanie temperatury, zarówno przy równomiernym jak i liniowo zmiennym rozkładzie temperatury na grubości powłoki, sprowadzić można rozwiązania powłoki obciążonej pewnym zastępczym obciążeniem powierzchniowym o składowych $X^{(t)}$, $Y^{(t)}$, $Z^{(t)}$ i pewnymi siłami i momentami przyłożonymi na brzegach.

Jeśli obciążenie powierzchniowe oraz brzegowe siły styczne nie będą wyrażać się przy pomocy zbyt szybko zmieniających się funkcji, wówczas można do wyznaczenia zasadniczego stanu naprężenia zastosować teorię błonową, a wpływ obciążenia brzegów siłą tnącą i momentem zginającym określić za pomocą teorii zaburzenia brzegowego.

Oznaczając przez $T = t_o + \frac{z}{2h}\Delta t$ temperaturę w dowolnym włóknie powłoki odległym o z od powierzchni środkowej a przez α_t współczynnik rozszerzalności liniowej, możemy zapisać następujące wyrażenia na składowe odkształcenia termicznego

$$\varepsilon_1^{(t)} = \varepsilon_2^{(t)} = \alpha_t t_o, \gamma^{(t)} = 0; \varkappa_1^{(t)} = \varkappa_2^{(t)} = \alpha_t \frac{\Delta t}{2h}, \tau = 0. \quad (2.45)$$

Podstawiając (2.45) z przeciwnymi znakami do najprostszego wariantu równań fizycznych teorii powłok [8] str. 50 (p. załącznik Nr 1 równania (VI)) otrzymamy wyrażenia na siły styczne i momenty zginające, które należy przyłożyć do elementów powłoki aby zlikwidować odkształcenia termiczne

$$N_1^{(t)} = N_2^{(t)} = N^{(t)} = -\frac{Eh}{2(1-\nu)}\alpha_t t_o, M_1^{(t)} = M_2^{(t)} = M^{(t)} = -\frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t \Delta t; \quad (2.46)$$

rozkładając funkcje t_o i Δt w szeregi trygonometryczne zmiennej β

$$t_o = \Sigma t_{om} \cos m\beta, \quad \Delta t = \Sigma \Delta t_m \cos m\beta, \quad (2.47)$$

otrzymamy na amplitudy $N_m^{(t)}$ i $M_m^{(t)}$

$$N_m^{(t)} = -\frac{Eh}{2(1-\nu)}\alpha_t t_{om}, \quad M_m^{(t)} = -\frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t \Delta t_m. \quad (2.48)$$

Składowe $X^{(t)}$, $Y^{(t)}$ i $Z^{(t)}$ obciążenia zastępczego uzyskamy z równań równowagi ogólnej teorii [8] str. 36 i 37 (p. załącznik Nr 1 równania (I)) podstawiając za siły i momenty wyrażenia

(2.46) wzięte ze znakiem przeciwnym. Biorąc pod uwagę (2.09) i (2.58) otrzymamy w ten sposób następujące wyrażenia na amplitudy tych składowych

$$\left.\begin{aligned}
X_m^{(t)} &= (1+r'^2)^{-1/2} \frac{d}{dz} N_m^{(t)} - r''(1+r'^2)^{-2} \frac{d}{dz} M_m^{(t)}, \\
Y_m^{(t)} &= -\frac{m}{r}\left[N_m^{(t)} + (1+r'^2)^{-1/2} M_m^{(t)}\right], \\
Z_m^{(t)} &= (1+r'^2)^{-1/2}\left[\frac{1}{r} - r''(1+r'^2)^{-1}\right] N_m^{(t)} - \\
&-(1+r'^2)^{-1/2}\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dz}\left[(1+r'^2)^{-1/2} r \frac{d}{dz} M_m^{(t)}\right] - m^2(1+r'^2)^{1/2}\frac{1}{r} M_m^{(t)}\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (2.49)$$

gdzie $N_m^{(t)}$ i $M_m^{(t)}$ wg (2.48)

Wprowadzając powyższe składowe do równania statycznego(2.10) i całkując je dla warunków brzegowych

$$\text{dla} \quad z = z_d \qquad N_{1m} = -N_m^{(t)}, \qquad S_m = 0 \qquad (2.50)$$

otrzymamy wyrażenia na siły wewnętrzne będące wynikiem odkształceń sprężystych powłoki, które podstawione do równania (2.15) pozwolą na obliczenie przemieszczeń powłoki poddanej wpływom temperatury. W przypadku powłoki stężonej za pomocą wiotkich elementów brzegowych w rozwiązaniu należy uwzględnić wpływ momentów zasadniczego stanu zgięciowego.

Rzeczywiste siły w powłoce od wpływu temperatury znajdziemy dodając siły (2.48) do sił odpowiadających obciążeniu powierzchniowemu (2.49) i siłom brzegowym (2.50).

2.6. Zasadniczy stan zgięciowy: powłoka walcowa i stożkowa

Wyznaczenie zasadniczego stanu zgięciowego polegać będzie na obliczeniu fikcyjnego obciążenia powierzchniowego odpowiadającego momentom stanu czysto zgięciowego z równań równowagi wewnętrznej ogólnej teorii i eliminacji wpływu tego obciążenia w oparciu o równanie równowagi teorii błonowej. W wyniku otrzymamy rozwiązanie powłoki obciążonej na brzegach samozrównoważonymi układami sił.

Różniczkowe równanie geometryczne stanu czysto zgięciowego ze względu na amplitudę v_m otrzymamy z równania (2.15) przyjmując zero po jego prawej stronie

$$\frac{d}{dz}\left[r^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{v_m}{r}\right)\right] + m^2 r r''\left(\frac{v_m}{r}\right) = 0; \qquad (2.51)$$

amplitudy pozostałych przemieszczeń znajdziemy ze wzorów

$$u_m = \frac{1}{m}\left[r^2(1+r'^2)^{-1/2}\frac{d}{dz}\left(\frac{v_m}{r}\right)\right], \quad w_m = m(1+r'^2)^{1/2}\, v_m + r' u_m. \tag{2.52}$$

Całkując równanie (2.51) dla warunków brzegowych

$$\text{dla} \qquad z = z_d \qquad u_m = u_m^{(d)}, \qquad v_m = v_m^{(d)}, \tag{2.53}$$

otrzymamy wyrażenia na przemieszczenia stanu czysto zgięciowego, którym będziemy mogli nadać następującą postać

$$\left.\begin{aligned} & u_m = u_{mu}u_m^{(d)} + u_{mv}v_m^{(d)}, \quad v_m = v_{mu}u_m^{(d)} + v_{mv}v_m^{(d)}, \\ & w_m = w_{mu}u_m^{(d)} + w_{mv}v_m^{(d)} \end{aligned}\right\} \tag{2.54}$$

Wyrażenia na składowe odkształcenia stanu zgięciowego przyjmujemy wg [8] str.25 - biorąc pod uwagę przyjęty w ustępie 2.2 zwrot przemieszczenia w - p. rys. 2 (załącznik Nr 1 równania (II)). Przedstawiając składowe odkształcenia w formie szeregów trygonometrycznych

$$\varkappa_1 = \sum \varkappa_{1m}\cos m\beta, \quad \varkappa_2 = \sum \varkappa_{2m}\cos m\beta, \quad \tau = \sum \tau_m \sin m\beta, \tag{2.55}$$

oraz uwzględniając (2.14) i (2.54) będziemy mieli

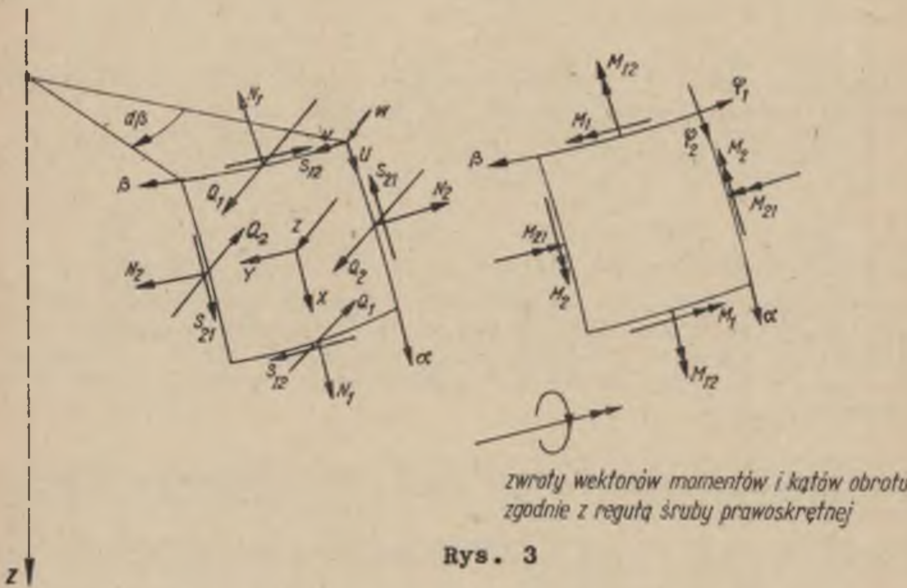
$$\left.\begin{aligned} & \varkappa_{1m} = \varkappa_{1mu}u_m^{(d)} + \varkappa_{1mv}v_m^{(d)}, \quad \varkappa_{2m} = \varkappa_{2mu}u_m^{(d)} + \varkappa_{2mv}v_m^{(d)}, \\ & \tau_m = \tau_{mu}u_m^{(d)} + \tau_{mv}v_m^{(d)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{1mu} &= (1+r'^2)^{-1/2}\frac{d}{dz}\left[(1+r'^2)^{-1/2}\frac{dw_{mu}}{dz} - r''(1+r'^2)^{-3/2}u_{mu}\right], \\ \varkappa_{2mu} &= \frac{r'}{r}\left[(1+r'^2)^{-1}\frac{dw_{mu}}{dz} - r''(1+r'^2)^{-2}u_{mu}\right] + \\ &\quad + m(1+r'^2)^{-1/2}\frac{1}{r^2}v_{mu} - m^2\frac{1}{r^2}w_{mu}, \\ \tau_{mu} &= -\frac{m}{r}(1+r'^2)^{-1/2}\left(\frac{dw_{mu}}{dz} - \frac{r'}{r}w_{mu}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{r}(1+r'^2)^{-1}\left(\frac{dv_{mu}}{dz} - \frac{r'}{r}v_{mu}\right) + m\frac{r''}{r}(1+r'^2)^{-3/2}u_{mu} \end{aligned}\right\} \tag{2.57}$$

Amplitudy momentów zginających i skręcających, p. rys. 3

$$M_1 = \sum M_{1m} \cos m\beta, \quad M_2 = \sum M_{2m} \cos m\beta, \quad M_{12} = \sum M_{12m} \sin m\beta \qquad (2.58)$$



Rys. 3

znajdziemy wychodząc z najprostszego wariantu równań fizycznych teorii powłok, przy czym będziemy mogli również zapisać je w formie

$$\left.\begin{aligned} M_{1m} &= M_{1mu} u_m^{(d)} + M_{1mv} v_m^{(d)}, \quad M_{2m} = M_{2mu} u_m^{(d)} + M_{2mv} v_m^{(d)} \\ M_{12m} &= M_{12mu} u_m^{(d)} + M_{12mv} v_m^{(d)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.59)$$

gdzie np.

$$\left.\begin{aligned} M_{1mu} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\varkappa_{1mu} + \nu \varkappa_{2mu}), \quad M_{2mu} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\varkappa_{2mu} + \nu \varkappa_{1mu}), \\ M_{12mu} &= \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)} \tau_{mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.60)$$

Składowe X, Y, Z fikcyjnego obciążenia powierzchniowego odpowiadającego momentom (2.58) znajdziemy z równań różniczkowych równowagi wewnętrznej ogólnej teorii, np. [8] str. 37 i

36, pomijając w nich siły błonowe (załącznik Nr 1 równania(I)). Uwzględniając (2.09) oraz (2.58) i (2.59) będziemy mogli zapisać na amplitudy tych składowych

$$\left.\begin{aligned} X_m &= X_{mu}u_m^{(d)}+X_{mv}v_m^{(d)}, \quad Y_m = Y_{mu}u_m^{(d)} + Y_{mv}v_m^{(d)}, \\ Z_m &= Z_{mu}u_m^{(d)} + Z_{mv}v_m^{(d)}; \end{aligned}\right\} \quad (2.61)$$

we wzorach tych oznacza

$$\left.\begin{aligned} X_{mu} &= r''(1+r'^2)^{-3/2}Q_{1mu}, \quad Y_{mu} = -\frac{1}{r}(1+r'^2)^{-1/2}Q_{2mu}, \\ Z_{mu} &= \frac{1}{r}(1+r'^2)^{-1/2}\left[\frac{d}{dz}(rQ_{1mu}) + m(1+r'^2)^{1/2}Q_{2mu}\right], \end{aligned}\right\} \quad (2.62)$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} Q_{1mu} &= \frac{1}{r}(1+r'^2)^{-1/2}\left[\frac{d}{dz}(rM_{1mu}) + m(1+r'^2)^{1/2}M_{12mu}-r'M_{2mu}\right], \\ Q_{2mu} &= \frac{1}{r}(1+r'^2)^{-1/2}\left[r\frac{d}{dz}M_{12mu}-m(1+r'^2)^{1/2}M_{2mu}+2r'M_{12mu}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.63)$$

Wzory dla wpływu $v_m^{(d)}$ otrzymamy wprowadzając w (2.62) i (2.63) w miejsce wskaźnika u - wskaźnik v.

W celu wyeliminowania wpływu fikcyjnego obciążenia powierzchniowego należy z kolei rozwiązać powłokę obciążoną siłami $-X$, $-Y$, $-Z$; podstawiając do równania (2.10) za X_m, Y_m, Z_m, wyrażenia (2.61) wzięte z przeciwnymi znakami i całkując to równania dla warunków brzegowych.

$$\text{dla} \qquad z = z_d, \qquad N_{1m} = S_m = 0 \qquad (2.64)$$

otrzymamy z (2.11) wzory na amplitudy sił błonowych, które będziemy mogli zapisać w postaci

$$\left.\begin{aligned} N_{1m} &= N_{1mu}u_m^{(d)}+N_{1mv}v_m^{(d)}, \quad N_{2m} = N_{2mu}u_m^{(d)}+N_{2mv}v_m^{(d)}, \\ S_m &= S_{mu}u_m^{(d)} + S_{mv}v_m^{(d)} \end{aligned}\right\} \quad (2.65)$$

Z powyższych wzorów w szczególności otrzymać możemy wyrażenia na amplitudy $N_{1m}^{(g)}$, $S_m^{(g)}$ sił błonowych na krawędzi górnej i w oparciu o nie wyrazić amplitudy przemieszczeń $u_m^{(d)}$, $v_m^{(d)}$ przez amplitudy $N_{1m}^{(g)}$ i $S_m^{(g)}$

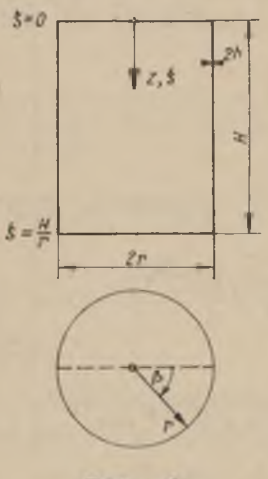
$$u_m^{(d)} = u_{mN}^{(d)} N_m^{(g)}+u_{ms}^{(d)}S_m^{(g)}, \quad v_m^{(d)} = v_{mN}^{(d)}N_m^{(g)}+v_{ms}^{(d)}S_m^{(g)} \qquad (2.66)$$

Wzory (2.66) łącznie ze wzorami (2.59) i (2.65) pozwolą na określenie zasadniczego zgięciowego stanu naprężenia w powłoce obrotowej, obciążonej na krawędzi górnej samozrównoważonymi układami sił błonowych o amplitudach $N_{1m}^{(g)}$, $S_m^{(g)}$. Wzory (2.59) i (2.65) natomiast, umożliwiają wyznaczenie stanu zgięciowego w przypadku zadanych przemieszczeń stycznych na krawędzi dolnej.

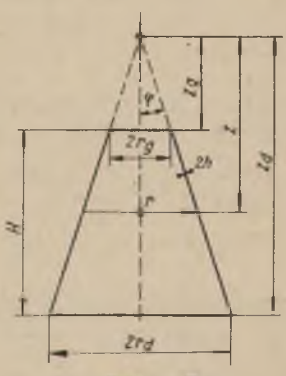
W artykule [7] wyprowadzone zostały w opisany wyżej sposób wzory na siły i momenty zasadniczego stanu zgięciowego dla powłoki walcowej i stożkowej.

Dla powłoki walcowej rys. 4, uzyskano proste wzory, które dla warunków brzegowych (2.64) przyjmują następującą postać

$$
\left.
\begin{aligned}
N_{1mu} &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)^2\frac{m^4}{r^3}\left[\zeta^3/6 - H/r\,\zeta^2/2 + 1/2(H/r)\zeta^2 - 1/6(H/r)^3\right],\\
N_{1mv} &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)^2\frac{m^3}{r^3}\left[\zeta^2/2 - H/r\,\zeta + 1/2(H/r)^2\right];\\
N_{2mu} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)\frac{m^4}{r^3}(\zeta - H/r),\quad N_{2mv} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)\frac{m^3}{r^3};\\
S_{mu} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)^2\frac{m^3}{r^3}\left[\zeta^2/2 - H/r\,\zeta + 1/2(H/r)^2\right],\\
S_{mv} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)^2\frac{m^2}{r^3}\left[\zeta - H/r\right];
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.67a)
$$



Rys. 4



Rys. 5

$$\left.\begin{aligned} &M_{2mu} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)\frac{m^2}{r^2}(\zeta - H/_r),\ M_{2mv} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(m^2-1)\frac{m}{r^2};\\ &M_{1m} = \nu M_{2m};\ M_{12mu} = -\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}(m^2-1)\frac{m}{r^2},\ M_{12mv} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (2.67b)$$

gdzie $\zeta = \frac{z}{r}$.

Dla powłoki stożkowej rys. 5, również uzyskano zamknięte wzory, którym dla warunków brzegowych (2.64) nadać można następującą postać

$$\left.\begin{aligned} &N_{1mu} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m^2(m^2-1)(1+tg^{-2}\varphi)^{1/2}\Big\{m^2(m^2-1)A_1\left[(1+\ln\zeta)^{1/\zeta}-1\right]^{1/\zeta} -\\ &\quad - 1/2A_2\left[{}^1/_{\zeta^2} - {}^2/_\zeta + 1\right]^1/_\zeta - (A_3+A_4)(1/\zeta - 1)^1/_\zeta\Big\};\\ &N_{1mv} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m(m^2-1)(1+tg^{-2}\varphi)^{1/2}\Big\{m^2(m^2-1)A_5\big[(1+\\ &\quad +\ln\zeta)^1/_\zeta - 1\big]^1/_\zeta - tg\varphi A_6({}^1/_\zeta - 1)^1/_\zeta\Big\};\\ &N_{2mu} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m^2(m^2-1)(1+tg^{-2}\varphi)^{1/2}(A_4\ {}^1/_\zeta + A_3)^1/_{\zeta^2},\\ &N_{2mv} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m(m^2-1)A_3\ {}^1/_{\zeta^2},\\ &S_{mu} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m(m^2-1)\big[m^2(m^2-1)A_1\ {}^1/_{\zeta^2}\ \ln\zeta +\\ &\quad +(A_4-A_2)({}^1/_\zeta - 1)^1/_{\zeta^2}\big],\\ &S_{mv} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m^2(m^2-1)^2A_5\ {}^1/_{\zeta^2}\ \ln\zeta; \end{aligned}\right\} \quad (2.68a)$$

$$\left.\begin{aligned} &M_{2mu} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m^2(m^2-1)(tg\varphi + \frac{1}{tg\varphi})\frac{1}{r_d^2}({}^1/_\zeta - 1)^1/_\zeta,\\ &M_{1mu} = \nu M_{2mu};\\ &M_{2mv} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} m(m^2-1)(1+tg^2\varphi)^{1/2}\frac{1}{\zeta},\ M_{1mv} = \nu M_{2mv}\\ &M_{12mu} = -\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)} m(m^2-1)(1+tg^2\varphi)^{1/2}\frac{1}{r_d^2}\frac{1}{\zeta^2},\ M_{12mv} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2.68b)$$

gdzie $\zeta = \frac{z}{z_d}$.

W powyższych wzorach wprowadzono następujące dodatkowe oznaczenia

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 \frac{1}{r_d^3},\\
A_2 &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}\left\{A_4\left[m^2+(m^2+1)\operatorname{tg}^2\varphi\right] + m^2\frac{1}{r_d^3}(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\right\},\\
A_3 &= \frac{1}{r_d^3}\left[m^2+(m^2-1)\operatorname{tg}^2\varphi\right], \quad A_4 = -\frac{1}{r_d^3}\left[m^2+(m^2-4)\operatorname{tg}^2\varphi\right]\\
A_5 &= (1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\, r_d^3}, \quad A_6 = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{1/2}}A_3
\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

W następnym ustępie rozpatrzymy zasadniczego stanu zgięciowego dla powłoki hiperboloidalnej. Jak się okaże, w tym przypadku nie można już uzyskać wzorów zamkniętych na siły błonowe. Składowe fikcyjnego obciążenia powierzchniowego wyrażają się przez tak złożone funkcje, że możliwe jest ty'ko numeryczne lub szeregowe rozwiązanie równania statycznego (2.10).

2.7. Zasadniczy stan zgięciowy w powłoce hiperboloidalnej

Równanie stanu czysto zgięciowego dla powłoki hiperboloidalnej oraz wzory na amplitudy przemieszczeń u_m i v_m dla warunków brzegowych

$$\text{dla} \qquad \alpha = \alpha_d, \qquad u_m = u_m^{(d)}, \qquad v_m = v_m^{(d)}, \tag{2.70}$$

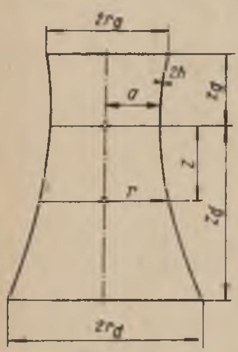
podane zostały w ustępie 2.4. równanie (2.37), wzory (2.40) i (2.41).

Składowe odkształcenia zgięciowego obliczymy z ogólnych wzorów (2.57). Z uwagi na dość złożoną postać tych wzorów oraz fakt, że występują w nich pochodne przemieszczeń względem zmiennej z a funkcja rozwiązująca v_m/r jest funkcją zmiennej α, wprowadzono dla uproszczenia zapisu następujące oznaczenia dla najczęściej występujących funkcji

$$\left.\begin{aligned}
g_1(z) &= (1+r'^2)^{-1/2}, \qquad & g_2(z) &= \frac{a^2}{b}\frac{1}{r^2},\\
g_3(z) &= (1+r'^2)r^3, & g_4(z) &= r'' g_1^3(z),\\
g_5(z) &= -\frac{r'}{r}g_1(z).
\end{aligned}\right\} \tag{2.71}$$

Wyrażenia na pochodne tych funkcji podane zostały w załączniku Nr 2.

Pochodne amplitud przemieszczeń $u_m^{(u)}$ i $u_m^{(v)}$ względem zmiennej z można teraz przedstawić następująco



Rys. 6

$$
\left.
\begin{aligned}
(u_{mu})^{(n)} &= (1+r_d'^2)^{1/2}(\bar{u}_{mu})^{(n)} = \\
&=(1+r_d'^2)^{1/2}\Big[(\bar{u}_{mu})^{(n)}_{f_1} f_1(\alpha) \\
&+ (\bar{u}_{mu})^{(n)}_{f_2} f_2(\alpha)\Big], \\
(u_{mv})^{(n)} &= \frac{a^2}{br_d}(\bar{u}_{mv})^{(n)} = \\
&=\frac{a^2}{br_d}\Big[(\bar{u}_{mv})^{(n)}_{f_1} f_1^{(\alpha)}+(\bar{u}_{mv})^{(n)}_{f_2} f_2(\alpha)\Big]
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.72)
$$

gdzie $f_1^{(\alpha)}$ i $f_2^{(\alpha)}$ przedstawiają wzory (2.30), a funkcje $(\bar{u}_{mu})^{(n)}_{f_1}$ i $(\bar{u}_{mu})^{(n)}_{f_2}$ wyrażają się następująco przez $g_1(z)$ i $g_2(z)$ i ich pochodne

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\bar{u}_{mu})_{f_1} = g_1,\ (\bar{u}_{mu})_{f_2} = 0; \\
&(\bar{u}_{mu})'_{f_1} = g_1,\ (\bar{u}_{mu})'_{f_2} = mg_1g_2\ ; \\
&(\bar{u}_{mu})''_{f_1} = g_1'' - g_1g_2^2m,\ (\bar{u}_{mu})''_{f_2} = 2mg_1'g_2 + mg_1g_2'; \\
&(\bar{u}_{mu})'''_{f_1} = g_1''' - 3g_1'g_2^2\, m^2 - 3m^2g_1g_2'g_2, \\
&(\bar{u}_{mu})'''_{f_2} = m(3g_1''g_2 + 3g_1'g_2' + g_1g_2'' - m^2g_1g_2^3)\ ; \\
&(\bar{u}_{mu})^{(IV)}_{f_1} = g_1^{(IV)}-6m^2g_1''g_2^2-12m^2g_1'g_2'g_2 \\
&-4m^2g_1g_2''g_2-3m^2g_1g_2'^2+m^4g_1g_2^4, \\
&(\bar{u}_{mu})^{(IV)}_{f_2} = m(4g_1'''g_2+6g_1''g_2'+4g_1'g_2''+g_1g_2'''-4m^2g_1'g_2^3-6m^2g_1g_2'g_2^2);
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.73)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(\bar{u}_{mu})^{(V)}_{f_1} &= g_1^{(V)} - 10m^2 g_1''' g_2^2 - 30m^2 g_1'' g_2' g_2 - 15m^2 g_1' g_2'^2 - 20m^2 g_1' g_2'' g_2 - \\
&- 10m^2 g_1 g_2'' g_2' - 5m^2 g_1 g_2''' g_2 + 5m^4 g_1' g_2^4 + 10m^4 g_1 g_2' g_2^3; \\
(\bar{u}_{mu})^{(V)}_{f_2} &= m(5g_1^{(IV)} g_2 + 10 g_1''' g_2' + 10 g_1'' g_2'' + 5 g_1' g_2''' + g_1 g_2^{(IV)} - \\
&-10m^2 g_1'' g_2^3 - 30m^2 g_1' g_2' g_2^2 - 10m^2 g_1 g_2'' g_2^2 - 15m^2 g_1 g_2'^2 g_2 + m^4 g_1 g_2^5).
\end{aligned}\right| \quad (2.73)
$$

Pochodne funkcji występujących w drugim wyrażeniu (2.72) znajdziemy ze wzorów

$$
(\bar{u}_{mv})^{(n)}_{f_1} = -(\bar{u}_{mu})^{(n)}_{f_2}, \quad (\bar{u}_{mv})^{(n)}_{f_2} = (\bar{u}_{mu})^{(n)}_{f_1} \qquad (2.74)
$$

Analogicznie przedstawić można pochodne amplitud $v_m^{(u)}$ i $v_m^{(v)}$

$$
\left.\begin{aligned}
(v_{mu})^{(n)} &= -\frac{b}{a^2}(1+r_d'^2)^{1/2}(\bar{v}_{mu})^{(n)} = \\
&= -\frac{b}{a^2}(1+r_d'^2)^{1/2}\left[(\bar{v}_{mu})^{(n)}_{f_1} f_1(\alpha) + (\bar{v}_{mu})^{(n)}_{f_2} f_2(\alpha)\right], \\
(v_{mv})^{(n)} &= \frac{1}{r_d}(\bar{v}_{mv})^{(n)} = \frac{1}{r_d}\left[(\bar{v}_{mv})^{(n)}_{f_1} f_1^{(\alpha)} + (\bar{v}_{mv})^{(n)}_{f_2} f_2^{(\alpha)}\right]
\end{aligned}\right| \quad (2.75)
$$

przy czym

$$
(\bar{v}_{mv})^{(n)}_{f_1} = (\bar{v}_{mu})^{(n)}_{f_2}, \quad (\bar{v}_{mv})^{(n)}_{f_2} = -(\bar{v}_{mu})^{(n)}_{f_1}, \qquad (2.76)
$$

a $(\bar{v}_{mu})^{(n)}_{f_1}$ i $(\bar{v}_{mu})_{f_2}$ znajdziemy ze wzorów (2.73) wprowadzając funkcję $r(z)$ w miejsce funkcji $g_1(z)$.

Wyrażając pochodne względem α przez pochodne względem z we wzorach na amplitudy w_{mu} i w_{mv} możemy tym wzorom nadać teraz następującą postać

$$
w_{mu} = \frac{b^2}{a^4}(1+r_d'^2)^{1/2} g_3(z)(\bar{u}_{mu}), \quad w_{mv} = \frac{b}{a^2 r_d} g_3(z)(\bar{u}_{mv})' \qquad (2.77)
$$

Pochodne powyższych amplitud znajdziemy łatwo ze znanych wzorów na pochodne iloczynu dwóch funkcji.

Biorąc pod uwagę oznaczenia (2.71) i wyrażenia (2.77), otrzymamy z (2.57) następujące wzory na amplitudy składowych odkształcenia zgięciowego

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1mu} &= g_1(z)\frac{d}{dz}\left[g_1(z)w'_{mu} - g_4(z)u_{mu}\right],\\
\mathcal{H}_{2mu} &= g_5(z)\left[r'' g_1^{\,2}(z)u_{mu} - w'_m\right] + \frac{m}{r^2}\left[g_1(z)v_{mu} - mw_{mu}\right],\\
\tau_{mu} &= \frac{1}{r}\left[mg_4(z)u_m + g_1^2(z)\left(v'_m - \frac{1}{r}v_m\right) - mg_1(z)\left(w'_m - \frac{r'}{r}w_m\right)\right].
\end{aligned}\right\}\quad(2.78)$$

Dla wpływu $v_m^{(d)} = 1$ otrzymamy identyczne wzory.

Podstawiając (2.78) do wzorów (2.60) na amplitudy momentów, a te z kolei do wzorów (2.63) otrzymamy następujące wyrażenia na amplitudy sił tnących dla powłoki hiperboloidalnej, o grubości $h = \text{const}$.

$$\left.\begin{aligned}
Q_{1mu} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\, g_1(z)\, \frac{1}{r}\Big[(1-\nu)r'\left(\mathcal{H}_{1mu} - \mathcal{H}_{2mu}\right) +\\
&\quad + r\left(\mathcal{H}'_{1mu} + \nu\mathcal{H}'_{2mu}\right) + m(1-\nu)\frac{1}{g_1(z)}\tau_{mu}\Big],\\
Q_{2mu} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\, g_1(z)\, \frac{1}{r}\Big[-m\frac{1}{g_1(z)}\left(\mathcal{H}_{2mu} + \nu\mathcal{H}_{1mu}\right) +\\
&\quad + (1-\nu)\left(r\tau'_{mu} + 2r'\tau_{mu}\right)\Big].
\end{aligned}\right\}\quad(2.79)$$

Składowe fikcyjnego obciążenia powierzchniowego, które odpowiada odkształceniu zgięciowemu określonemu wzorami (2.78), znajdziemy ze wzorów (2.62)

$$\left.\begin{aligned}
X_{mu} &= r'' g_1^{\,3}(z)\, Q_{1mu},\quad Y_{mu} = -g_1(z)\frac{1}{r}Q_{2mu},\\
Z_{mu} &= g_1(z)\,\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dz}\left(r\,Q_{1mu}\right) + \frac{m}{g_1(z)}Q_{2mu}\right].
\end{aligned}\right\}\quad 2.80)$$

Takie same wzory możemy zapisać dla wpływu $v_m^{(d)} = 1$.

Siły błonowe zasadniczego stanu zgięciowego znajdziemy w oparciu o równanie statyczne (2.22), wprowadzając do niego składowe fikcyjnego obciążenia powierzchniowego ze znakiem przeciwnym. Uwzględniając zmianę znaku zarówno w równaniu różniczkowym jak i w wyrażeniach na siły błonowe (2. 4), otrzymamy

$$\frac{d^2\bar{\Phi}_m}{d\alpha^2} + m^2\Phi_m = -\frac{b}{a^2}\frac{d}{d\alpha}F_{1m} + m\frac{b^2}{a^4}F_{2m},\qquad(2.81)$$

gdzie

$$F_{1m} = -r^3(X_m+r' Z_m), \quad F_{2m} = -\frac{1}{g_1(z)} r^4\left(Y_m + \frac{m}{g_1(z)} Z_m\right), \tag{2.82}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} & N_{1m} = \frac{1}{g_1(z).r} \Phi_m, \quad N_{2m} = r'' g_1(z) \Phi_m + \frac{1}{g_1(z)} r\, Z_m, \\ & S_m = -\frac{1}{m}\left[\frac{a^2}{b} \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi_m}{d\alpha} - r(X_m+r' Z_m)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.83}$$

Rozwiązania równania (2.81) dla warunków brzegowych

$$\text{dla} \qquad \alpha = \alpha_d \qquad N_{1m} = S_m = 0 \tag{2.84}$$

poszukiwać będziemy jako sumy szczególnego rozwiązania pełnego równania w postaci szeregu (2.33) i ogólnego rozwiązania równania jednorodnego - wzory (2.29). Stosując metodę ortogenalizacji do rozwiązania szczególnego, znajdziemy parametry a_{mi} występujące w wyrażeniu szeregowym (2.33) z układu liniowych równań algebraicznych, którego współczynniki i wyrazy wolne przedstawiają wzory (2.36).

W rozwiązaniu szeregowym z reguły korzystne będzie operowanie symetrycznym i antysymetrycznym stanem zgięciowym względem zmiennej α , które łatwo utworzyć możemy z jednostkowych stanów przemieszczeń. Dodając do jednostkowego stanu $u_m^{(d)} = 1$ raz stan dla $v_m^{(d)} = \bar{k}_s$, a drugi raz stan dla $v_m^{(d)} = \bar{k}_a$, gdzie

$$\bar{k}_s = -\frac{b}{a^2} \frac{r_d}{g_1(z_d)} \operatorname{ctg} m\alpha_d, \quad \bar{k}_a = \frac{b}{a^2} \frac{r_d}{g_1(z_d)} \operatorname{tg} m\alpha_d, \tag{2.85}$$

otrzymamy w pierwszym przypadku symetryczny, a w drugim antysymetryczny stan przemieszczeń, co bezpośrednio wynika ze wzorów (2.41). Przemieszczenia odpowiadające tym stanom znajdziemy z następujących wzorów

$$\left.\begin{aligned} & u_m^{(s)} = \frac{1}{g_1(z_d)} g_1(z) \frac{\sin m\alpha}{\sin m\alpha_d}, \quad v_m^{(s)} = \frac{b}{a^2 g_1(z_d)} r \frac{\cos m\alpha}{\sin m\alpha_d}; \\ & u_m^{(a)} = \frac{1}{g_1(z_d)} g_1(z) \frac{\cos m\alpha}{\cos m\alpha_d}, \quad v_m^{(a)} = \frac{b}{a^2 g_1(z_d)} r \frac{\sin m\alpha}{\cos m\alpha_d} \end{aligned}\right\} \tag{2.86}$$

Powyższym stanom przemieszczeń odpowiadać będzie symetryczny i antysymetryczny układ fikcyjnych sił powierzchniowych, dla których to obciążeń szczególne rozwiązanie szeregowe będzie można znaleźć w sposób już opisany.

Mnożąc jeden ze stanów przemieszczeń, np. antysymetryczny, przez pewien współczynnik i dodając do stanu symetrycznego i postępując podobnie z odpowiadającymi im stanami naprężeń, w wyniku otrzymamy szczególny błonowy stan naprężenia odpowiadający pewnym przemieszczeniom krawędzi, w szczególności przemieszczeniom jednostkowym.

Do uzyskanego w ten sposób szczególnego stanu naprężenia dodać należy rozwiązanie zadania uproszczonego, aby otrzymać stan naprężenia czyniący zadość zadanym warunkom statycznym, w szczególności warunkom (2.84). Szczegóły takiego postępowania wyjaśnione zostały w pierwszym przykładzie liczbowym.

W przykładzie tym wyznaczono dla konkretnej powłoki hiperboloidalnej zasadniczy stan naprężenia, w szczególności zasadniczy stan zgięciowy. Wyniki obliczeń wskazują na możliwość znacznych uproszczeń równań geometrycznych zasadniczego stanu zgięciowego takich powłok, przynajmniej dla powłok o stosunku $a/b \leqslant 25/60$. Uproszczenia te sprowadzałyby się do przyjęcia $g_1(z) = \text{const.}$ i pominięcia przemieszczenia u we wzorach na składowe odkształcenia zgięciowego.

2.8. Ogólne rozwiązanie zasadniczego stanu naprężeń

Dodając do siebie wyrażenia (2.13), (2.65) i (2.59) oraz (2.18) i (2.54) otrzymamy dla dowolnego m ogólne wzory na amplitudy sił wewnętrznych i przemieszczeń powłoki obrotowej obciążonej powierzchniowo i poddanej wpływowi temperatury. Oznaczając dowolne amplitudy sił i przemieszczeń stycznych na krawędzi dolnej $N_{1m}^{(d)}$, $S_m^{(d)}$, $u_m^{(d)}$ i $v_m^{(d)}$ kolejno przez C_{1m}, C_{2m}, C_{3m} i C_{4m} możemy wzorom tym nadać następującą postać

$$\left.\begin{aligned}
&N_{1m} = N_{1m}^{(o)} + \sum_1^4 N_{1mi}\, C_{im}, \quad N_{2m} = N_{2m}^{(o)} + \sum_1^4 N_{2mi}\, C_{im}, \\
&S_m = S_m^{(o)} + \sum_1^4 S_{mi}\, C_{im}; \\
&M_{1m} = \sum_3^4 M_{1mi}\, C_{im}, \quad M_{2m} = \sum_3^4 M_{2mi}\, C_{im}, \quad M_{12m} = \sum_3^4 M_{12mi}\, C_{im}; \\
&u_m = u_m^{(o)} + \sum_1^4 u_{mi} C_{im}, \quad v_m = v_m^{(o)} + \sum_1^4 v_{mi} C_{im}, \quad w_m = w_m^{(o)} + \sum_1^4 w_{mi} C_{im}
\end{aligned}\right| \quad (2.87)$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe (2.12), (2.17), (2.53) i (2.64) będziemy przy tym mieli

dla $z = z_d$

$$\left.\begin{aligned} &N_{1m1} = 1,\ N_{1m2,3,4} = 0;\ S_{m2} = 1,\ S_{m1,3,4} = 0; \\ &u_{m3} = 1,\ u_{m1,2,4} = 0;\ v_{m4} = 1,\ v_{m1,2,3} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.88)$$

Podstawiając amplitudy (2.87) do wzorów (2.09), (2.58) i (2.14), otrzymamy w wyniku wyrażenia szeregowe zawierające 4 n dowolnych stałych (przy n wyrazach w szeregach), które określić można jako ogólne rozwiązanie dla zasadniczego stanu naprężenia rozumianego w nieco węższym sensie aniżeli w [3], zgodnie z uwagami wstępnymi.

W oparciu o ogólne rozwiązanie będziemy mogli uzyskać również rozwiązania, w których dowolne stałe przedstawiać będą amplitudy statycznych i gemoetrycznych wielkości na obu brzegach powłoki. Ogólnie będzie to możliwe zawsze z wyjątkiem szczególnych przypadków powłok o ujemnej krzywiźnie Gaussa, jeżeli dowolne amplitudy wielkości statycznych lub geometrycznych, zadane zostaną po jednej na każdym brzegu - p. [8] str. 151 i [10] str. 181.

Takie rozwiązanie można otrzymać rozwiązując równania stanu błonowego i zgięciowego dla odpowiednio dobranych warunków brzegowych, lub bezpośrednio ze wzorów (2.87) ustawiając odpowiednie cztery równania, które umożliwią wyrażenia stałych C_{im} przez nowe stałe.

W 4 rozdziale przedstawione zostanie rozwiązanie metodą mieszaną powłokowej chłodni kominowej, w którym jako dowolne amplitudy przyjęto amplitudy sił błonowych na krawędzi dolnej i amplitudy przemieszczeń stycznych na górnej krawędzi.

Równania, z których obliczymy stałe C_{im} otrzymamy z warunków brzegowych dla dolnej i górnej krawędzi.

Ogólnie wyznaczenie stałych C_{im} wymagać będzie dla każdego m rozwiązania układu czterech równań i to nawet wtedy, kiedy z punktu widzenia teorii błonowej możliwe jest rozłożenie rozwiązania na zadanie statyczne i geometryczne; wynika to wprost z faktu uwzględnienia wpływu momentów stanu zgięciowego na siły błonowe.

Dopiero w przypadku kiedy będzie możliwym pominięcie tego wpływu i tym samym będzie można przyjąć $N_{1m3,4} = N_{2m3,4} = S_{m3,4} = 0$, stałe $C_{1,2m}$ wyznaczymy niezależnie od stałych $C_{3,4m}$, a więc jak dla zadania statycznego i geometrycznego teorii błonowej.

Uzyskane wyniki pozwolą również na rozwiązanie powłoki obrotowej nie posiadającej elementów usztywniających, co jak wiadomo wykracza poza ramy teorii błonowej; w takim przypadku stałe C_{im} wyznaczymy z czterech "błonowych" równań równowagi, jakie w sumie zapisać będzie można dla obu krawędzi powłoki.

2.9. Wpływ zaburzenia brzegowego

Jak wspomniano w ustępie 1.1. rozwiązanie układu chłodni oparte zostanie na założeniu, że stan naprężenia i odkształcenia w powłoce rozdziela się na zasadniczy stan i stan związany z zaburzeniem brzegowym. Zaburzenie brzegowe ma charakter lokalny i nie wpływa bezpośrednio na zasadniczy stan naprężenia i odkształcenia w powłoce. Niemniej jednak związane z nim siły występujące na linii połączenia powłoki z pierscieniem górnym powodują dodatkowe odkształcenia pierścienia i tym samym pośrednio wpływają na zasadniczy stan naprężenia w powłcce.

Dla $m \geqslant 2$ i sił brzegowych o dostatecznie małym wskaźniku zmienności w stosunku do wskaźnika zmienności zaburzenia brzegowego, do naszego rozwiązania zastosować można teorię prostego zaburzenia brzegowego, wg [3], str. 373.

Dowolne funkcje ψ_1 i ψ_2 występujące we wzorach na siły i przemieszczenia w [3] str. 377 (wzory (XIII) załącznika Nr 1) znajdziemy z następujących warunków brzegowych

$$\text{dla } \alpha = \alpha_g \qquad w = w^{(g)}, \qquad \varphi_1 = \varphi_1^{(g)} \tag{2.89}$$

Przedstawiając funkcje ψ w postaci szeregów trygonometrycznych $\psi = \sum \psi_m \cos m\beta$ otrzymamy z powyższych warunków

$$\psi_{1m} = 2Eh\, w_m^{(g)}, \quad \psi_{2m} = -2Eh\left(\frac{R_2^{(g)}}{k}\varphi_{1m}^{(g)} + w_m^{(g)}\right), \tag{2.90}$$

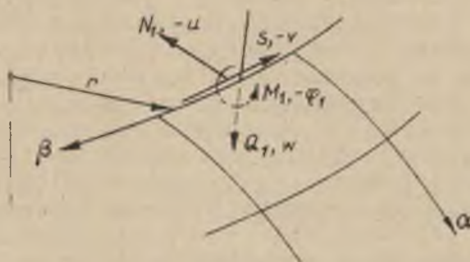
gdzie

$$k = \sqrt[4]{\tfrac{3}{4}(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{R_2^{(g)}}{h}}, \qquad R_2^{(g)} = \sqrt{1+r_g'^{\,2}}\; r_g. \tag{2.91}$$

Przedstawiając z kolei siły brzegowe w formie szeregów trygonometrycznych i uwzględniając (2.90), otrzymamy następujące wzory na amplitudy tych sił.

$$\left.\begin{aligned}
M_{1m}^{(g)} &= -\frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{k}{R_2^{(g)}}\left(\frac{k}{R_2^{(g)}} w_m^{(g)} + \varphi_{1m}^{(g)}\right),\\
Q_{1m}^{(g)} &= \frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{k}{R_2^{(g)}}\right)^2\left(2\frac{k}{R_2^{(g)}} w_m^{(g)} + \varphi_{1m}^{(g)}\right),\\
N_{1m}^{(g)} &= \frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{k}{r_g^2}\left[\frac{k}{r_g}(1+r_g'^{\,2})^{1/2}\left(m^2 + \frac{2r_g'}{1+r_g'^{\,2}}k\right)w_m^{(g)} + \left(m^2 - \frac{r_g'}{1+r_g'^{\,2}}k\right)\varphi_{1m}^{(g)}\right]\\
S_m^{(g)} &= \frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} m(1+r_g'^{\,2})^{-1/2}\left(\frac{k}{r_g}\right)^2\left[2\frac{k}{r_g}(1+r_g'^{\,2})^{-1/2} w_m^{(g)} + \varphi_{1m}^{(g)}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2.92}$$

Występujące w powyższych wzorach siły i przemieszczenia przedstawia rys. 7.



Rys. 7

Przemieszczenia styczne towarzyszące zaburzeniu brzegowemu okazują się bardzo małe w porównaniu z przemieszczeniem normalnym w i z tego powodu nie podaje się wzorów na te wielkości. Natomiast siły błonowe, jak łatwo stwierdzić wg wzorów (2.92), są rzędu siły poprzecznej i powinny być uwzględnione w przypadku odkształcalnego pierścienia górnego.

Jeśli za stałe C_m występujące w ogolnym rozwiązaniu zasadniczego stanu naprężenia, wzory (2.87), przyjąć amplitudy $N_{1m}^{(d)}$ i $S_m^{(d)}$ sił błonowych na krawędzi dolnej i amplitudy przemieszczeń stycznych $u_m^{(g)}$ i $v_m^{(g)}$ na górnej krawędzi, a ponadto uwzględnić wpływ przemieszczen zgięciowych w_m^{g}, $\varphi_{1m}^{(g)}$ tej krawędzi, wówczas na siły brzegowe na górnej krawędzi zapisać możemy następujące wzory

$$\left.\begin{aligned}
M_{1m}^{(g)} &= M_{1mo}^{(g)} + M_{1mu}^{(g)} u_m^{(g)} + M_{1mv}^{(g)} v_m^{(g)} + M_{1mw}^{(g)} w_m^{(g)} + M_{1m\varphi}^{(g)} \varphi_{1m}^{(g)},\\
Q_{1m}^{(g)} &= Q_{1mo}^{(g)} + Q_{1mu}^{(g)} u_m^{(g)} + Q_{1mv}^{(g)} v_m^{(g)} + Q_{1mw}^{(g)} w_m^{(g)} + Q_{1m\varphi}^{(g)} \varphi_{1m}^{(g)},\\
N_{1m}^{(g)} &= N_{1mo}^{(g)} + N_{1mN}^{(g)} N_{1m}^{(d)} + N_{1mS}^{(g)} S_m^{(d)} + (N_{1mu}^{(g)} + \tilde{N}_{1mu}^{(g)}) u_m^{(g)} +\\
&+ (N_{1mv}^{(g)} + \tilde{N}_{1mv}^{(g)}) v_m^{(g)} + N_{1mw}^{(g)} w_m^{(g)} + N_{1m\varphi}^{(g)} \varphi_{1m}^{(g)},\\
S_m^{(g)} &= S_{mo}^{(g)} + S_{mN}^{(g)} N_{1m}^{(d)} + S_{mS}^{(g)} S_m^{(d)} + (S_{mu}^{(g)} + S_{mu}^{(g)}) u_m^{(g)} +\\
&+ (S_{mv}^{(g)} + S_{mv}^{(g)}) v_m^{(g)} + (S_{mw}^{(g)}) w_m^{(g)} + S_{m\varphi}^{(g)} \varphi_{1m}^{(g)}
\end{aligned}\right\} \quad (2.93)$$

We wzorach tych pominięto wpływ sił $N_{1m}^{(d)}$ i $S_{m}^{(d)}$ na wartości momentu i siły poprzecznej. Jak łatwo stwierdzić w oparciu o zasadę wzajemności prac, wpływ ten jest drugorzędny z uwagi na niewielką wartość przemieszczeń stycznych powstających przy zaburzeniu brzegowym.

Występujące we wzorach (2.93) siły od jednostkowych przemieszczeń $M_{1mw,\varphi}^{(g)}$, $Q_{1mw,\varphi}^{(g)}$, $N_{1mw,\varphi}^{(g)}$, $S_{mw,\varphi}^{(g)}$ znajdziemy wg(2.92), zaś siły $N_{1m\,NS}$, $S_{m\,N,S}$ i $N_{1\,m\,u,\,v}^{(g)}$, $S_{m\,u,\,v}^{(g)}$ wyznaczymy jak dla stanu błonowego i zasadniczego stanu zgięciowego. W oparciu o zasadę wzajemności prac znajdziemy jeszcze

$$M_{1mu}^{(g)} = N_{1m\varphi}^{(g)}, \quad M_{1mv}^{(g)} = S_{m\varphi}^{(g)}, \quad Q_{1mu}^{(g)} = -N_{1mw}^{(g)}, \quad Q_{1mv}^{(g)} = -S_{mw}^{(g)} \qquad (2.94)$$

W celu obliczenia dodatkowych sił błonowych (z wężykiem) należy uprzednio wyznaczyć przemieszczenia zgięciowe na górnej krawędzi $w_{m\,u,\,v}^{(g)}$ i $\varphi_{1m\,u,v}^{(g)}$ od wpływu jednostkowych przemieszczeń stycznych.

Przemieszczeniom tym wziętym z przeciwnym znakiem odpowiadać będą siły błonowe, które znajdziemy ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} \tilde{N}_{1mu,v}^{(g)} &= -N_{1mw}^{(g)} \cdot w_{mu,v}^{(g)} - N_{1m\varphi}^{(g)}\,\varphi_{mu,v}^{(g)}, \\ \tilde{S}_{mu,v} &= -S_{mw}^{(g)}\,w_{mu,v} - S_{m\varphi}^{(g)}\,\varphi_{mu,v}^{(g)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.95)$$

Dla kontroli rachunku służyć może równość $N_{1m\,v} = S_{m\,u}$.

3. Pierścień kołowy na podłożu sprężystym

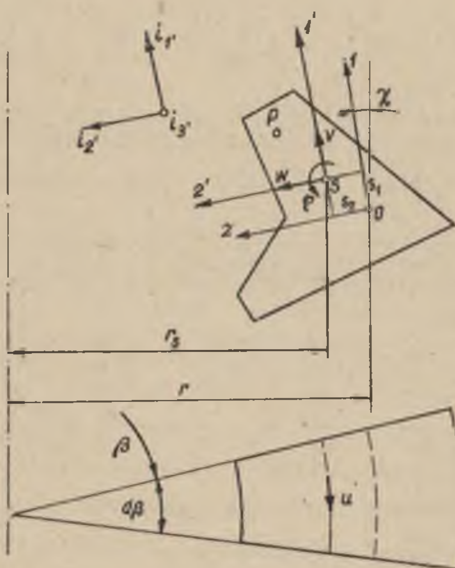
Występujące w układzie chłodni kominowej pierścienie - górny i fundamentowy, rozpatrywać można jak płaskie pręty kołowe o stałym przekroju poprzecznym. Oś skręcania tak potraktowanych pierścieni , z reguły nie pokrywa się z ich osią geometryczną,a główne osie bezwładności przekroju poprzecznego są ukośnie zorientowane względem płaszczyzny pierścienia.

W związku z tym w niniejszym rozdziale podjęto próbę rozszerzenia znanych wzorów dla pierścienia kołowego na ten bardziej ogólny przypadek. Ponadto w celu uzyskania wzorów przydatnych do badania chłodni kominowych na wpływy ruchów terenu, rozpatrzono pręt kołowy leżący na liniowo sprężystym podłożu, które doznało pewnych przemieszczeń.

3.1. Równania geometryczne

Przyjmijmy w środku skręcania S przekroju początek prostokątnego układu współrzędnych o osiach 1', 2' równoległych do głównych, środkowych osi bezwładności 1,2. Ponadto zwiążmy z tym punktem układ 3 wersorów $i_{1'}$, $i_{2'}$, $i_{3'}$ tak, aby wersor $i_{3'}$ był styczny do osi sprężystości, a dwa pozostałe pokrywały się odpowiednio z osiami 1', 2'.

Wskutek odkształcenia przekrój dozna przesunięcia o składowych u,v,w i obrotu o składowych $\varphi_{1'}$, $\varphi_{2'}$, $\varphi_{3'} = \varphi$ p.rys.8.



Rys. 8

W przypadku małych kątów obrotu jednostkowy wektor $i'_{3'}$ styczny do odkształconej osi oraz jednostkowe wektory $i'_{1'}$, $i'_{2'}$ prostopadłe do niej, można następująco wyrazić przez wektory $i_{1'}, i_{2'}, i_{3'}$

$$\left.\begin{aligned} i'_{1'} &= i_{1'} + \varphi i_{2'} - \varphi_{2'} i_{3'}, \\ i'_{2'} &= -\varphi i_{1'} + i_{2'} + \varphi_{1'} i_{3'}, \\ i'_{3'} &= \varphi_{2'} i_{1'} - \varphi_{1'} i_{2'} + i_{3'}; \end{aligned}\right\} \quad (3.01)$$

przy tym łatwo stwierdzić, że wektory $i'_{1'}$, $i'_{2'}$, $i'_{3'}$ są również wzajemnie ortogonalne z dokładnością do kwadratów kątów obrotu.

Załóżmy z kolei, że przekroje prostopadłe do osi sprężystości przed odkształceniem pozostają płaskie i prostopadłe do niej po odkształceniu. Pozwoli to nam obliczać kąty obrotu $\varphi_{1'}$ i $\varphi_{2'}$ przekrojów, jak kąty obrotu stycznej do osi sprężystości.

Wzory na kąty obrotu stycznej uzyskać można ze wzorów na kąty obrotu wyprowadzanych w teorii powłok - np. [8] str. 20.

Uwzględniając oznaczenia na rys. 8 kąty obrotu przekroju $\varphi_{1'}$ i $\varphi_{2'}$ można następująco wyrazić przez przesunięcia u, v, w

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1'} &= -\frac{1}{r_s}\left(\frac{dw}{d\beta} + u\cos\chi\right), \\ \varphi_{2'} &= \frac{1}{r_s}\left(\frac{dv}{d\beta} + u\sin\chi\right) \end{aligned}\right| \qquad (3.02)$$

Oznaczając przez Δ_S wektor przemieszczenia p. S

$$\Delta_s = v.i_{1'} + w\, i_{2'} + u\, i_{3'} \qquad (3.03)$$

zapisać możemy następujące wyrażenie na wektor przesunięcia Δ dowolnego punktu P przekroju

$$\Delta = \Delta_s + (i'_{1'} - i_{1'})X_{1'} + (i'_{2'} - i_{2'})X_{2'} \qquad (3.04)$$

Podstawiając do powyższego wyrażenia wzory (3.01) otrzymamy

$$\Delta = (v - \varphi X_{2'})i_{1'} + (w + \varphi X_{1'})i_{2'} + (u - \varphi_{2'}X_{1'} + \varphi_{1'}X_{2'})i_{3'} \qquad (3.05)$$

Rzutując wektor Δ na kierunki $i_{1'}$, $i_{2'}$, $i_{3'}$ i wyrażając kąty obrotu $\varphi_{1'}$, $\varphi_{2'}$, przez przesunięcia wg (3.02) otrzymamy następujące wzory na przemieszczenia dowolnego p. P

$$\left.\begin{aligned} u(X_{1'},X_{2'}) &= u - \frac{1}{r_s}\left(\frac{dv}{d\beta} + u\sin\chi\right)X_{1'} - \frac{1}{r_s}\left(\frac{dw}{d\beta} + u\cos\chi\right)X_{2'} \\ v(x_{1'},x_{2'}) &= v - \varphi x_{2'}, \quad w(x_{1'},x_{2'}) = w + \varphi x_{1'} \end{aligned}\right| \qquad (3.06)$$

Uwzględniając, że dla dowolnego punktu P

$$r(x_{1'},x_{2'}) = r_s - x_{1'}\sin\chi - x_{2'}\cos\chi \qquad (3.07)$$

na odkształcenie dowolnego włókna możemy zapisać następujące wyrażenie

$$\varepsilon(x_{1'}\, x_{2'}) = \frac{1}{r_s - x_{1'}\sin\chi - x_{2'}\cos\chi}\left[\frac{d}{d\beta}\, u(x_{1'}\, x_{2'}) - \right.$$

$$\left. - v(x_{1'}\, x_{2'})\sin\chi - w(x_{1'}\, x_{2'})\cos\chi\right] \qquad (3.08)$$

Podstawiając do powyższego wzoru wyrażenia (3.06) i biorąc pod uwagę, że

$$x_{1'} = x_1 - s_1, \quad x_{2'} = x_2 - s_2 \qquad (3.09)$$

możemy wzór ten zapisać w następujący sposób

$$\varepsilon(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - \dfrac{x_1 . \sin\chi + x_2 . \cos\chi}{r}}\,(\varepsilon - \varkappa_2 x_1 + \varkappa_1 x_2), \qquad (3.10)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon = \frac{1}{r}\left[\frac{r}{r_s}\,\frac{du}{d\beta} - v\sin\chi - w\cos\chi + \frac{s_1}{r_s}\left(\frac{d^2v}{d\beta^2} + r_s\varphi\cos\chi\right) + \right.\\
&\left. + \frac{s_2}{r_s}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} - r_s\varphi\sin\chi\right)\right],\\
&\varkappa_1 = \frac{1}{rr_s}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{du}{d\beta}\cos\chi - r_s\varphi\sin\chi\right),\\
&\varkappa_2 = \frac{1}{rr_s}\left(\frac{d^2v}{d\beta^2} + \frac{du}{d\beta}\sin\chi + r_s\varphi . \cos\chi\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

Parametry ε , $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$ występujące we wzorze (3.10) oznaczają odpowiednio jednostkowe wydłużenie włókna odpowiadającego punktowi 0 przekroju oraz wzajemne kąty obrotu skrajnych ścianek jednostkowego elementu.

Przyjęcie powyższych parametrów za składowe odkształcenia pozwoli bezpośrednio zapisać wyrażenie na pracę wirtualną sił wewnętrznych, z którego korzystać będziemy przy wprowadzaniu równań równowagi.

W przypadku małych wartości wyrażenia $x_1\sin\chi + x_2\cos\chi$ w porównaniu z r wzór (3.10) zastąpić można następującym prostszym

$$\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon - \varkappa_2 x_1 + \varkappa_1 x_2 \qquad (3.12)$$

Jak wiadomo, założenie płaskich przekrojów umożliwia wyznaczenie tylko odkształceń liniowych ε; obliczenie odkształceń postaciowych i tym samym naprężeń stycznych jakkolwiek formalnie możliwe przy tym założeniu, ogólnie prowadziłoby już do błędnych wyników.

3.2. Równania fizyczne

Przystępując do wyprowadzenia związków fizycznych między zredukowanymi siłami przekrojowymi a wielkościami charakteryzującymi odkształcenie pręta przyjmiemy wyrażenie na naprężenie w dowolnym punkcie przekroju jak dla liniowego stanu naprężenia

$$\sigma(x_1,x_2) = E\varepsilon(x_1,x_2) \tag{3.13}$$

Podstawiając (3.13) do wzorów

$$N = \int_A \sigma dA,\quad M_1 = \int_A \sigma x_2 dA,\quad M_2 = -\int_A \sigma x_1 dA, \tag{3.14}$$

i przyjmując w miejsce $\varepsilon(x_1,x_2)$ wyrażenie (3.11) otrzymamy po scałkowaniu

$$\left.\begin{aligned}
N &= \left[EA + \frac{E}{r^2}(J_2^* \sin^2\chi + 2J_{12}^*\sin\chi\cos\chi + J_1^*\cos^2\chi)\right]\varepsilon + \\
&\quad + \frac{E}{r}(J_1^*\cos\chi + J_{12}^*\sin\chi)\varkappa_1 - \frac{E}{r}(J_{12}^*\cos\chi + J_2^*\sin\chi)\varkappa_2,\\
M_1 &= \frac{E}{r}(J_1^*\cos\chi + J_{12}^*\sin\chi)\varepsilon + EJ_1^*\varkappa_1 - EJ_{12}^*\varkappa_2,\\
M_2 &= -\frac{E}{r}(J_{12}^*\cos\chi + J_2^*\sin\chi)\varepsilon - EJ_{12}^*\varkappa_1 + EJ_2^*\varkappa_2,
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\left.\begin{aligned}
J_1^* &= \int_A \frac{x_2^2}{1 - \dfrac{x_1\sin\chi + x_2\cos\chi}{r}}dA,\quad J_2^* = \int_A \frac{x_1^2}{1 - \dfrac{x_1\sin\chi + x_2\cos\chi}{r}}dA,\\
J_{12}^* &= \int_A \frac{x_1x_2}{1 - \dfrac{x_1\sin\chi + x_2\cos\chi}{r}}dA
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Wzory (3.15) uzupełnić należy jeszcze wyrażeniem na moment skręcający M_3. Pomijając sprawę rozkładu naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym pierścienia, oprzemy się tutaj na znanym związku między momentem skręcającym, a jednostkowym kątem skręcenia ważnym dla przypadku nieskrępowanego skręcania pręta prostego.

Na wzajemny kąt skręcenia dwóch sąsiednich przekrojów odległych o $r_s\, d\beta$ możemy zapisać

$$\left(\frac{d\varphi}{d\beta} - \varphi_1' \sin\chi - \varphi_2' \cos\chi\right) d\beta \,; \tag{3.17}$$

dzieląc wyrażenie (3.17) przez $d_s = r_s\, d\beta$ i uwzględniając wyrażenie (3.02) uzyskamy następujące wyrażenie na jednostkowy kąt skręcenia

$$\tau = \frac{1}{r_s}\left(\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{\cos\chi}{r_s}\frac{dv}{d\beta} + \frac{\sin\chi}{r_s}\frac{dw}{d\beta}\right) \tag{3.18}$$

które pozwoli na obliczenie momentu skręcającego wg wzoru

$$M_3 = GC_o\,\tau, \tag{3.19}$$

gdzie GC_o - sztywność na skręcanie.

Dla zastosowań praktycznych wzory (3.15) mogą być znacznie uproszczone.

Jak okazuje się, stosunek I_{12}^* do I_1^* i I_2^* jest z reguły niewielki. Porównując z kolei I_1^*, I_2^* z I_1 i I_2 stwierdzimy, że w większości przypadków odpowiednie różnice tych wielkości nie będą przekraczać I/100 - [11] str. 353. Biorąc powyższe pod uwagę, możemy w miejsce wzorów (3.15) zapisać następujące, prostsze wzory

$$\left.\begin{aligned}
N &= EA\varepsilon + \frac{E}{r^2}\left(J_1\cos^2\chi + J_2\sin^2\chi\right)\varepsilon + \\
&\quad + \frac{EJ_1}{r}\cos\chi\cdot\varkappa_1 - \frac{EJ_2}{r}\sin\chi\cdot\varkappa_2, \\
M_1 &= \frac{EJ_1}{r}\cos\chi\cdot\varepsilon + EJ_1\cdot\varkappa_1, \\
M_2 &= -\frac{EJ_2}{r}\sin\chi\cdot\varepsilon + EJ_2\cdot\varkappa_2, \\
M_3 &= GC_o\tau
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Łatwo stwierdzić, że we wzorze na N stosunek drugiego wyrazu (podkreślonego) do wyrazu pierwszego jest rzędu $(\frac{i_1}{r})^2$, gdzie i_1 - promień bezwładności przekroju, co z reguły pozwala pominąć wyraz podkreślony.

W celu określenia wpływu parametrów $\varkappa$ w wyrażeniu na N oraz parametru ε w wyrażeniach na momenty M_1, M_2 obliczono maxymalne naprężenia normalne w przekroju kolejno od wpływu ε, $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$, co pozwoliło na zapisanie następujących szacunkowych proporcji

$$\left.\begin{aligned} &\sigma\big[N(\varepsilon)\big] : \sigma\big[M_1(\varepsilon)\big] : \sigma\big[M_2(\varepsilon)\big] \approx r : \max.x_2 : \max.x_1 , \\ &\sigma\big[M_1(\varkappa_1)\big] : \sigma\big[N(\varkappa_1)\big] \approx r : i_1 , \quad \sigma\big[M_2(\varkappa_2)\big] : \sigma\big[N(\varkappa_2)\big] \approx r : i_2 , \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

gdzie i_1 i i_2 promienie bezwładności przekroju poprzecznego.

Biorąc pod uwagę powyższy wynik, można - w przypadku dostatecznie cienkich pierścieni - pominąć parametry $\varkappa$ w wyrażeniu na N oraz parametr ε w wyrażeniach na momenty zginające. W ten sposób uzyskuje się najprostszy wariant równań fizycznych dla pierścienia kołowego

$$N = EA\varepsilon , \quad M_1 = EJ_1\varkappa_1 , \quad M_2 = EJ_2\varkappa_2 , \quad M_3 = GC_o\tau , \qquad (3.22)$$

gdzie $\varepsilon, \varkappa$ i τ wg (3.10) i (3.19).

Warto zaznaczyć, że wyrażenia (3.22) uzyskać można bezpośrednio opierając się na przybliżonym wyrażeniu (3.12) na odkształcenie liniowe.

Mając na uwadze fakt, że występujące w (3.20) jak i (3.22) składowe odkształcenia posiadają ten sam sens fizyczny, p.ustęp 3.1. możemy dla obu wariantów równań fizycznych zapisać następujące wyrażenie na jednostkowy przyrost pracy sił wewnętrznych.

$$\delta A_1 = \delta W_1 = N\cdot\delta\varepsilon + M_1\delta\varkappa_1 + M_2\delta\varkappa_2 + \frac{r_s}{r} M_3\delta\tau . \qquad (3.23)$$

Powyższe wyrażenie dla obu wariantów równań fizycznych przedstawia różniczkę zupełną funkcji W_1 składowych stanu odkształcenia. Stąd dla równań (3.20) otrzymujemy następujące wyrażenie na jednostkową energię potencjalną odkształcenia

$$\begin{aligned} W_1 &= \tfrac{1}{2}\Big(N\cdot\varepsilon + M_1\varkappa_1 + M_2\varkappa_2 + \frac{r_s}{r} M_3\tau\Big) = \\ &= \tfrac{1}{2} EA\varepsilon^2 + \frac{EJ_1}{r}\cos\chi\,\varepsilon\,\varkappa_1 + \tfrac{1}{2}EJ_1\varkappa_1^2 - \frac{EJ_2}{r}\sin\chi\,\varepsilon\,\varkappa_2 + \tfrac{1}{2}EJ_2\varkappa_2^2 + \qquad (3.24) \\ &+ \tfrac{1}{2}\frac{r_s}{r} GC_o\tau^2 . \end{aligned}$$

Dla wariantu (3.22) otrzymamy już znacznie prostsze wyrażenie

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(EA\varepsilon^2 + EJ_1\, \varkappa_1^{\,2} + EJ_2\, \varkappa_2^{\,2} + \frac{r_s}{r}\, GC_o \tau^2\right) \tag{3.25}$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek, dla którego $\lambda = 0$ i $S_1 = S_2 = 0$ (oś sprężystości pokrywa się z osią geometryczną).

Ze wzorów (3.20) znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} N &= \left(EA + \frac{EJ_1}{r^2}\right)\varepsilon + \frac{EJ_1}{r}\varkappa_1, \\ M_1 &= \frac{EJ_1}{r}\varepsilon + EJ_1\varkappa_1, \quad M_2 = EJ_2\varkappa_2, \quad M_3 = GC_o\tau, \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

przy czym wyrażenia (3.09) i (3.19) na składowe odkształcenia przyjmują teraz postać

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{r}\left(\frac{du}{d\beta} - w\right), \quad \varkappa_1 = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{du}{d\beta}\right), \\ \varkappa_2 &= \frac{1}{r^2}\frac{d^2v}{d\beta^2} + \frac{1}{r}\varphi, \quad \tau = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{1}{r^2}\frac{dv}{d\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Podstawiając (3.27) do (3.26) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{EA}{r}\left(\frac{du}{d\beta} - w\right) - \underline{\frac{EJ_1}{r^3}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + w\right)}, \\ M_1 &= -\frac{EJ_1}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + w\right), \quad M_2 = \frac{EJ_2}{r^2}\left(\frac{d^2v}{d\beta^2} + r\varphi\right), \\ M_3 &= \frac{GC_o}{r^2}\left(r\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{dv}{d\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

W przypadku dostatecznie cienkich pierścieni można opuścić podkreślony wyraz we wzorze na siłę osiową N. Najprostszy wariant równań fizycznych dla rozpatrywanego przypadku można otrzymać również bezpośrednio z (3.22); uwzględniając wzory(3.27) znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{EA}{r}\left(\frac{du}{d\beta} - w\right), \quad M_1 = -\frac{EJ_1}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{du}{d\beta}\right), \\ M_2 &= \frac{EJ_2}{r^2}\left(\frac{d^2v}{d\beta^2} + r\varphi\right), \quad M_3 = \frac{GC_o}{r^2}\left(r\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{dv}{d\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Wzory (3.28) z uproszczonym wyrażeniem na N i wzory (3.29) są równowarte. Różnice między wyrażeniami na moment M_1 są bowiem rzędu wielkości, które pomijamy w najprostszym wariancie równań fizycznych.

Powracając do ogólnego przypadku pierścienia ($\chi \neq 0$) przedstawimy składowe przemieszczenia i odkształcenia w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych zmiennej β

$$\left.\begin{aligned} & u = \sum u_m \sin m\beta, \quad v = \sum v_m \cos m\beta, \\ & w = \sum w_m \cos m\beta, \quad \varphi = \sum \varphi_m \cos m\beta; \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

$$\left.\begin{aligned} & \varepsilon = \sum \varepsilon_m \cos m\beta, \quad \varkappa_1 = \sum \varkappa_{1m} \cos m\beta, \\ & \varkappa_2 = \sum \varkappa_{2m} \cos m\beta, \quad \tau = \sum \tau_m \sin m\beta; \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

ze wzorów (3.11) i (3.19) znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} & \varepsilon_m = \frac{1}{r}\Big[m \frac{r}{r_s} u_m - (m^2 \frac{s_1}{r_s} + \sin\chi) v_m - \\ & - (m^2 \frac{s_2}{r_s} + \cos\chi) w_m + (s_1 \cos\chi - s_2 \sin\chi)\varphi_m\Big], \\ & \varkappa_{1m} = \frac{1}{rr_s} (m^2 w_m - m u_m \cos\chi + r_s \varphi_m \sin\chi), \\ & \varkappa_{2m} = \frac{1}{rr_s} (-m^2 v_m + m u_m \sin\chi + r_s \varphi_m \cos\chi), \\ & \tau_m = \frac{-m}{r_s}(+\varphi_m - \frac{1}{r_s} v_m \cos\chi + \frac{1}{r_s} w_m \sin\chi). \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Przedstawmy jeszcze siły wewnętrzne w formie szeregów trygonometrycznych

$$\left.\begin{aligned} & N = \sum N_m \cos m\beta, \quad M_1 = \sum M_{1m} \cos m\beta, \\ & M_2 = \sum M_{2m} \cos m\beta, \quad M_3 = \sum M_{3m} \sin m\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

i wyraźmy występujące tu amplitudy sił przez amplitudy odkształceń w oparciu o wzory (3.20). W ten sposób znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} N_m &= EA\varepsilon_m + \frac{EJ_1}{r}\cos\chi \cdot \varkappa_{1m} - \frac{EJ_2}{r}\sin\chi \cdot \varkappa_{2m}, \\ M_{1m} &= \frac{EJ_1}{r}\cos\chi \cdot \varepsilon_m + EJ_1\varkappa_{1m}, \\ M_{2m} &= -\frac{EJ_2}{r}\sin\chi \cdot \varepsilon_m + EJ_2\varkappa_{2m}, \\ M_{3m} &= GC_o\tau_m. \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

Dla najprostszego wariantu równań fizycznych (3.22) w miejsce (3.34) otrzymamy następujące prostsze wzory

$$N_m = EA\varepsilon_m,\ M_{1m} = EJ_1\varkappa_{1m},\ M_{2m} = EJ_2\varkappa_{2m},\ M_{3m} = GC_o\tau_m \tag{3.35}$$

3.3. Równania równowagi

Równania równowagi dla pierścienia otrzymamy w oparciu o zasadę prac przygotowanych dla wirtualnego stanu przemieszczeń

$$\delta A - \delta L = 0. \tag{3.36}$$

Przyrost pracy sił wewnętrznych δA dla dowolnego wariantu równań fizycznych znajdziemy wg (3.23)

$$\delta A = \int_0^{2\pi} \left(N\delta\varepsilon + M_1\delta\varkappa_1 + M_2\delta\varkappa_2 + \frac{r_s}{r}M_3\delta\tau\right)r\,d\beta\,. \tag{3.37}$$

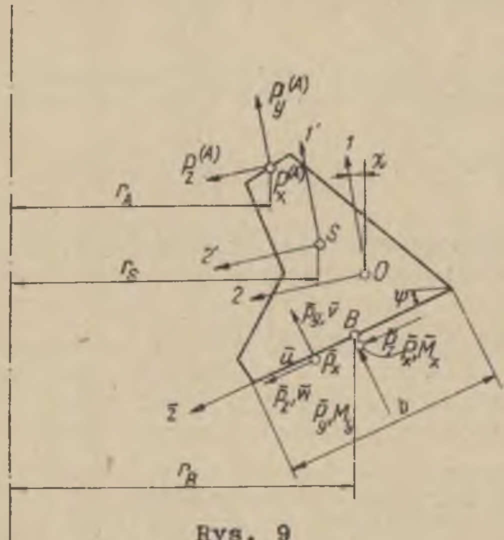
Podstawiając za funkcje występujące w powyższym wyrażeniu ich rozwinięcia trygonometryczne (3.31) i (3.33), otrzymamy po scałkowaniu dla dowolnego m

$$\frac{1}{\pi}\delta A_m = \left(N_m\delta\varepsilon_m + M_{1m}\delta\varkappa_{1m} + M_{2m}\delta\varkappa_{2m} + \frac{r_s}{r}M_{3m}\delta\tau_m\right)r \tag{3.38}$$

Na przyrost pracy sił zewnętrznych możemy zapisać

$$\delta L = \delta L_A + \delta L_B, \tag{3.39}$$

gdzie δL_A - przyrost pracy sił zewnętrznych działających wzdłuż linii A, δL_B - przyrost pracy sił zewnętrznych działających na podstawę pierścienia o linii środkowej B - rys.9.



Rys. 9

Przyjmując za wirtualne przemieszczenia wariacje rzeczywistych przemieszczeń otrzymamy

$$\delta L_A = \int_0^{2\pi} (P_x^{(A)} \delta u_A + P_y^{(A)} \delta v_A + P_z^{(A)} \delta w_A) r_A d\beta \tag{3.40}$$

gdzie $P_{x,y,z}$ - składowe obciążenia liniowego odniesione do jednostki długości linii A; ze wzorów (3.06) znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} \delta u_A &= \frac{r_A}{r_s} \delta u - \frac{a_1'}{r_s} \frac{d\delta v}{d\beta} - \frac{a_2'}{r_s} \frac{d\delta w}{d\beta}, \\ \delta v_A &= \delta v - a_2, \delta\varphi, \quad \delta w_A = \delta w + a_1, \delta\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Przedstawiając składowe obciążenia na linii A w postaci szeregów trygonometrycznych

$$\left.\begin{aligned} P_x^{(A)} &= \sum P_{xm}^{(A)} \sin m\beta, \quad P_y^{(A)} = \sum P_{ym}^{(A)} \cos m\beta, \\ P_z^{(A)} &= \sum P_{zm}^{(A)} \cos m\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

i uwzględniając (3.30) otrzymamy z (3.40) po scałkowaniu

$$\frac{1}{\pi}\delta L_{Am} = (P_{xm}^{(A)}\,\delta u_{Am} + P_{ym}^{(A)}\,\delta v_{Am} + P_{zm}^{(A)}\,\delta w_{Am}), \qquad (3.43)$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} &\delta u_{Am} = \frac{r_A}{r_s}\,\delta u_m + m\,\frac{a_1'}{r_s}\,\delta v_m + m\,\frac{a_2'}{r_s}\,\delta w_m, \\ &\delta v_{Am} = \delta v_m - a_2'\,\delta\varphi_m, \quad \delta w_{Am} = \delta w_m + a_1'\,\delta\varphi_m. \end{aligned}\right\} \qquad (3.44)$$

Przystępując do obliczenia δL_B wyrażmy wpierw jednostkowe oddziaływania podłoża przez przemieszczenia

$$\bar{p}_x = -(\bar{u}-\bar{u}^{(o)})T,\ \bar{p}_y = -(\bar{v}-\bar{v}^{(o)})C,\ \bar{p}_z = -(\bar{w}-\bar{w}^{(o)})T, \qquad (3.45)$$

gdzie: $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ - przemieszczenia punktów podstawy, $\bar{u}^{(o)}$, $\bar{v}^{(o)}$, $\bar{w}^{(o)}$ - przemieszczenia punktów podłoża, wynikłe wskutek ruchów gruntu, a C, T - cechy sprężyste podłoża.

Przemieszczenia dowolnego punktu podstawy można następująco wyrazić przez jej kąty obrotu i przemieszczenia p. B.

$$\bar{u} = \bar{u}_B + \bar{z}\,\bar{\varphi}_y,\ \bar{v} = \bar{v}_B - \bar{z}\,\bar{\varphi}_x,\ \bar{w} = \bar{w}_B \qquad (3.46)$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_B = u_B,\ \bar{v}_B = v_B\cos(\chi-\psi) - w_B\sin(\chi-\psi), \\ &\bar{w}_B = v_B\sin(\chi-\psi) + w_B\cos(\chi-\psi), \\ &\bar{\varphi}_x = \varphi,\ \bar{\varphi}_y = \varphi_1\cos(\chi-\psi) - \varphi_2\sin(\chi-\psi). \end{aligned}\right\} \qquad (3.47)$$

Wyrażenia na przemieszczenia u_B, v_B i w_B otrzymamy ze wzorów (3.06)

$$\left.\begin{aligned} &u_B = \frac{r_B}{r_s}\,u - \frac{b_1'}{r_s}\,\frac{dv}{d\beta} - \frac{b_2'}{r_s}\,\frac{dw}{d\beta}, \\ &v_B = v - b_2'\varphi,\ w_B = w + b_1'\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (3.48)$$

a kąty obrotu φ_1 i φ_2 znajdziemy wg wzorów (3.02).

Analogicznie do wzorów (3.46) przedstawimy również przemieszczenia podłoża w postaci liniowej funkcji zmiennej $\bar{z}$

$$\bar{u}^{(o)} = \bar{u}_B^{(o)} + \bar{z}\,\bar{u}_B^{(o)\prime},\quad \bar{v}^{(o)} = \bar{v}_B^{(o)} + \bar{z}\bar{v}_B^{(o)\prime},\quad \bar{w}^{(o)} = \bar{w}_B^{(o)} + \bar{z}\bar{w}_B^{(o)\prime} \tag{3.49}$$

Wyrażenie na przyrost pracy sił zewnętrznych działających na podstawę zapisać możemy w postaci następującej całki podwójnej

$$\delta L_B = \int_{\delta}^{2\pi}\int_{-b/2}^{b/2} (\bar{p}_x\,\delta\bar{u} + \bar{p}_y\delta\bar{v} + \bar{p}_z\delta\bar{w})(1 - \frac{\bar{z}}{r_B}\cos\psi) r_B d\beta\, d\bar{z}. \tag{3.50}$$

Uwzględniając wzory (3.46) i (3.49) oraz całkując względem $\bar{z}$, można wyrażeniu (3.50) nadać następującą postać

$$\delta L_B = \int_{0}^{2\pi} (\bar{P}_x\,\delta\bar{u}_B + \bar{P}_y\delta\bar{v}_B + \bar{P}_z\delta\bar{w}_B + \bar{M}_x\delta\bar{\varphi}_x + \bar{M}_y\delta\bar{\varphi}_y) r_B d\beta. \tag{3.51}$$

Występujące tu zredukowane siły oddziaływania podłoża wyrażają się przez przemieszczenia w sposób następujący

$$\left.\begin{aligned}
\bar{P}_x &= -Tb(\bar{u}_B - \bar{u}_B^{(o)}) + T\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}(\bar{\varphi}_y - \bar{u}_B^{(o)\prime}),\\
\bar{P}_y &= -Cb(\bar{v}_B - \bar{v}_B^{(o)}) - C\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}(\bar{\varphi}_x + \bar{v}_B^{(o)\prime})\\
\bar{P}_z &= -Tb(\bar{w}_B - \bar{w}_B^{(o)}) - T\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}\bar{w}_B^{(o)\prime},\\
\bar{M}_x &= -C\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}(\bar{v}_B - \bar{v}_B^{(o)}) - C\bar{J}_x(\bar{\varphi}_x + \bar{v}_B^{(o)\prime})\\
\bar{M}_y &= T\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}(\bar{u}_B - \bar{u}_B^{(o)}) - T\bar{J}_x(\bar{\varphi}_y - \bar{u}_B^{(o)\prime}),
\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

gdzie $\bar{J}_x = \frac{b^3}{12}$

przy czym w przypadku dostatecznie cienkich pierścieni we wzorach (3.52) pominąć można wyrazy podkreślone, Jak łatwo stwierdzić, wyrazom tym odpowiadają jednostkowe oddziaływania podłoża nie większe od b/2r w porównaniu z oddziaływaniami od wpływu pozostałych wyrazów, por. uproszczenie wzorów (3.20).

Przedstawiając siły P i momenty M w postaci szeregów trygonometrycznych

$$\left.\begin{aligned} &\bar{P}_x = \sum \bar{P}_{xm} \sin m\beta,\ \bar{P}_y = \sum \bar{P}_{ym} \cos m\beta,\ \bar{P}_z = \sum \bar{P}_{zm} \cos m\beta, \\ &\bar{M}_x = \sum \bar{M}_{xm} \cos m\beta,\ \bar{M}_y = \sum \bar{M}_{ym} \sin m\beta, \end{aligned}\right\} \quad (3.53)$$

oraz przemieszczenia podstawy pierścienia

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_B = \sum \bar{u}_{Bm} \sin m\beta,\ \bar{v}_B = \sum \bar{v}_{Bm} \cos m\beta,\ \bar{w}_B = \sum \bar{w}_{Bm} \cos m\beta \\ &\bar{\varphi}_x = \sum \bar{\varphi}_{xm} \cos m\beta,\quad \bar{\varphi}_y = \sum \bar{\varphi}_{ym} \sin m\beta, \end{aligned}\right\} \quad (3.54)$$

otrzymamy z wyrażenia (3.51) dla dowolnej wartości m

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\,\delta L_{Bm} = (&\bar{P}_{xm}\,\delta\bar{u}_{Bm} + \bar{P}_{ym}\,\delta\bar{v}_{Bm} + \bar{P}_{zm}\,\delta\bar{w}_{Bm} + \\ &+ \bar{M}_{xm}\,\delta\bar{\varphi}_{xm} + \bar{M}_{ym}\,\delta\bar{\varphi}_{ym})\,r_B . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Przyjmując ponadto szeregowe wyrażenia na przemieszczenia podłoża

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_B^{(o)} = \sum \bar{u}_{Bm}^{(o)} \sin m\beta,\ \bar{v}_B^{(o)} = \sum \bar{v}_{Bm}^{(o)} \cos m\beta,\ \bar{w}_B^{(o)} = \sum \bar{w}_{Bm}^{(o)} \cos m\beta, \\ &\bar{u}_B^{(o)} = \sum \bar{u}_{Bm}^{(o)} \sin m\beta,\ \bar{v}_B^{(o)} = \sum \bar{v}_{Bm}^{(o)\prime} \cos m\beta,\ \bar{w}_B^{(o)\prime} = \sum \bar{w}_{Bm}^{(o)} \cos m\beta, \end{aligned}\right\} \quad (3.56)$$

będziemy mogli występujące w wyrażeniu (3.55) amplitudy sił i momentów wyrazić przez amplitudy przemieszczeń

$$\left.\begin{aligned} &\bar{P}_{xm} = -Tb(\bar{u}_{Bm} - \bar{u}_{Bm}^{(o)}) + \underline{T\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B} (\bar{\varphi}_{ym} - \bar{u}_{Bm}^{(o)\prime})}, \\ &\bar{P}_{ym} = -Cb(\bar{v}_{Bm} - \bar{v}_{Bm}^{(o)}) - \underline{C\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B} (\bar{\varphi}_{xm} + \bar{v}_{Bm}^{(o)\prime})}, \\ &\bar{P}_{zm} = -Tb(\bar{w}_{Bm} - \bar{w}_{Bm}^{(o)}) - T\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}\, \bar{w}_{Bm}^{(o)\prime}, \end{aligned}\right\} \quad (3.57)$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{M}_{xm} &= -C\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}\left(\bar{v}_{Bm}-\bar{v}_{Bm}^{(o)}\right) - C\bar{J}_x\left(\bar{\varphi}_{xm} + \bar{v}_{Bm}^{(o)\prime}\right),\\
\bar{M}_{ym} &= T\bar{J}_x \frac{\cos\psi}{r_B}\left(\bar{u}_{Bm}-\bar{u}_{Bm}^{(o)}\right) - T\bar{J}_x\left(\bar{\varphi}_{ym} - \bar{u}_{Bm}^{(o)\prime}\right).
\end{aligned}\right| \qquad (\text{cd.}3.57)$$

Wyrażając jeszcze amplitudy przemieszczeń podstawy przez amplitudy przemieszczeń punktów osi sprężystej i kąta obrotu φ - wg (3.47), (3.48) i (3.02) z uwzględnieniem odpowiednich wyrażeń szeregowych, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}_{Bm} &= \frac{r_B}{r_s}u_m + m\frac{b_{1}'}{r_s}v_m + m\frac{b_{2}'}{r_s}w_m,\\
\bar{v}_{Bm} &= (v_m - b_{2}'\varphi_m)\cos(\chi-\psi) - (w_m + b_{1}'\varphi_m)\sin(\chi-\psi),\\
\bar{w}_{Bm} &= (v_m - b_{2}'\varphi_m)\sin(\chi-\psi) + (w_m + b_{1}'\varphi_m)\cos(\chi-\psi),\\
\bar{\varphi}_{xm} &= \varphi_m,\\
\bar{\varphi}_{ym} &= \frac{1}{r_s}\left[(mw_m - u_m\cos\chi)\cos(\chi-\psi) + (mv_m - u_m\sin\chi)\sin(\chi-\psi)\right].
\end{aligned}\right| \qquad (3.58)$$

Rozwijając występujące w (3.55) amplitudy sił i momentów wg uproszczonych wzorów (3.57) (jak dla cienkiego pierścienia) a wariacje amplitud przemieszczeń wg wzorów (3.58), uzyskamy dla dowolnego m ostateczne wyrażenie na pracę przygotowaną sił zewnętrznych działających na podstawę pierścienia.

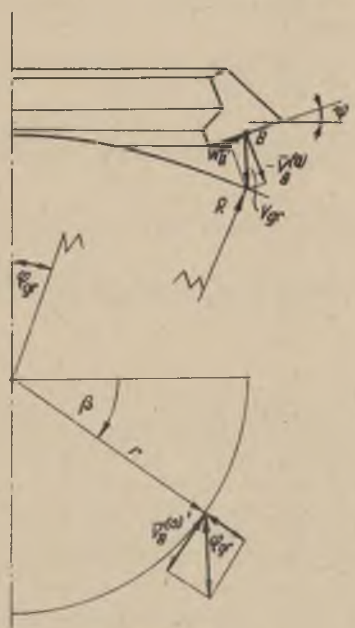
Podstawmy wyrażenia (3.37), (3.43) i (3.55) do równania(3.36) wyrażając wariacje składowych odkształcenia pierścienia przez wariacje przemieszczeń osi sprężystej wg (3.32) i zgrupujmy osobno wyrazy mnożone przez poszczególne wariacje. Biorąc pod uwagę, że wariacje przemieszczeń są od siebie niezależne, możemy przyrównać do zera występujące przy nich wyrażenia, co doprowadzi nas do układu czterech równań równowagi dla każdej wartości m. Wyrażając jeszcze siły wewnętrzne w pierścieniu przez odkształcenia, a te z kolei przez przemieszczenia, układowi temu można nadać postać rozwiązania w przemieszczeniach ze względu na amplitudy przemieszczeń osi sprężystości pierścienia.

W następnym rozdziale zostaną w ten sposób rozwinięte równania równowagi dla obu pierścieni układu chłodni, z tą tylko różnicą, że przemieszczenia punktów linii połączenia pierścieni z pozostałymi elementami układu zostaną potraktowane jako główne niewiadome.

3.4. Wpływ krzywizny i rozpełzania gruntu

W przypadku walcowego wygięcia terenu o stałym promieniu R możemy zapisać następujące wzory na pionowe przemieszczenia v_{gr} i kąt obrotu φ_{gr} w punkcie terenu odpowiadającym punktowi B pierścienia, p. rys. 10.

$$v_{gr} = \frac{1}{2R} r_B^2 \cos^2\beta = \frac{r_B^2}{4R}(1+\cos 2\beta), \quad \varphi_{gr} = \frac{r_B}{R} \cos\beta . \tag{3.59}$$



Rys. 10

Pierwszy wzór uzyskuje się zastępując równanie okręgu o promieniu R równaniem paraboli kwadratowej o krzywiźnie 1/R w wierzchołku paraboli.

Rozkładając wektor v_{gr} jak na rys. 10, otrzymamy na jego składowe zgodnie z oznaczeniami we wzorach (3.49)

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_B^{(o)} &= 0, \quad \bar{v}_B^{(o)} = -v_{gr}\cos\psi = -\frac{r_B^2}{4R}\cos\psi\,(1+\cos 2\beta), \\ \bar{w}_B^{(o)} &= v_{gr}\sin\psi = \frac{r_B^2}{4R}\sin\psi\,(1+\cos 2\beta). \end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

Rozkładając z kolei wektor kąta obrotu φ_{gr} otrzymamy następujące wyrażenia na pozostałe wielkości występujące we wzorach (3.49)

$$\bar{u}_B^{(o)'} = \bar{w}_B^{(o)'} = 0, \quad \bar{v}_B^{(o)'} = \frac{r_B}{R} \cos^2\beta = \frac{r_B}{2R}(1+\cos 2\beta). \tag{3.61}$$

Na amplitudy występujące w wyrażeniach szeregowych (3.56) możemy więc zapisać

dla $m = 0$ i $m = 2$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_{Bm}^{(o)} = 0, \quad \bar{v}_{Bm}^{(o)} = -\frac{r_B^2}{4R} \cos\psi, \quad \bar{w}_{Bm}^{(o)} = \frac{r_B^2}{4R} \sin\psi; \\ &\bar{u}_{Bm}^{(o)'} = \bar{w}_{Bm}^{(o)'} = 0, \quad \bar{v}_{Bm}^{(o)'} = \frac{1}{2} \frac{r_B}{R}. \end{aligned}\right| \tag{3.62}$$

Rozpatrzmy z kolei przypadek rozpełzania terenu ze stałą intensywnością ε.

W tym przypadku poziome przesunięcie u_{gr} dowolnego punktu podłoża odległego o x od linii rozpełzania wyrazić można następująco

$$u_{gr} = x\varepsilon = (r_B - \bar{z}.\cos\psi)\,\varepsilon \cos\beta, \tag{3.63}$$

a stąd na składowe przemieszczenia (3.49) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}^{(o)} = -u_{gr}\sin\beta = -\frac{1}{2}(r_B - \bar{z}\cos\psi)\,\varepsilon \sin 2\beta, \\ &\bar{v}^{(o)} = -u_{gr}\cos\beta.\sin\psi = -\frac{1}{2}(r_B - \bar{z}\cos\psi)\,\varepsilon \sin\psi(1+\cos 2\beta), \\ &\bar{w}^{o} = -u_{gr}.\cos\beta.\cos\psi = -\frac{1}{2}(r_B - \bar{z}\cos\psi)\varepsilon\cos\psi(1+\cos 2\beta), \end{aligned}\right| \tag{3.64}$$

p. rys. 11.

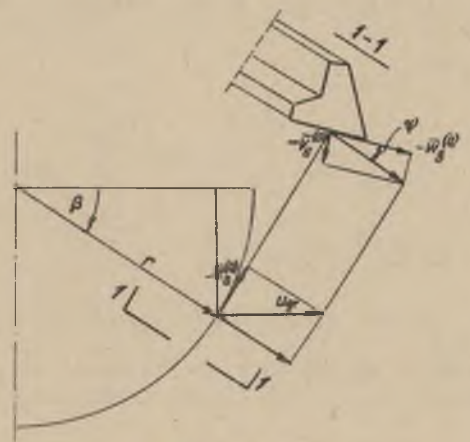
Z powyższych wyrażeń wynikają następujące wzory na amplitudy składowych przemieszczeń podłoża, p. (3.56)

dla $m = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_{Bm}^{(o)} = 0, \quad \bar{v}_{Bm}^{(o)} = -\frac{1}{2} r_B\, \varepsilon \sin\psi, \quad \bar{w}_{Bm}^{(o)} = -\frac{1}{2} r_B\, \varepsilon \cos\psi; \\ &\bar{u}_{Bm}^{(o)'} = 0, \quad \bar{v}_{Bm}^{(o)'} = \frac{1}{2}\, \varepsilon \sin\psi\cos\psi, \quad \bar{w}_{Bm}^{(o)'} = \frac{1}{2}\varepsilon\cos^2\psi. \end{aligned}\right| \tag{3.65a}$$

dla $m = 2$

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}^{(o)}_{Bm} = -\frac{1}{2} r_B\varepsilon, \quad \bar{v}^{(o)}_{Bm} = -\frac{1}{2} r_B\varepsilon\sin\psi, \quad \bar{w}^{(o)}_{Bm} = -\frac{1}{2} r_B\varepsilon\cos\psi;\\&\bar{u}^{(o)'}_{Bm} = \frac{1}{2}\varepsilon\cos\psi, \quad v^{(o)'}_{Bm} = \frac{1}{2}\varepsilon\sin\psi\cos\psi, \quad \bar{w}^{(o)'}_{Bm} = \frac{1}{2}\varepsilon\cos^2\psi.\end{aligned}\right| \quad (3.65b)$$



Rys. 11

Podstawiając wyrażenia (3.62) i (3.65) do wzorów (3.57) stwierdzimy, że wyrazom $\bar{u}^{(o)'}_{Bm}$, $\bar{v}^{(o)'}_{Bm}$ i $\bar{w}^{(o)'}_{Bm}$ odpowiadają jednostkowe oddziaływania podłoża rzędu b/r w stosunku do oddziaływań od wpływu $\bar{u}^{(o)}_{Bm}$, $\bar{v}^{(o)}_{Bm}$ i $\bar{w}^{(o)}_{Bm}$. W przypadku cienkich pierścieni umożliwia to dodatkowe uproszczenie wzorów (3.57).

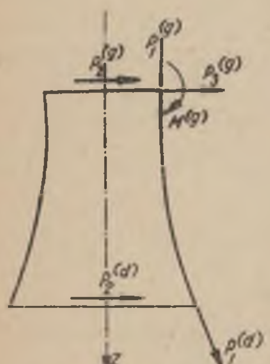
4. ROZWIĄZANIE UKŁADU POWŁOKOWEJ CHŁODNI KOMINOWEJ

4.1. Uwagi ogólne

Jak wyjaśniono we wstępie, rozwiązanie układu dowolnej chłodni kominowej poddanej różnorodnym wpływom rozłożyć można na dwa etapy. Pierwszy etap obejmuje rozwiązanie samej powłoki komina przy założeniu utwierdzenia jej krawędzi, co prowadzi do pewnych dodatkowych sił na liniach połączenia. W drugim etapie wyznacza się siły wewnętrzne już w całym układzie obciążonym na tych liniach przeciwnie skierowanymi dodatkowymi siłami z pierw szego etapu. Rozwiązanie drugiego etapu, które stanowi zasadnicze zagadnienie, zostanie szczegółowo omówione w niniejszym rozdziale.

Błonowe rozwiązanie powłoki komina w pierwszym etapie umożliwi nam określenie sił błonowych w dowolnym punkcie powłoki, w szczególności na jej brzegach. Przypisując tym siłom brzegowym charakter sił zewnętrznych, przyłożonych do układu na liniach połączenia i oznaczając je przez P i M oraz przyjmując dla nich zwroty jak na rys. 12, możemy zapisać na ich amplitudy

$$\left.\begin{aligned} &P_{1m}^{(g)} = -N_{1m}^{(g)},\; P_{2m}^{(g)} = -S_{m}^{(g)},\; P_{3m}^{(g)} = -Q_{1m}^{(g)} \\ &M_{m}^{(g)} = -M_{1m}^{(g)};\; P_{1m}^{(d)} = N_{1m}^{(d)},\; P_{2m}^{(d)} = S_{m}^{(d)} \end{aligned}\right\} \quad (4.01)$$



Rys. 12

W przypadku ruchów podłoża gruntowego otrzymamy również pewne dodatkowe siły działające na powierzchni kontaktu pierścienia fundamentowego z podłożem. Siły te zredukowane do środkowej linii powierzchni kontaktu, obliczyć można ze wzorów (3.52) uwzględniając wyrażenia (3.49).

Równania rozwiązania drugiego etapu otrzymamy, ustawiając w oparciu o zasadę prac przygotowanych, równania równowagi dla obu pierścieni układu oraz równania nierozdzielności na linii połączenia powłoki z podbudową.

Za główne niewiadome w naszym rozwiązaniu przyjmiemy cztery amplitudy przemieszczeń górnej krawędzi powłoki i dwie amplitudy sił błonowych na jej dolnej krawędzi oraz cztery amplitudy przemieszczeń na linii połączenia słupów podbudowy z pierścieniem fundamentowym. Wskutek takiego przyjęcia zasadniczy stan naprężenia w powłoce określony zostanie przez dwie amplitudy przemieszczeń na krawędzi górnej i dwie amplitudy sił na dolnej krawędzi, co w przypadku znanego ogólnego rozwiązania (2.87) wymagać będzie wyrażenia stałych C_{im} przez przyjęte amplitudy lub bezpośredniego rozwiązania równań stanu błonowego i zasadniczego stanu zgięciowego dla odpowiednich warunków brzegowych. W wyniku otrzymamy wyrażenia na siły błonowe i przemieszczenia, którym będziemy mogli również nadać postać (2.87) z tym, że teraz

$$C_{1m} = N_{1m}^{(d)},\; C_{2m} = S_{m}^{(d)},\; C_{3m} = u_{m}^{(g)},\; C_{4m} = v_{m}^{(g)} \qquad (4.02)$$

4.2. Równania równowagi pierścienia górnego

Cztery pierwsze równania rozwiązania drugiego etapu dla dowolnego m znajdziemy stosując do pierścienia górnego zasadę prac przygotowanych dla wirtualnego stanu przemieszczeń

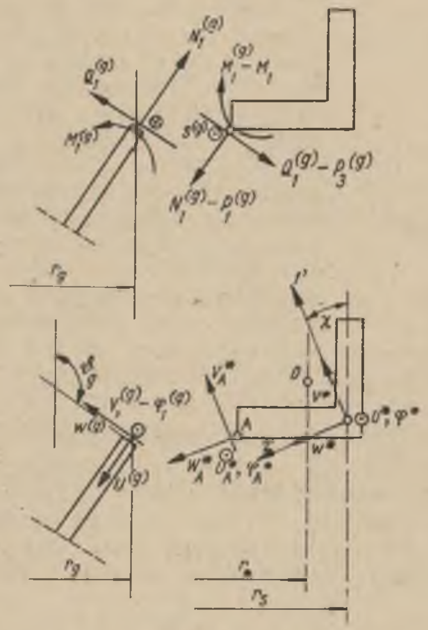
$$\delta A_m - \delta L_m = 0, \tag{4.03}$$

i traktując wariacje przemieszczeń na linii połączeń powłoki z pierścieniem jako wirtualne przemieszczenia.

Na przyrost pracy δL_m sił zewnętrznych w stosunku do pierścienia, możemy zapisać - p. rys. 13.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\,\delta L_m = \Big[&(N_{1m}^{(g)} - P_{1m}^{(g)})\,\delta u_m^{(g)} + (S_m^{(g)} - P_{2m}^{(g)})\,\delta v_m^{(g)} - \\ &-(Q_{1m}^{(g)} - P_{3m}^{(g)})\,\delta w_m^{(g)} + (M_{1m}^{(g)} - M_m^{(g)})\,\delta\varphi_{1m}^{(g)}\Big] r_g \end{aligned}\right\} \tag{4.04}$$

por. (3.43).



Rys. 13

Podstawiając (3.38) i (4.04) do (4.03) otrzymamy[x)]

$$
\left.\begin{aligned}
&N^*_m\,\delta\varepsilon^*_m + M^*_{1m}\,\delta\chi^*_{1m} + M^*_{2m}\,\delta\chi^*_{2m} + \frac{r_s}{r^*}M^*_{3m}\,\delta\tau^*_m)r_* - \\
&-\Big[(N^{(g)}_{1m}-P^{(g)}_{1m})\delta u^{(g)}_m + (S^{(g)}_m-P^{(g)}_{2m})\delta v^{(g)}_m-(Q^{(g)}_{1m}-P^{(g)}_{3m})\delta w^{(g)}_m + \\
&+ (M^{(g)}_{1m}-M^{(g)}_m)\delta\varphi^{(g)}_{1m}\Big]r_g = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (4.05)
$$

przy czym składowe odkształcenia pierścienia wyrażają się przez przemieszczenia osi sprężystości S wg wzorów (3.32).

W związku z przyjęciem przemieszczeń górnej krawędzi powłoki za główne niewiadome, należy przez nie wyrazić przemieszczenia punktów osi sprężystości S. Amplitudy przemieszczeń osi S wyrazić można przez amplitudy przemieszczeń u^*_{Am}, v^*_{Am} ... p. A wg wzorów (3.44) podstawiając w nich za r_s, r_A, a_1, i a_2, odpowiednio r_A, r_s, $-a_1$, i $-a_2$; w ten sposób otrzymamy

$$
\left.\begin{aligned}
&u^*_m = \frac{r_s}{r_A}u^*_{Am} - m\frac{a_1}{r_A}v^*_{Am} - m\frac{a_2}{r_A}w^*_{Am}, \\
&v^*_m = v^*_{Am} + a_2\varphi^*_{Am},\quad w^*_m = w^*_{Am} - a_1\varphi^*_{Am},\quad \varphi^*_m = \varphi^*_{Am}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.06)
$$

Podstawiając w miejsce v^*_{Am} i w^*_{Am}

$$
\left.\begin{aligned}
&v^*_{Am} = -u^{(g)}_m\sin(\vartheta_g+\chi_g) - w^{(g)}_m\cos(\vartheta_g+\chi_g), \\
&w^*_{Am} = -u^{(g)}_m\cos(\vartheta_g+\chi_g) + w^{(g)}_m\sin(\vartheta_g+\chi_g),
\end{aligned}\right\} \quad (4.07)
$$

i uwzględniając, że $\varphi^*_{Am}=-\varphi^{(g)}_A$ i $u^*_{Am} = v^{(g)}_m$, otrzymamy potrzebne wzory. Wzorom tym nadamy następującą postać

$$
\left.\begin{aligned}
&u^*_m = k_{uu}u^{(g)}_m + k_{uv}v^{(g)}_m + k_{uw}w^{(g)}_m + k_{u\varphi}\varphi^{(g)}_{1m} \\
&v^*_m = k_{vu}u^{(g)}_m + k_{vv}v^{(g)}_m + k_{vw}w^{(g)}_m + k_{v\varphi}\varphi^{(g)}_{1m}
\end{aligned}\right\} \quad (4.08)
$$

[x)] Od tego miejsca wielkości dla pierścieni oznacza się gwiazdką

$$\left.\begin{aligned} w^*_m &= k_{wu}u_m^{(g)} + k_{wv}v_m^{(g)} + k_{ww}w_m^{(g)} + k_{w\varphi}\,\varphi_{1m}^{(g)}, \\ \varphi^*_m &= k_{\varphi u}u_m^{(g)} + k_{\varphi v}v_m^{(g)} + k_{\varphi w}\cdot w_m^{(g)} + k_{\varphi\varphi}\,\varphi_{1m}^{(g)} \end{aligned}\right\} \quad (4.08)$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} & k_{uu} = mA_1,\ k_{uv} = \frac{r_s}{r_g},\ k_{uw} = mA_2,\ k_{u\varphi} = 0; \\ & k_{vu} = -\sin(\vartheta_g+\chi_g), k_{vv} = 0,\ k_{vw} = -\cos(\vartheta_g+\chi_g),\ k_{v\varphi} = -a_2'; \\ & k_{wu} = -\cos(\vartheta_g+\chi_g),\ k_{wv} = 0,\ k_{ww} = \sin(\vartheta_g+\chi_g),\ k_{w\varphi} = a_1'; \\ & k_{\varphi u} = k_{\varphi v} = k_{\varphi w} = 0,\ k_{\varphi\varphi} = -1, \end{aligned}\right\} \quad (4.09)$$

a

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1'}{r_g}\sin(\vartheta_g+\chi_g) + \frac{a_2'}{r_g}\cos(\vartheta_g+\chi_g), \\ A_2 &= \frac{a_1'}{r_g}\cos(\vartheta_g+\chi_g) - \frac{a_2'}{r_g}\sin(\vartheta_g+\chi_g) \end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

Podstawiając do równania (4.05) w miejsce odkształceń wyrażenie (3.32) oraz wyrażając przemieszczenia osi pierścienia przez przemieszczenia górnej krawędzi powłoki wg (4.08) otrzymamy po uporządkowaniu

$$\left.\begin{aligned} & (r_{uN}N^*_m + r_{uM_1}M^*_{1m} + r_{uM_2}M^*_{2m} + r_{uM_3}M^*_{3m} + R_u)\,\delta u_m^{(g)} + \\ & + (r_{vN}N^*_m + r_{vM_1}M^*_{1m} + r_{vM_2}M^*_{2m} + r_{vM_3}M^*_{3m} + R_v)\,\delta v_m^{(g)} + \\ & + (r_{wN}N^*_m + r_{wM_1}M^*_{1m} + r_{wM_2}M^*_{2m} + r_{wM_3}M^*_{3m} + R_w)\,\delta w_m^{(g)} + \\ & + (r_{\varphi N}N^*_m + r_{\varphi M_1}M^*_{1m} + r_{\varphi M_2}M^*_{2m} + r_{\varphi M_3}M^*_{3m} + R_\varphi)\,\delta\varphi_{1m}^{(g)} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.11)$$

Występujące tu wielkości r wyrażają się następująco przez geometryczne parametry układu i liczbę m

$$
\left.
\begin{aligned}
&r_{uN} = m^2 \frac{r_*}{r_s} A_1 - k_{vu}B_1 - k_{wu}B_2, \quad r_{uM_1} = -\frac{m^2}{r_s}(A_1\cos\chi_g - k_{wu}),\\
&r_{uM_2} = \frac{m^2}{r_s}(A_1\sin\chi_g - k_{vu}), \quad r_{uM_3} = \frac{m}{r_s}(-k_{wu}\sin\chi_g + k_{vu}\cos\chi_g);\\
&r_{vN} = m\frac{r_*}{r_g}, \quad r_{vM_1} = -\frac{m}{r_g}\cos\chi_g, \quad r_{vM_2} = \frac{m}{r_g}\sin\chi_g, \quad r_{vM_3} = 0;\\
&r_{wN} = m^2 \frac{r_*}{r_s} A_2 - k_{vw}B_1 - k_{ww}B_2, \quad r_{wM_1} = -\frac{m^2}{r_s}(A_2\cos\chi_g - k_{ww}),\\
&r_{wM_2} = \frac{m^2}{r_s}(A_2\sin\chi_g - k_{vw}), \quad r_{wM_3} = -\frac{m}{r_s}(k_{ww}\sin\chi_g - k_{vw}\cos\chi_g),\\
&r_{\varphi N} = \frac{m^2}{r_s}(s_1a_2' - s_2a_1') + (a_2'+s_2)\sin\chi_g - (a_1'+s_1).\cos\chi_g,\\
&r_{\varphi M_1} = m^2\frac{a_1'}{r_s} - \sin\chi_g, \quad r_{\varphi M_2} = m^2\frac{a_2'}{r_s} - \cos\chi_g, \quad r_{\varphi M_3} = m\frac{r_g}{r_s};
\end{aligned}
\right\} \quad (4.12)
$$

gdzie A_1 i A_2 wg (4.10), a

$$
B_1 = m^2\frac{s_1}{r_s} + \sin\chi_g, \quad B_2 = m^2\frac{s_2}{r_s} + \cos\chi_g \qquad (4.13)
$$

Wyrazy R, które przedstawiają wpływ obciążenia i oddziaływania powłoki, wyrażają się następująco

$$
\left.
\begin{aligned}
&R_u = -(N_{1m}^{(g)} - P_{1m}^{(g)})r_g, \quad R_v = -(S_m^{(g)} - P_{2m}^{(g)})r_g,\\
&R_w = (Q_{1m}^{(g)} - P_{3m}^{(g)})r_g, \quad R_\varphi = -(M_{1m}^{(g)} - M_m^{(g)})r_g
\end{aligned}
\right\} \quad (4.14)
$$

Przyrównując wyrażenia zawarte w równaniu (4.11) w nawiasach do zera, otrzymamy cztery równania równowagi pierścienia górnego, obciążonego siłami oddziaływania powłoki i siłami przyłożonymi na linii połączenia. W celu nadania tym równaniom ostatecznej postaci należy wyrazić siły wewnętrzne w pierścieniu przez przemieszczenia górnego brzegu powłoki, a siły oddziaływania na tym brzegu przez jego przemieszczenia i siły błonowe na brzegu dolnym.

Wyrażając amplitudy sił w pierścieniu przez amplitudy odkształceń wg (3.34) lub (3.35) w przypadku wiotkich pierścieni a te z kolei przez amplitudy przemieszczeń górnego brzegu wg

(3.32) i.(4.08), otrzymamy wzory, które zapisać można w następującej postaci

$$
\left.\begin{aligned}
&N_m^* = N_{mu}^* u_m^{(g)} + N_{mv}^* v_m^{(g)} + N_{mw}^* w_m^{(g)} + N_{m\varphi}^* \varphi_{1m}^{(g)},\\
&M_{im} = M_{imu}^* u_m^{(g)} + M_{imv}^* v_m^{(g)} + M_{imw}^* w_m^{(g)} +\\
&+ M_{im\varphi}^* \varphi_{1m}^{(g)} \qquad (i = 1,2,3)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.15)
$$

Dla najprostszego wariantu równań fizycznych (3.35) będziemy mieli:

$$
\left.\begin{aligned}
&N_{mu}^* = \frac{EA}{r_*}\left[m \frac{r_a}{r_s} k_{uu} - B_1 k_{vu} - B_2 k_{wu} + (s_1 \cos\chi_g - s_2 \sin\chi_g) k_{\varphi u}\right],\\
&M_{1mu}^* = \frac{EJ_1^*}{r_* r_s}\left[-mk_{uu}\cos\chi_g + m^2 k_{wu} + r_s k_{\varphi u}\sin\chi_g\right],\\
&M_{2mu}^* = \frac{EJ_2^*}{r_* r_s}\left[mk_{uu}\sin\chi_g - m^2 k_{vu} + r_s k_{\varphi u}\cos\chi_g\right],\\
&M_{3mu}^* = m\,\frac{GC_o^*}{r_s^2}\left[k_{vu}\cos\chi_g - k_{wu}\sin\chi_g - r_s k_{\varphi u}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (4.16)
$$

Wzory na siły wewnętrzne od wpływu pozostałych przemieszczeń otrzymamy ze wzorów (4.16) podstawiając w nich w miejsce k_{uu}, k_{vu}, k_{wu} i $k_{\varphi u}$ odpowiednio k_{uv}, k_{vv} ....; k_{uw}, k_{vw} ..... i $k_{u\varphi}$, $k_{v\varphi}$ .....

Wyrażenia na siły oddziaływania powłoki występujące w (4.14) otrzymamy bezpośrednio ze wzorów (2.93).

Podstawiając wyrażenia (4.15) i (2.93) do równania (4.11) i przyrównując wyrażenia zawarte przy wariacjach przemieszczeń do zera, otrzymamy cztery równania równowagi dla górnego pierścienia, którym możemy nadać następującą postać

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[r_{uu} - (N_{1mu}^{(g)} + \tilde{N}_{1mu}^{(g)}) r_g\right] u_m^{(g)} + \left[r_{uv} - (N_{1mv}^{(g)} + \tilde{N}_{1mv}^{(g)}) r_g\right] v_m^{(g)} +\\
&+ (r_{uw} - r_g N_{1mw}^{(g)}) w_m^{(g)} + (r_{u\varphi} - r_g N_{1m\varphi}^{(g)}) \varphi_{1m}^{(g)} -\\
&- r_g N_{1mN}^{(g)} N_{1m}^{(d)} - r_g N_{1ms}^{(g)} S_m^{(d)} + r_g P_{1m}^{(g)} = 0,\\
&\left[r_{vu} - (\tilde{S}_{mu}^{(g)} + S_{mu}^{(g)}) r_g\right] u_m^{(g)} + \left[r_{vv} - (S_{mv}^{(g)} + \tilde{S}_{mv}^{(g)}) r_g\right] v_m^{(g)} +
\end{aligned}\right\} \qquad (4.17)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+ (r_{vw}-r_g S'^{(g)}_{mw})w^{(g)}_m+(r_{v\varphi}-r_g S'^{(g)}_{m\varphi})\varphi^{(g)}_{1m}-r_g S^{(g)}_{mN}\, N^{(d)}_{1m} - \\
&- r_g S^{(g)}_{ms}\, S^{(d)}_m + r_g P^{(g)}_{2m} = 0, \\
&(r_{wu}+r_g Q^{(g)}_{1mu})u^{(g)}_m+(r_{wv}+r_g Q^{(g)}_{1mv})v^{(g)}_m+(r_{ww}+r_g Q^{(g)}_{1mw})w^{(g)}_m + \\
&+ (r_{w\varphi}+r_g Q^{(g)}_{1m\varphi})\varphi^{(g)}_{1m}-r_g P^{(g)}_{3m} = 0, \\
&(r_{\varphi u}-r_g M^{(g)}_{1mu})u^{(g)}_m+(r_{\varphi v}-r_g M^{(g)}_{1mv})v^{(g)}_m + (r_{\varphi w}-r_g M^{(g)}_{1mw})w^{(g)}_m + \\
&+ (r_{\varphi\varphi}-r_g M^{(g)}_{1m\varphi})\varphi^{(g)}_m + r_g M^{(g)}_m = 0,
\end{aligned}
\right\} \text{(cd.4.17)}
$$

gdzie

$$
\left.
\begin{aligned}
&r_{\alpha\beta} = r_{\alpha N}\, N^*_{m\beta} + r_{\alpha M_1}\, M^*_{1m\beta} + r_{\alpha M_2}\, M^*_{2m\beta} + r_{\alpha M_3}\, M^*_{3m\beta}, \\
&(\alpha,\beta = u,v,w,\varphi)
\end{aligned}
\right\} (4.18)
$$

4.3. Równania nierozdzielności

W celu uzyskania dwóch następnych równań rozwiązania, tj. równań nierozdzielności w przekroju połączenia powłoki z podbudową zastosujemy zasadę prac przygotowanych dla wirtualnego stanu naprężenia

$$
\delta W - \delta L = 0 \qquad (4.19)
$$

do samej podbudowy, traktując przemieszczenia dolnej krawędzi powłoki i pierścienia fundamentowego jako wielkości zadane.

Na rys. 14 pokazano oznaczenia, z których korzystać będziemy przy rozwijaniu równania (4.19).

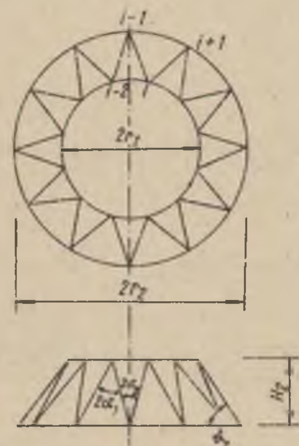
Łatwo stwierdzić, że kąty α_1 i α_2 zawarte między słupami podbudowy, kąty ϑ_1 i ϑ_2, które tworzą płaszczyzny wyznaczone przez słupy z płaszczyzną poziomą oraz długość l słupów wyrażają się następująco przez parametry r_1, r_2 i H_2

$$
\alpha_1 = \text{arc tg}(\frac{r_2}{h_1})\sin \frac{2\pi}{n}), \quad \alpha_2 = \text{arc tg}(\frac{r_1}{h_2}\sin \frac{2\pi}{n}), \qquad (4.20a)
$$

$$
\vartheta_1 = \text{arc tg}(\frac{H_2}{r_2\cos\frac{2\pi}{n} - r_1}), \quad \vartheta_2 = \text{arc tg}(\frac{H_2}{r_2-r_1\cos\frac{2\pi}{n}}), \quad (4.20b)
$$

$$l^2 = H_2^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\frac{2\pi}{n} \qquad (4.20c)$$

gdzie n - liczba słupów podbudowy.



Rys. 14

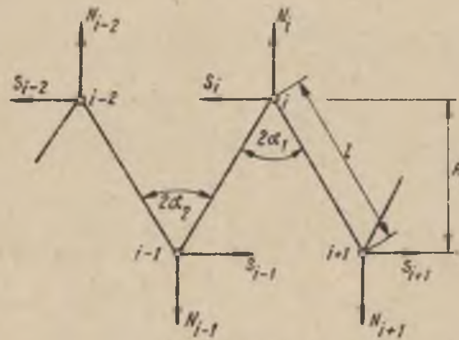
Przyrost pracy δW sił wewnętrznych w słupach podbudowy, obliczymy jako pracę sił wirtualnych na rzeczywistych przesunięciach górnych węzłów podbudowy zakładając, że dolne węzły nie uległy przesunięciom. Za wirtualne siły przyjmiemy wariacje rzeczywistych sił działających na górne węzły podbudowy.

Siły w słupach zbiegających się w dowolnym i - ym węźle górnym obciążonym siłami N_i i S_i będą równe - p. rys. 15,

$$P_{i-1,i} = \frac{N_i}{2\cos\alpha_i} - \frac{S_i}{2\sin\alpha_i}\,, \quad P_{i,i+1} = \frac{N_i}{2\cos\alpha_i} + \frac{S_i}{2\sin\alpha_i}$$

i składowe pionowa Δ'_i oraz pozioma Δ''_i przesunięcia węzła i wyrażą się następująco

$$\left.\begin{aligned} \Delta'_i &= \frac{1}{EF}\,\frac{N_i}{2\cos^2\alpha_i} = \frac{2\pi r_i l}{nEF\cos^2\alpha_i}\left(N_i^{(d)}+P_1^{(d)}\right), \\ \Delta''_i &= \frac{1}{EF}\,\frac{S_i}{2\sin^2\alpha_i} = \frac{2\pi r_i l}{nEF\sin^2\alpha_i}\left(S^{(d)}+P_2^{(d)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$



Rys. 15

Przedstawiając jeszcze składowe przesunięcia górnych węzłów w postaci szeregów trygonometrycznych

$$\Delta' = \sum \Delta'_m \cos m\beta, \quad \Delta'' = \sum \Delta''_m \sin m\beta, \tag{4.22}$$

otrzymamy następujące wyrażenia na ich amplitudy

$$\Delta'_m = \frac{2\pi r_i l}{nEF\cos^2\alpha_i}\left(N_{1m}^{(d)} + P_{1m}^{(d)}\right), \quad \Delta''_m = \frac{2\pi r_i l}{nEF\sin^2\alpha_i}\left(S_m^{(d)}+P_{2m}^{(d)}\right) \tag{4.23}$$

Przyrost pracy sił wewnętrznych podbudowy można więc wyrazić następująco

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \left(\delta N_1^{(d)}\,\Delta' + \delta S^{(d)}\,\Delta''\right) r_d\, d\beta. \tag{4.24}$$

Przyrost pracy sił zewnętrznych δL obliczymy jako pracę wariacji tych sił na odpowiadających im rzeczywistych przemie szczeniach. Siłami zewnętrznymi w stosunku do rozpatrywanej części, będą siły oddziaływania powłoki i pierścienia fundamentowego, zaś przemieszczeniami - przemieszczenia $u^{(d)}$, $v^{(d)}$ powłoki oraz przemieszczenia na linii połączenia pierścienia fundamentowego z podbudową.

Siły oddziaływania pierścienia fundamentowego na podbudowę znajdziemy biorąc pod uwagę siły w dwóch prętach zbiegających się w dowolnym węźle dolnym np. w węźle i-i (rys. 15):

$$P_{i-2,i-i} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_{i-2}}{\cos\alpha_1} + \frac{S_{i-2}}{\sin\alpha_1}\right), \quad P_{i-1,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_i}{\cos\alpha_1} - \frac{S_i}{\sin\alpha_1}\right),$$

a stąd

$$\left.\begin{aligned} N_{i-i} &= \frac{\cos\alpha_2}{2\cos\alpha_1}(N_{i-2}+N_i) - \frac{\cos\alpha_2}{2\sin\alpha_1}(S_i-S_{i-2}), \\ S_{i-i} &= -\frac{\sin\alpha_2}{2\cos\alpha_1}(N_i-N_{i-2}) + \frac{\sin\alpha_2}{2\sin\alpha_1}(S_{i-2}+S_i). \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

Przedstawiając siły oddziaływania na dolne węzły podbudowy na linii A przy pomocy sił rozłożonych w sposób ciągły

$$N_A = \sum N_{Am}\cos m\beta, \quad S_A = \sum S_{Am}\sin m\beta, \tag{4.26}$$

znajdziemy ich amplitudy na podstawie (4.21) uwzględniając (2.09)

$$\left.\begin{aligned} N_{Am} &= \frac{r_1\cos\alpha_2}{r_2\cos\alpha_1}(N_{1m}^{(d)}+P_{1m}^{(d)}) - \frac{2\pi m}{n}\,\frac{r_1\cos\alpha_2}{r_2\sin\alpha_1}(S_m^{(d)}+P_{2m}^{(d)}), \\ S_{Am} &= \frac{r_1\sin\alpha_2}{r_2\sin\alpha_1}(S_m^{(d)}+P_{2m}^{(d)}) + \frac{2\pi m}{n}\,\frac{r_1\sin\alpha_2}{r_2\cos\alpha_1}(N_{1m}^{(d)}+P_{1m}^{(d)}) \end{aligned}\right\} \quad (4.27)$$

Oznaczając jeszcze przemieszczenia na linii A połączenia podbudowy z fundamentem, odpowiadające siłom N_A i S_A odpowiednio przez u_A i v_A, będziemy mogli zapisać następujące wyrażenie na przyrost pracy δL wszystkich sił zewnętrznych działających na podbudowę

$$\delta L = -\int_0^{2\pi}(\delta N_1^{(d)}u^{(d)} + \delta S^{(d)}\cdot v^{(d)})r_d\,d\beta + \int_0^{2\pi}(\delta N_A u_A + \delta S_A v_A)r_A\,d\beta \tag{4.28}$$

Podstawiając (4.24) i (4.28) do równania prac (4.19) i przedstawiając występujące w nim funkcje w postaci szeregów trygonometrycznych, otrzymamy po scałkowaniu następujące równanie dla dowolnego m

$$
\left.\begin{aligned}
&(\delta N_{1m}^{(d)}\,\Delta'_m+\delta S_m^{(d)}\cdot\Delta''_m)r_d+(\delta N_{1m}^{(d)}u_m^{(d)}+\delta S_m^{(d)}\cdot v_m^{(d)})r_d-\\
&-(\delta N_{Am}u_{Am}+\delta S_{Am}v_{Am})r_A=0.
\end{aligned}\right\}\quad(4.29)
$$

Wyrażając δN_{Am} i δS_{Am} przez $\delta N_{1m}^{(d)}$ i $\delta S_m^{(d)}$ wg (4.27) możemy równaniu (4.29) nadać następującą postać

$$
\left.\begin{aligned}
&(\Delta'_m+u_m^{(d)}-\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}u_{Am}-\frac{2\pi m}{n}\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1}v_{Am})\delta N_{1m}^{(d)}+\\
&+(\Delta''_m+v_m^{(d)}+\frac{2\pi m}{n}\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1}u_{Am}-\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}v_{Am})\delta S_m^{(d)}=0
\end{aligned}\right\}\quad(4.30)
$$

Uwzględniając wyrażenia (4.23) i rozwijając $u_m^{(d)}$, $v_m^{(d)}$ wg wzorów

$$
\left.\begin{aligned}
u_m^{(d)}&=u_{mu}^{(d)}u_m^{(g)}+u_{mv}^{(d)}v_m^{(g)}+u_{mN}^{(d)}N_{1m}^{(d)}+u_{ms}^{(d)}S_m^{(d)}\\
v_m^{(d)}&=v_{mu}^{(d)}u_m^{(g)}+v_{mv}^{(d)}v_m^{(g)}+v_{mN}^{(d)}N_m^{(d)}+v_{ms}^{(d)}S_m^{(d)},
\end{aligned}\right\}\quad(4.31)
$$

po przyrównaniu do zera wyrażeń zawartych w równaniu (4.30) w nawiasach, otrzymamy następujące dwa dalsze równania rozwiązania drugiego etapu.

$$
\left.\begin{aligned}
&u_{mu}^{(d)}\cdot u_m^{(g)}+u_{mv}^{(d)}v_m^{(g)}+(\frac{2\pi r_d l}{nEF\cdot\cos^2\alpha_1}+u_{mN}^{(d)})N_{1m}^{(d)}+u_{ms}^{(d)}S_m^{(d)}-\\
&-\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}u_{Am}-\frac{2\pi m}{n}\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cdot v_{Am}+\frac{2\pi r_d l}{nEF\cos^2\alpha_1}P_{1m}^{(d)}=0,\\
&v_{mu}^{(d)}u_m^{(g)}+v_{mv}^{(d)}v_m^{(g)}+v_{mN}^{(d)}N_m^{(d)}+(\frac{2\pi r_d l}{nEF\sin^2\alpha_1}+v_{ms}^{(d)})S_m^{(d)}+\\
&+\frac{2\pi m}{n}\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1}u_{Am}-\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}v_{Am}+\frac{2\pi r_d\cdot l}{nEF\sin^2\alpha_1}P_{2m}^{(d)}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(4.32)
$$

Dla szczególnego przypadku podbudowy, dla której $r_1 = r_2 = r$ i tym samym $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i $l \cong H_2/\cos\alpha$, otrzymamy w miejsce równań (4.32)

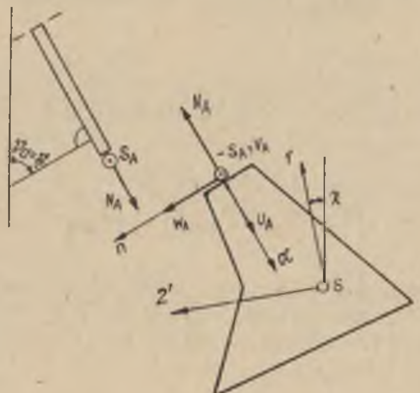
$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\pi r H_2}{nEF\cos^3\alpha} N_{1m}^{(d)} + u_m^{(d)} - u_{Am} - \frac{2\pi m}{n} \operatorname{tg}\alpha\, v_{Am} + \frac{2\pi r H_2}{nEF\cos^3\alpha} P_{1m}^{(d)} = 0 \\ &\frac{2\pi r H_2}{nEF\sin^2\alpha\cos\alpha} S_m^{(d)} + v_m^{(d)} + \frac{2\pi m}{n} \operatorname{ctg}\alpha\, u_{Am} - v_{Am} + \frac{2\pi r H_2}{nEF\sin^2\alpha\cos\alpha} P_{2m}^{(d)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.33)$$

Łatwo stwierdzić, że powyższe równania są identyczne z równaniami (3.24) artykułu [6]. W tym celu należy tylko przemieszczenia na linii A wyrazić przez przemieszczenia środka ciężkości pierścienia fundamentowego ($u_{Am} = -v_m^*$, $v_{Am} = u_m + m\frac{e}{r}v_m^*$) oraz uwzględnić różnice w znakach niektórych wielkości. Różnice te wynikły wskutek zmiany zwrotu pionowej osi układu współrzędnych powłoki w stosunku do zwrotu przyjętego w artykule [6].

4.4. Równania równowagi pierścienia fundamentowego

Ostatnie równania rozwiązania układu, a mianowicie równania równowagi dla pierścienia fundamentowego, znajdziemy w oparciu o zasadę prac przygotowanych dla wirtualnego stanu przemieszczeń (4.03) podobnie jak równania równowagi dla górnego pierścienia.

Za główne niewiadome przyjmiemy tutaj przemieszczenia u_A, v_A, w_A i φ_A na linii połączenia pierścienia fundamentowego z podbudową, odniesione do układu współrzędnych α, β, n odpowiadającego ruchomemu układowi współrzędnych powłoki - p. rys. 16 Amplitudy przemieszczeń osi sprężystości pierścienia wyrazić możemy przez amplitudy przemieszczeń na linii A wg wzorów(4.08) podstawiając w miejsce $u_m^{(g)}$, $v_m^{(g)}$, $w_m^{(g)}$ i $\varphi_m^{(g)}$ odpowiednio u_{Am},



Rys. 16

v_{Am}, w_{Am} i φ_{Am}. Współczynniki k występujące we wzorach (4.08) znajdziemy wg (4.09) wprowadzając w miejsce r_g, ϑ_g i χ_g odpowiednio r_A, ϑ_A i χ_A.

Podobnie siły wewnętrzne w pierścieniu dolnym wyrazić możemy przez przemieszczenia na linii A wg wzorów (4.15)i(4.16).

Wyrażenie na δW_m przyjmiemy wg (3.38). Wyrażając odkształcenie osi sprężystej wg (3.32) i (4.08) oraz siły wewnętrzne w pierścieniu wg (4.15) i (4.16) przez przemieszczenie na linii A, będziemy mogli wyrażeniu na δW_m nadać następującą postać

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\delta W_m = {} & (r_{uu}u_{Am}+r_{uv}v_{Am}+r_{uw}w_{Am}+r_{u\varphi}\varphi_{Am})\delta u_{Am} + \\ & + (r_{vu}u_{Am}+r_{vv}v_{Am}+r_{vw}w_{Am}+r_{v\varphi}\varphi_{Am})\,\delta v_{Am} + \\ & + (r_{wu}u_{Am}+r_{wv}v_{Am}+r_{ww}w_{Am}+r_{w\varphi}\varphi_{Am})\,\delta w_{Am} + \\ & + (r_{\varphi u}u_{Am}+r_{\varphi v}v_{Am} + r_{\varphi w}w_{Am}+r_{\varphi\varphi}\varphi_{Am})\delta\varphi_{Am};\end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

występujące tu wielkości r znajdziemy wg (4.18).

Drugi wyraz występujący w równaniu (4.03) przedstawić możemy w postaci sumy dwóch wyrazów

$$\delta L_m = \delta L_{Am} + \delta L_{Bm} \qquad (4.35)$$

przy czym na δL_{Am} przyrost pracy sił zewnętrznych na linii A, mo żemy zapisać bezpośrednio

$$\frac{1}{\pi}\delta L_{Am} = -(N_{Am}\delta u_{Am}+S_{Am}\delta v_{Am})r_A, \qquad (4.36)$$

p. rys. 16,

a δL_{Bm} przyrost pracy sił oddziaływania podłoża znajdziemy wg (3.55)

$$\frac{1}{\pi}\delta L_{Bm} = (\bar{P}_{xm}\delta\bar{u}_{Bm}+\bar{P}_{ym}\delta\bar{v}_{Bm}+\bar{P}_{zm}\delta\bar{w}_{Bm}+\bar{M}_{xm}\delta\bar{\varphi}_{xm})r_B. \qquad (4.37)$$

Przemieszczenia podstawy pierścienia wyrazić możemy przez przemieszczenia linii A w układzie 1', 2' bezpośrednio ze wzorów (3.58) podstawiając w nich w miejsce r_s, b_1, i b_2, odpowiednio r_A, $b_{1'}$ $- a_{1'}$ $b_{2'}$ $- a_{2'}$.

W ten sposób otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}_{Bm} &= \frac{r_B}{r_A}u^*_{Am} + m\frac{b_{1'}-a_{1'}}{r_A}v^*_{Am} + m\frac{b_{2'}-a_{2'}}{r_A}w^*_{Am},\\
\bar{v}_{Bm} &= \left[v^*_{Am} - (b_{2'}-a_{2'})\varphi^*_{Am}\right]\cos(\chi_d-\psi) -\\
&- \left[w^*_{Am} + (b_{1'}-a_{1'})\varphi^*_{Am}\right]\sin(\chi_d-\psi),\\
\bar{w}_{Bm} &= \left[v^*_{Am} - (b_{2'}-a_{2'})\varphi^*_{Am}\right]\sin(\chi_d-\psi) +\\
&+ \left[w^*_{Am} + (b_{1'}-a_{1'})\varphi^*_{Am}\right]\cos(\chi_d-\psi),\\
\bar{\varphi}_{xm} &= \bar{\varphi}_m = \varphi^*_{Am}
\end{aligned}\right\}\quad(4.38)$$

Wyrażając przemieszczenia w układzie $1'$, $2'$ przez przemieszczenia w układzie α, n – (rys. 16), będziemy mieli ostatecznie

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}_{Bm} &= \bar{k}_{uu}u_{Am}+\bar{k}_{uv}v_{Am}+\bar{k}_{uw}w_{Am}+\bar{k}_{u\varphi}\varphi_{Am},\\
\bar{v}_{Bm} &= \bar{k}_{vu}u_{Am}+\bar{k}_{vv}v_{Am}+\bar{k}_{vw}w_{Am}+\bar{k}_{v\varphi}\varphi_{Am},\\
\bar{w}_{Bm} &= \bar{k}_{wu}u_{Am}+\bar{k}_{wv}v_{Am}+\bar{k}_{ww}w_{Am}+\bar{k}_{w\varphi}\varphi_{Am},\\
\bar{\varphi}_m &= \bar{k}_{\varphi u}u_{Am}+\bar{k}_{\varphi v}v_{Am}+\bar{k}_{\varphi w}w_{Am}+\bar{k}_{\varphi\varphi}\varphi_{Am}
\end{aligned}\right\}\quad(4.39)$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned}
\bar{k}_{uu} &= m\left[\frac{a_{1'}-b_{1'}}{r_A}\sin(\vartheta_d+\chi_d) + \frac{a_{2'}-b_{2'}}{r_A}\cos(\vartheta_d+\chi_d)\right],\ \bar{k}_{uv} = \frac{r_B}{r_A},\\
\bar{k}_{uw} &= m\left[\frac{a_{1'}-b_{1'}}{r_A}\cos(\vartheta_d+\chi_d) - \frac{a_{2'}-b_{2'}}{r_A}\sin(\vartheta_d+\chi_d)\right],\ \bar{k}_{u\varphi} = 0;\\
\bar{k}_{vu} &= -\sin(\vartheta_d+\chi_d)\cos(\chi_d-\psi)+\cos(\vartheta_d+\chi_d)\sin(\chi_d-\psi),\ \bar{k}_{vv} = 0,\\
\bar{k}_{vw} &= -\cos(\vartheta_d+\chi_d)\cos(\chi_d-\psi)-\sin(\vartheta_d+\chi_d)\sin(\chi_d-\psi),\\
\bar{k}_{v\varphi} &= (b_{2'}-a_{2'})\cos(\chi_d-\psi)+(b_{1'}-a_{1'})\sin(\chi_d-\psi);\\
\bar{k}_{wu} &= -\sin(\vartheta_d+\chi_d)\sin(\chi_d-\psi)-\cos(\vartheta_d+\chi_d)\cos(\chi_d-\psi),\ \bar{k}_{wv} = 0,\\
\bar{k}_{ww} &= -\cos(\vartheta_d+\chi_d)\sin(\chi_d-\psi)+\sin(\vartheta_d+\chi_d)\cos(\chi_d-\psi),\\
\bar{k}_{w\varphi} &= (b_{2'}-a_{2'})\sin(\chi_d-\psi)-(b_{1'}-a_{1'})\cos(\chi_d-\psi);\\
\bar{k}_{\varphi u} &= \bar{k}_{\varphi v} = \bar{k}_{\varphi w} = 0,\ \bar{k}_{\varphi\varphi} = -1.
\end{aligned}\right\}\quad(4.40)$$

Amplitudy składowych oddziaływania podłoża znajdziemy z uproszczonych wzorów (3.57) jak dla cienkiego pierścienia, podstawiając za amplitudy przemieszczeń wyrażenia (4.39):

$$\left.\begin{aligned}
\bar{P}_{xm} &= -Tb(\bar{k}_{uu}u_{Am}+\bar{k}_{uv}v_{Am}+\bar{k}_{uw}w_{Am}-\bar{u}^{(0)}_{Bm}),\\
\bar{P}_{ym} &= -Cb(\bar{k}_{vu}u_{Am}+\bar{k}_{vw}w_{Am}+\bar{k}_{v\varphi}\varphi_{Am}-\bar{v}^{(0)}_{Bm}),\\
\bar{P}_{zm} &= -Tb(\bar{k}_{wu}u_{Am}+\bar{k}_{ww}w_{Am}+\bar{k}_{w\varphi}\varphi_{Am}-\bar{w}^{(0)}_{Bm}),\\
\bar{M}_{xm} &= -C\bar{J}_x\bar{k}_{\varphi\varphi}\varphi_{Am}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

Zgodnie z uwagami w ustępie 3.4. w powyższych wzorach pominięto wpływ wyrazów $\bar{u}^{(0)\prime}_{Bm}$, $\bar{v}^{(0)\prime}_{Bm}$ i $\bar{w}^{(0)\prime}_{Bm}$.

Podstawiając (4.41) i (4.39) do wyrażenia (4.37) otrzymamy po uporządkowaniu ostateczne wyrażenie na przyrost pracy sił oddziaływania podłoża gruntowego.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\delta L_{Bm} = &(\bar{r}_{uu}u_{Am}+\bar{r}_{uv}v_{Am}+\bar{r}_{uw}w_{Am}+\bar{r}_{u\varphi}\varphi_{Am}+\bar{R}^{(0)}_{u})\delta u_{Am} +\\
&+ (\bar{r}_{vu}u_{Am}+\bar{r}_{vv}v_{Am}+\bar{r}_{vw}w_{Am}+\bar{r}_{v\varphi}\varphi_{Am}+\bar{R}^{(0)}_{v})\delta v_{Am} +\\
&+ (\bar{r}_{wu}u_{Am}+\bar{r}_{wv}v_{Am}+\bar{r}_{ww}w_{Am}+\bar{r}_{w\varphi}\varphi_{Am}+\bar{R}^{(0)}_{w})\delta w_{Am} +\\
&+ (\bar{r}_{\varphi u}u_{Am}+\bar{r}_{\varphi v}v_{Am}+\bar{r}_{\varphi w}w_{Am}+\bar{r}_{\varphi\varphi}\varphi_{Am}+\bar{R}^{(0)})\delta\varphi_{Am},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned}
\bar{r}_{\alpha\beta} = -(Tb\bar{k}_{u\alpha}\bar{k}_{u\beta} + Cb\bar{k}_{v\alpha}\bar{k}_{v\beta} + Tb\bar{k}_{w\alpha}\bar{k}_{w\beta} + C\bar{J}_x\bar{k}_{\varphi\alpha}\bar{k}_{\varphi\beta})r_B,\\
(\alpha,\beta = u,v,w,\varphi)
\end{aligned}\right| \tag{4.43a}$$

a

$$\bar{R}^{(0)}_{\alpha} = (T\bar{k}_{u\alpha}\bar{u}^{(0)}_{Bm} + C\bar{k}_{v\alpha}\bar{v}^{(0)}_{Bm} + T\bar{k}_{w\alpha}\bar{w}^{(0)}_{Bm})br_B \tag{4.43b}$$

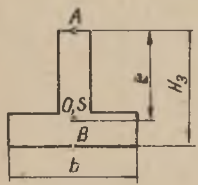
przy czym łatwo zauważyć, że $\bar{r}_{\alpha\beta} = \bar{r}_{\beta\alpha}$

Dla szczególnego przypadku walcowej chłodni będziemy mieli

$$r_A = r_B = r, \quad \vartheta_d = 90^o, \quad \chi_d = \psi = 0, \quad a_{2'} = b_{2'} = s_2 = 0$$

(p. rys. 17).

Przyjmując za linię odniesienia A oś sprężystości pierścienia i zakładając, że p.0 pokrywa się z p. S możemy zapisać



Rys. 17

$$a_{1'} = s_1 = 0, \quad b_{1'} = -(H_3 - e)$$

Ze wzorów (4.40) otrzymamy

$$k_{uu} = m\frac{H_3-e}{r}, \quad \bar{k}_{uv} = 1, \quad \bar{k}_{u,w} = \bar{k}_{u\varphi} = 0;$$

$$\bar{k}_{v,u} = -1, \quad \bar{k}_{v,v} = \bar{k}_{v,w} = \bar{k}_{v\varphi} = 0;$$

$$\bar{k}_{w,u} = \bar{k}_{w,v} = 0, \quad \bar{k}_{w,w} = 1, \quad \bar{k}_{w\varphi} = H_3 - e;$$

Podstawiając powyższe wartości współczynników $\bar{k}$ do wyrażenia (4.42) i przechodząc na oznaczenia składowych przemieszczeń jak dla osi sprężystej

$$(u_{Am} = -v_m^*, \quad v_{Am} = u_m^*, \quad w_{Am} = w_m^*, \quad \varphi_{Am} = -\varphi_m^*),$$

otrzymamy następujące wyrażenie na przyrost pracy sił oddziaływania podłoża gruntowego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\delta L_{Bm} &= Tb\left[-(u_m^* - \bar{u}_{Bm}^{(o)}) + m\frac{H_3-e}{r}v_m^*\right]r\delta u_m^* + \\
&+ Tb\left[m\frac{H_3-e}{r}(u_m^* - \bar{u}_{Bm}^{(o)}) - m^2\left(\frac{H_3-e}{r}\right)^2 v_m^* - \frac{C}{T}(v_m^* - \bar{v}_{Bm}^{(o)})\right]r\delta v_m^* + \qquad (4.44)\\
&+ Tb\left[-(w_m^* - \bar{w}_{Bm}^{(o)}) + (H_3-e)\varphi_m^*\right]r\delta w_m^* + \\
&+ \left\{Tb(H_3-e)(w_m^* - \bar{w}_{Bm}^{(o)}) - \left[Tb(H_3-e)^2 + CJ_*\right]\varphi_m^*\right\}r\delta\varphi_m^*
\end{aligned}$$

Pomijając wpływ mimośrodowego działania poziomych składowych oddziaływania podłoża jak i wpływ kątów obrotu i skręcenia na te oddziaływania, otrzymamy wyrażenie, które odpowiada wyrażeniu przyjętemu w artykule [6] wzory (3.33) i równanie (3.34).

Podstawiając z kolei wyrażenia (4.34), (4.36) i (4.42) do równania prac (4.03) będziemy mieli

$$
\begin{aligned}
&\Big[r_A N_{Am} + (r_{uu} - \bar{r}_{uu})u_{Am} + (r_{uv} - \bar{r}_{uv})v_{Am} + (r_{uw} - \bar{r}_{uw})w_{Am} + \\
&+ (r_{u\varphi} - \bar{r}_{u\varphi})\varphi_{Am} - \bar{R}_u^{(o)}\Big]\delta u_{Am} + \Big[r_A S_{Am} + (r_{vu} - \bar{r}_{vu})u_{Am} + \\
&+ (r_{vv} - \bar{r}_{vv})v_{Am} + (r_{vw} - \bar{r}_{vw})w_{Am} + (r_{v\varphi} - \bar{r}_{v\varphi})\varphi_{Am} - \bar{R}_v^{(o)}\Big]\delta v_{Am} + \\
&+ \Big[(r_{wu} - \bar{r}_{wu})u_{Am} + (r_{wv} - \bar{r}_{wv})v_{Am} + (r_{ww} - \bar{r}_{ww})w_{Am} + \\
&+ (r_{w\varphi} - \bar{r}_{w\varphi})\varphi_{Am} - \bar{R}_w^{(o)}\Big]\delta w_{Am} + \Big[(r_{\varphi u} - \bar{r}_{\varphi u})u_{Am}\ (r_{\varphi v} - \bar{r}_{\varphi v})v_{Am} + \\
&+ (r_{\varphi w} - \bar{r}_{\varphi w})w_{Am} + (r_{\varphi\varphi} - \bar{r}_{\varphi\varphi})\varphi_{Am} - \bar{R}_\varphi^{(o)}\Big]\delta\varphi_{Am} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Przyrównując do zera wyrażenia zawarte w powyższym równaniu w nawiasach kwadratowych otrzymamy cztery ostatnie równania rozwiązania drugiego etapu.

4.5. Równania kanoniczne rozwiązania układu chłodni

Równania (4.45) uzupełnione równaniami (4.17) i (4.32) utworzą układ dziesięciu równań algebraicznych ze względu na dziesięć niewiadomych amplitud: cztery amplitudy $w_m^{(g)}$, $\varphi_{1m}^{(g)}$, $u_m^{(g)}$, $v_m^{(g)}$ przemieszczeń górnej krawędzi powłoki, dwie amplitudy $N_{1m}^{(d)}$, $S_m^{(d)}$ sił błonowych na dolnej krawędzi powłoki i cztery amplitudy $u_{Am}, v_{Am}, w_{Am}, \varphi_{Am}$ przemieszczeń pierścienia fundamentowego na linii połączenia pierścienia z podbudową. Z uwagi na występowanie zarówno geometrycznych jak i statycznych niewiadomych układowi równań, do którego sprowadza się rozwiązanie drugiego etapu, możemy nadać podstać równań kanonicznych metody mieszanej.

Stosując zapis macierzowy będziemy mieli

$$
\left\|\begin{array}{cccccccccc}
r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & & & & & & \\
r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & & & & & & \\
r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r'_{35} & r'_{36} & & & & \\
r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r'_{45} & r'_{46} & & & & \\
 & & \delta'_{53} & \delta'_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} & \delta'_{57} & \delta'_{58} & & \\
 & & \delta'_{63} & \delta'_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} & \delta'_{67} & \delta'_{68} & & \\
 & & & & r'_{75} & r'_{76} & r_{77} & r_{78} & r_{79} & r_{7,10} \\
 & & & & r'_{85} & r'_{86} & r_{87} & r_{88} & r_{89} & r_{8,10} \\
 & & & & & & r_{97} & r_{98} & r_{99} & r_{9,10} \\
 & & & & & & r_{10,7} & r_{10,8} & r_{10,9} & r_{10,10}
\end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \\ Y_{10} \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \end{array}\right\| = 0 \qquad (4.46)
$$

W powyższym równaniu wprowadzono nowe oznaczenia dla niewiadomych:

$$
\left.\begin{array}{l}
Y_1 = w_m^{(g)},\ Y_2 = \varphi_{1m}^{(g)},\ Y_3 = u_m^{(g)},\ Y_4 = v_m^{(g)},\ X_5 = N_{1m}^{(d)},\ X_6 = S_m^{(d)}, \\
Y_7 = u_{Am},\ Y_8 = v_{Am},\ Y_9 = w_{Am},\ Y_{10} = \varphi_{Am}.
\end{array}\right\} \quad (4.47)
$$

Współczynniki i wyrazy wolne występujące w układzie (4.46) znajdziemy z następujących wzorów:

$$
\left.\begin{array}{l}
r_{11} = r_{ww} + r_g \cdot Q_{1mw}^{(g)},\ r_{12} = r_{w\varphi} + r_g \cdot Q_{1m\varphi}^{(g)},\ r_{21} = r_{\varphi w} - r_g \cdot M_{1mw}^{(g)}, \\
r_{13} = r_{wu} + r_g \cdot Q_{1mu}^{(g)},\ r_{31} = r_{uw} - r_g \cdot N_{1mw}^{(g)},\ r_{14} = r_{wv} + r_g \cdot Q_{1mv}^{(g)}, \\
r_{41} = r_{vw} - r_g \cdot S_{mw}^{(g)},\ r_{22} = r_{\varphi\varphi} - r_g \cdot M_{1m\varphi}^{(g)},\ r_{23} = r_{\varphi u} - r_g \cdot M_{1mu}^{(g)}, \\
r_{32} = r_{u\varphi} - r_g \cdot N_{1m\varphi}^{(g)},\ r_{24} = r_{\varphi v} - r_g \cdot M_{1mv}^{(g)},\ r_{42} = r_{v\varphi} - r_g \cdot S_{m\varphi}^{(g)}, \\
r_{33} = r_{uu} - r_g \cdot (\tilde{N}_{1mu}^{(g)} + N_{1mu}^{(g)}),\ r_{34} = r_{uv} - r_g (N_{1mv}^{(g)} + \tilde{N}_{1mv}^{(g)}), \\
r'_{35} = -r_g \cdot N_{1mN}^{(g)},\ r'_{36} = -r_g \cdot N_{1mS}^{(g)},\ r_{43} = r_{vu} - r_g (S_{mu}^{(g)} + \tilde{S}_{mu}^{(g)}), \\
r_{44} = r_{vv} - r_g \cdot (S_{mv}^{(g)} + \tilde{S}_{mv}^{(g)}),\ r'_{45} = -r_g \cdot S_{mN}^{(g)},\ r'_{46} = -r_g \cdot S_{mS}^{(g)},
\end{array}\right\} \quad (4.48a)
$$

gdzie wielkości $r_{\alpha\beta}$ (α,β = u,v,w, φ) obliczymy wg (4.18), zaś siły i momenty związane z zaburzeniem brzegowym wg wzorów ustępu 2.9;

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma'_{53} = r_d\cdot u^{(d)}_{mu},\ \sigma'_{54} = r_d\cdot u^{(d)}_{mv},\ \sigma'_{55} = r_d\left(u^{(d)}_{mN} + \frac{2\pi r_d\cdot l}{nEF\cos^2\alpha_1}\right),\\
&\sigma'_{56} = r_d\cdot u^{(d)}_{mS},\ \sigma'_{57} = -r'_{75} = -r_d\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1},\ \sigma'_{58} = -r'_{85} = -\frac{2\pi m}{n}\cdot r_d\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1}\\
&\sigma'_{63} = r_d\cdot v^{(d)}_{mu},\quad \sigma'_{64} = r_d\cdot v^{(d)}_{mv},\quad \sigma'_{65} = r_d\cdot v^{(d)}_{mN}\\
&\sigma'_{66} = r_d\left(v^{(d)}_{mS} + \frac{2\pi r_d\ l}{nEF\sin^2\alpha_1}\right),\ \sigma'_{67} = \frac{2\pi m}{n}\cdot r_d\cdot\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1} = -r'_{76},\\
&\sigma'_{68} = -r'_{86} = -r_d\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1};
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.48b}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&r_{77}=r_{uu}-\bar{r}_{uu},\ r_{78}=r_{uv}-\bar{r}_{uv},\ r_{79}=r_{uw}-\bar{r}_{uw},\ r_{7,10}=r_{u\varphi}-\bar{r}_{u\varphi},\\
&r_{87}=r_{vu}-\bar{r}_{vu},\ r_{88}=r_{vv}-\bar{r}_{vv},\ r_{89}=r_{vw}-\bar{r}_{vw},\ r_{8,10}=r_{v\varphi}-\bar{r}_{v\varphi},\\
&r_{97}=r_{wu}-\bar{r}_{wu},\ r_{98}=r_{wv}-\bar{r}_{wv},\ r_{99}=r_{ww}-\bar{r}_{ww},\\
&r_{9,10}=r_{w\varphi}-\bar{r}_{w\varphi},\ r_{10,7}=r_{\varphi u}-\bar{r}_{\varphi u},\ r_{10,8}=r_{\varphi v}-\bar{r}_{\varphi v},\\
&r_{10,9}=r_{\varphi w}-\bar{r}_{\varphi w},\ r_{10,10}=r_{\varphi\varphi}-\bar{r}_{\varphi\varphi},
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.48c}
$$

gdzie $r_{\alpha\beta}$ jak dla pierścienia dolnego wg (4.18), zaś $\bar{r}_{\alpha\beta}$ wg (4.43a);

$$
\left.
\begin{aligned}
&R_1=-r_g\cdot P^{(g)}_{3m},\ R_2=r_g\cdot M^{(g)}_{m},\ R_3=r_g\cdot P^{(g)}_{1m},\ R_4=r_g\cdot P^{(g)}_{2m},\\
&\Delta_5 = \frac{2\pi r_d^2\ l}{nEF\cos^2\alpha_1}\ P^{(d)}_{1m},\quad \Delta_6 = \frac{2\pi r_d^2\ l}{nEF\sin^2\alpha_1}\ P^{(d)}_{2m},\\
&R_7=r_d\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}P^{(d)}_{1m}-\frac{2\pi m}{n}r_d\ \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot P^{(d)}_{2m}-\bar{R}^{(o)}_{u},\ R_8=r_d\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}P^{(d)}_{2m}+\\
&+\frac{2\pi m}{n}\cdot r_d\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cdot P^{(d)}_{1m}-\bar{R}^{(o)}_{v},\ R_9=-\bar{R}^{(o)}_{w},\ R_{10}=-\bar{R}^{(o)}_{\varphi}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.48d}
$$

gdzie $\bar{R}^{(o)}_{\alpha}$ (α = u,v,w, φ) wg (4.43b).

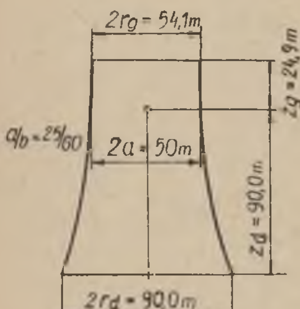
Równania rozwiązania drugiego etapu zostały wyprowadzone przy założeniu, że przemieszczenia pierścienia fundamentowego ograniczone są tylko przez słupy podbudowy, nie licząc samego podłoża. W przypadku stężenia pierścienia fundamentowego za pomocą poziomej przepony, cztery ostatnie równania układu (4.46) wymagać będą pewnej modyfikacji. Wystąpią w nich dwie nowe niewiadome przedstawiające oddziaływanie przepony. Ponadto równania te należy uzupełnić dodatkowymi dwoma równaniami wyrażającymi geometryczne warunki braku przemieszczeń w płaszczyźnie przepony.

5. PRZYKŁADY

Zadaniem naszym będzie rozwiązanie układu powłokowej chłodni hiperboloidalnej poddanej wpływom krzywizny i rozpełzania terenu.

Z powodu braku obciążenia powierzchniowego rozwiązanie takiego zadania sprowadzi się wyłącznie do drugiego etapu zgodnie z uwagami w rozdziale wstępnym. Ponadto jak wynika z rozważań w ustępie 3.4, wymienione wpływy wymagać będą utrzymania w wyrażeniach szeregowych na siły i przemieszczenia tylko wyrazów dla $m = 2$. Wyrazy dla $m = 0$ pominiemy, ponieważ odpowiadające im siły i przemieszczenia ograniczają się wyłącznie do pierścienia fundamentowego.

Z uwagi na to, że wyznaczenie zasadniczego stanu naprężenia w powłoce hiperboloidalnej jest samo dla siebie zadaniem dość złożonym, stan ten dla powłoki hiperboloidalnej stanowiącej płaszcz komina chłodni zostanie wstępnie wyznaczony w pierwszym przykładzie. Uzyskane wyniki wykorzystamy w drugim przykładzie, w którym rozwiążemy zadanie sformułowane na początku tzn. wyznaczymy siły w całym ustroju chłodni poddanej wpływom ruchów terenu.



Rys. 18

5.1. Wyznaczenie zasadniczego stanu naprężenia w powłoce hiperboloidalnej

Niech będzie dana powłoka hiperboloidalna o wymiarach jak na rys. 18 i stałej grubości $2h = 0,20$ m. Dla powłoki tej poszukiwać będziemy ogólnego rozwiązania w postaci (2.87). W tym celu obliczymy wpierw siły błonowe w powłoce obciążonej tylko na krawędzi dolnej siłami stycznymi, a następnie wyznaczymy zasadniczy stan zgięciowy od wpływu przemieszczeń stycznych tej krawędzi.

5.1.1. Stan błonowy

Wprowadźmy w miejsce zmiennej z zmienną α wg (2.20) i podzielmy przedział x $(0, \alpha_d)$ na pięć równych części. Dla punktów podziału obliczymy wartości r, r i r wg (2.1), funkcje $f_{1m}(\alpha)$ i $f_{2m}(\alpha)$ wg (2.30) oraz siły błonowe $N_{1mN,S}$ i $S_{mN,S}$ od wpływu jednostkowych obciążeń dolnej krawędzi powłoki, p. (2.29). Otrzymane wartości zestawiono w tablicy I, załączonej do przykładów. (str. 106).

Przemieszczenia od jednostkowych obciążeń krawędzi dolnej znajdziemy jako sumę całki szczególnej pełnego równania(2.25a) i całki ogólnej równania jednorodnego. Rozwiązanie równania jednorodnego przedstawiają wzory (2.40), (2.41). Rozwiązanie szczególne równania pełnego otrzymamy rozkładając stan naprężenia w powłoce na symetryczny i antysymetryczny i stosując metodę ortogonalizacji.

Siły błonowe $N_{1m}^{(s)}$, $S_m^{(s)}$ dla symetrii i $N_{1m}^{(a)}$, $S_m^{(a)}$ dla antysymetrii znajdziemy wg (2.32), odpowiadające im współczynniki k wg (2.31)

$$k_{(s)} = -0,524; \quad k_{(a)} = +0,0906, \tag{5.01}$$

a wartości pomocniczych funkcji G_{1m}, G_{2m} wg wzorów (2.26) p. tablica I.

Dla stanu symetrycznego poszukiwać będziemy przemieszczenia v_m w postaci następującego szeregu

$$\frac{v_m^{(s)}}{r} = \sum b_i^{(s)} \cos \frac{i\pi}{2} \frac{\alpha}{\alpha_d}; \qquad i = 1,3,5..... \tag{5.02}$$

(wartości funkcji występujących w powyższym szeregu dla i = 1,3,5 zestawiono również w tablicy I).

Podstawiając (5.02) do (2.43a) otrzymamy

$$\delta_{kk} = \left[m^2 - \left(\frac{k}{2\alpha_d}\right)^2\right] \frac{\alpha_d}{2}, \qquad \delta_{ik} = 0 \text{ (dla } i \neq k); \tag{5.03}$$

$$k = 1,3,5 .....$$

a stąd

$$b_k^{(s)} = \frac{\Delta_k^{(s)}}{\delta_{kk}} \qquad (5.04$$

gdzie $\Delta_k^{(s)}$ obliczymy wg (2.43b) całkując numerycznie.

Dla pierwszego przybliżenia znajdziemy

$$\delta_{11} = 0{,}706;$$

$$\Delta_1^{(s)} = \frac{1}{2Eh}\Big\{2(1+0{,}18)\frac{60}{25^2}\Big[+\frac{3{,}14}{2.0{,}9822}\,.$$

$$.\,\frac{0{,}1964}{2}\,(0 - 2.17{,}30\,.\,0{,}3090 - 2\,.\,30{,}50\,.\,0{,}5878 -$$

$$- 2.36{,}00\,.\,0{,}8090 - 2\,.\,33{,}95\,.\,0{,}9511 - 25{,}00\,.\,1)\Big] +$$

$$+ 2\,\frac{60^2}{25^4}\,.\,\frac{0{,}1964}{2}\,(- 2680 - 2\,.\,2550\,.\,0{,}9511 - 2\,.\,2125\,.$$

$$.\,0{,}8090 - 2\,.\,1320\,.\,0{,}5878 + 2\,.\,3{,}07\,.\,0{,}3090 + 0)\Big\} =$$

$$= - 14{,}75\,\frac{1}{Eh}\,,$$

a stąd $b_1^{(s)} = - 20{,}90\,\frac{1}{Eh}$. Przy podziale przedziału $(0 \div \alpha_d)$ na dziesięć części otrzymamy $b_1^{(s)} = - 20{,}85\,\frac{1}{Eh}$.

Podobnie znajdziemy: $b_3^{(s)} = 0{,}427\,\frac{1}{Eh}$ $(0{,}441\,\frac{1}{Eh})$ i $b_5^{(s)} = 0{,}0860\,\frac{1}{Eh}$ $(0{,}0961\,\frac{1}{Eh})$, przy czym wartości podane w nawiasach uzyskano przy gęstszym podziale.

Przemieszczenia dla symetrycznego stanu wyrażą się następująco

$$\left.\begin{aligned}
v_m^{(s)} &= \Big(-20{,}85\cos\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} + 0{,}441\cos\frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} -\\
&\quad -0{,}0961\cos\frac{5\pi\alpha}{2\alpha_d}\Big)\, r\,\frac{1}{Eh}\\
u_m^{(s)} &= \Big[g_1(z).(174{,}0.\sin\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - 11{,}04\sin\frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} +\\
&\quad +4{,}00\sin\frac{5\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d}) - 0{,}590\, r\,.\, s_m^{(s)}\Big]\frac{1}{Eh}\,,
\end{aligned}\right\}\quad (5.05)$$

gdzie $u_m^{(s)}$ obliczono wg (2.16)

Dla antysymetrycznego stanu przyjmiemy

$$\frac{v_m^{(a)}}{r} = \sum b_i^{(a)} \quad \sin\frac{i\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} \; ; \quad i = 1,3,5 \; ..... \tag{5.06}$$

Podstawiając (5.06) do (2.43a) otrzymamy na współczynniki δ wyrażenia (5.03) jak dla symetrii.

Wyrazy wolne Δ_k obliczymy podobnie jak w przypadku symetrii wg (2.43b). Dla kolejnych trzech przybliżeń otrzymamy

$$b_1^{(a)} = 13,85\,\frac{1}{Eh}\,, \qquad b_3^{(a)} = 0,0392\,\frac{1}{Eh}\,, \qquad b_5^{(a)} = -\,0,00723\,\frac{1}{Eh}\,,$$

a stąd

$$\left.\begin{aligned} v_m^{(a)} &= \Big(13,85\,\sin\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} + 0,0392\,\sin\frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - \\ &-0,00723\,\sin\frac{5}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha_d}\Big)\frac{r}{Eh}\,, \\ u_m^{(a)} &= \Big[g_1(z)\,\Big(115,4\,\cos\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} + 0,980\,\cos\frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - \\ &-\,0,302\,\cos\frac{5\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d}\Big) - 0,59\,r\,S_m^{(a)}\Big]\,\frac{1}{Eh}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.07}$$

Siły a tym samym i przemieszczenia dla stanów symetrycznego i antysymetrycznego otrzymaliśmy dodając do stanu $N_{1m}^{(d)} = 1$ kolejno stan dla $S_m^{(d)} = k_s\,N_{1m}$ i stan dla $S_m^{(d)} = k_a.N_{1m}$. Odwrotnie - siły od jednostkowych obciążeń krawędzi dolnej i odpowiadające im przemieszczenia uzyskać możemy dodając do siebie stany symetryczny i antysymetryczny przemnożone przez odpowiednie współczynniki.

Łatwo sprawdzić, że siły od wpływu $N_{1m}^{(d)} = 1$ otrzymamy przyjmując

$$N_{1m}^{(d)(s)} = \frac{k_a}{k_a - k_s}\,, \qquad N_{1m}^{(d)(a)} = -\,\frac{k_s}{k_a}\,N_{1m}^{(d)(s)} \tag{5.08}$$

a siły od wpływu $S_m^{(d)} = 1$ - przyjmując

$$N_{1m}^{(d)(s)} = \frac{1}{k_s - k_a}, \qquad N_{1m}^{(d)(a)} = - N_{1m}^{(d)(s)} \tag{5.09}$$

Ażeby uzyskać przemieszczenia odpowiadające tym jednostkowym obciążeniom należy przez powyższe współczynniki przemnożyć również przemieszczenia dla stanów symetrycznego i antysymetrycznego i wyniki dodać.

W naszym przypadku dla stanu $N_{1m}^{(d)} = 1$, $S_m^{(d)} = 0$ otrzymamy wg (5.08) i (5.01)

$$N_m^{(d)(s)} = \frac{0{,}0906}{0{,}0906+0{,}524} = 0{,}147, \quad N_m^{(d)(a)} = - \frac{-0{,}524}{0{,}0906}\cdot$$

$$0{,}147 = 0{,}853; \tag{5.10}$$

Przemieszczenia dla górnej i dolnej krawędzi dla tego stanu uzyskamy podstawiając za α we wzorach (5.05) i (5.07) odpowiednio α_g i α_d; w wyniku otrzymamy $u_m^{(g)(s)} = -108{,}3 \frac{1}{Eh}$, $v_m^{(g)(s)} = -457{,}0 \frac{1}{Eh}$, $u_m^{(d)(s)} = 192{,}3 \frac{1}{Eh}$, $v_m^{(d)(s)} = 0$;

$u_m^{(g)(a)} = 99{,}6 \frac{1}{Eh}$, $v_m^{(g)(a)} = -221{,}5 \frac{1}{Eh}$, $u_m^{(d)(a)} = -2{,}40 \frac{1}{Eh}$,

$v_m^{(d)(a)} = 625{,}0 \frac{1}{Eh}$

Mnożąc powyższe wartości przez współczynniki (5.10) i dodając wyniki będziemy mieli

$$\left.\begin{aligned}
u_{mN}^{(g)} &= (-108{,}3.0{,}147+99{,}6.0{,}853)\frac{1}{Eh} = 69{,}08\frac{1}{Eh},\\
v_{mN}^{(g)} &= (192{,}3.0{,}147-2{,}40.0{,}853)\frac{1}{Eh} = -255{,}7\frac{1}{Eh},\\
u_{mN}^{(d)} &= (192{,}3.0{,}147-2{,}40.0{,}853)\frac{1}{Eh} = +26{,}3\frac{1}{Eh},\\
v_{mN}^{(d)} &= (0 + 625{,}0.0{,}853)\frac{1}{Eh} = +535{,}0 \cdot \frac{1}{Eh}
\end{aligned}\right| \tag{5.11}$$

Podobnie otrzymamy dla stanu $N_{1m}^{(d)} = 0, \quad S_m^{(d)} = 1$

$$N_{1m}^{(d)(s)} = -N_{1m}^{(d)(a)} = -1{,}620, \tag{5.12}$$

i

$$\left.\begin{aligned} & u_{mS}^{(g)} = 336{,}5\,\frac{1}{Eh}, \quad v_{mS}^{(g)} = 381{,}0\,\frac{1}{Eh}, \quad u_{mS}^{(d)} = -316{,}0\,\frac{1}{Eh}, \\ & v_{mS} = 1008\,\frac{1}{Eh}. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Naszym zadaniem jest określenie przemieszczeń dla stanu błonowego odpowiadających warunkom (2.17)

$$\text{dla} \qquad \alpha = \alpha_d \qquad\qquad u_m = v_m = 0 \tag{5.14}$$

Zadanie to rozwiążemy dodając do przemieszczeń rozwiązania szeregowego przemieszczenia od wpływu odpowiednich przemieszczeń krawędzi dolnej.
Dla stanu $N_{1m}^{(d)} = 1, \quad S_m^{(d)} = 1$, te dodatkowe przemieszczenia krawędzi dolnej wyniosą zgodnie z (5.11): $u_m^{(d)} - 26{,}3\,\frac{1}{Eh}$, $v_m^{(d)} = -535{,}0\,\frac{1}{Eh}$.

Odpowiadające tym przemieszczeniom przemieszczenia w dowolnym punkcie powłoki znajdziemy wg wzorów (2.41) rozwiązania równania jednorodnego. W szczególności dla $\alpha = \alpha_g$ będziemy mieli

$$u_{mu}^{(g)} = -0{,}967, u_{mv}^{(g)} = +0{,}0868, v_{mu}^{(g)} = -1{,}050, v_{mv}^{(g)} = -0{,}555 \tag{5.15}$$

Uwzględniając wartości (5.11) i (5.15) otrzymamy ostatecznie na wartości przemieszczeń górnej krawędzi dla rozpatrywanego stanu

$$\left.\begin{aligned} u_{mN}^{(g)} &= \left[69{,}08 - 0{,}967\cdot(-26{,}3) + 0{,}0868\cdot(-535{,}0)\right]\frac{1}{Eh} = +48{,}0\,\frac{1}{Eh}, \\ v_{mN}^{(g)} &= \left[-255{,}7 - 1{,}050\cdot(-26{,}3) - 0{,}555\cdot(-535{,}0)\right]\frac{1}{Eh} = +68{,}9\,\frac{1}{Eh} \end{aligned}\right\} \tag{5.16a}$$

Dla stanu $N_{1m}^{(d)} = 0$, $S_m = 0$ otrzymamy w posobny sposób następujące wartości przemieszczeń górnej krawędzi odpowiadające warunkom (5.14)

$$u_{mS}^{(g)} = -56{,}0 \frac{1}{Eh}, \qquad v_{mS}^{(g)} = +608 \frac{1}{Eh}, \qquad (5.16b)$$

5.1.2. Zasadniczy stan zgięciowy

Przyjmiemy zgodnie z warunkami (2.70), że przemieszczenia styczne zadane zostały na dolnej krawędzi powłoki.

Podobnie jak przy wyznaczaniu stanu błonowego podzielimy przedział $(0, \alpha_d)$ na pięć równych części i dla punktów podziału obliczymy wartości funkcji (2.71) i ich pochodnych. Wartości te podane zostały w tablicy II załączonej do przykładów (str.106).

W tablicy III (str. 107) podano wartości przemieszczeń i ich pochodnych

$(u_{mu})^{(n)}$; $(v_{mu})^{(n)}$, $(w_{mu})^{(n)}$, od wpływu $u_m^{(d)} = 1$, obliczone wg wzorów (2.72), (2.73) i (2.75). Wartości przemieszczeń i ich pochodnych od wpływu $v_m^{(d)} = 1$ podane są w IV tablicy (str.107)

W następnej V tablicy (str.108) zestawiono wartości składowych odkształcenia zgięciowego od obu wpływów obliczone wg wzorów (2.78) oraz wartości składowych obciążenia fikcyjnego p. wzory (2.80) i (2.79).

W celu znalezienia szczególnego rozwiązania pełnego równania (2.81) rozłożymy stan zgięciowy na symetryczny i antysymetryczny. Potrzebne do tego współczynniki obliczymy wg (2.85).

$$\bar{k}_s = 1{,}900, \qquad \bar{k}_a = -11{,}01; \qquad (5.17)$$

odpowiadające tym stanom składowe obciążenia fikcyjnego zestawiono w tablicy V. W tablicy VI (str.108) podano ponadto wartości pomocniczych funkcji F_{1m} i F_{2m} obliczone wg (2.82).

Dla stanu symetrycznego poszukiwać będziemy funkcji naprężeń $\bar{\Phi}_m^{(s)}$ w postaci następującego szeregu

$$\Phi_m^{(s)} = \sum a_i^{(s)} \cdot \cos \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_d}, \qquad i = 1,3,5 \qquad (5.18)$$

Z uwagi na identyczność szeregów (5.02) i (5.18) współczynniki δ obliczymy wg wzorów (5.03) jak dla stanu błonowego, a parametry $a_k^{(s)}$ znajdziemy ze wzoru

$$a_k^{(s)} = \frac{\Delta_k^{(s)}}{\delta_{kk}} \tag{5.19}$$

Wyrazy wolne $\Delta_k^{(s)}$ obliczymy ze wzoru (2.36b) stosując numeryczne całkowanie podobnie jak w 5.1.1. W ten sposób dla kolejnych trzech przybliżeń otrzymamy:

$$a_1^{(s)} = 1{,}095\ Eh;\quad a_3^{(s)} = -\,0{,}00992\ Eh^3\ \text{i}\ a_5^{(s)} = -0{,}000976\ Eh^3.$$

Podstawiając wyrażenie szeregowe (5.18) do wzorów (2.83) i uwzględniając obliczone wartości współczynników $a^{(s)}$ znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(s)} &= \frac{1}{g_1(z)r}\Big(1{,}095\cos\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - 0{,}00992\cos\frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - \\ &\quad - 0{,}000976\cos\frac{5\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d}\Big)Eh^3 \\ S_m^{(s)} &= \frac{1}{m}\Big[\frac{1}{r^2}\Big(18{,}30\sin\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - 0{,}497\sin\frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} - \\ &\quad - 0{,}0815\sin\frac{5\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d}\Big)Eh^2 + r\,(X_m^{(s)} + r'\,Z_m^{(s)}\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Dla antysymetrycznego stanu przyjmiemy następujące wyrażenie dla funkcji naprężeń

$$\phi_m^{(a)} = \sum a_i^{(a)}\,.\,\sin\frac{i\pi}{2}\,.\,\frac{\alpha}{\alpha_d}\qquad i = 1,3,5\ldots \tag{5.21}$$

Współczynniki δ obliczymy z tych samych wzorów (5.03) jak w przypadku symetrii, a wyrazy wolne $\Delta^{(a)}$ wg wzoru (2.36b) całkując numerycznie. Dla kolejnych trzech przybliżeń otrzymamy następujące wartości parametrów $a_i^{(a)}$: $a_1^{(a)} = 4{,}150\ Eh^3$, $a_3^{(a)} = 0{,}00752\ Eh^3$ i $a_5^{(a)} = 0{,}000136 Eh^3$

Siły błonowe dla tego stanu obliczymy ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(a)} &= \frac{1}{g_1(z)r}\left(4{,}150 \sin \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} + 0{,}00752 \sin \frac{3\pi\alpha}{2\alpha_d} + \right. \\ &\left. + 0{,}000136 \sin . \frac{5\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d}\right) Eh^3, \\ S_m^{(a)} &- \frac{1}{m}\left[\frac{1}{r^2}\left(69{,}30 \cos \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} + 0{,}376 \cos \frac{3\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d} + \right.\right. \\ &\left.\left. + 0{,}01135 \cos . \frac{5\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_d}\right) Eh^3 - r(X_m^{(a)} + r' Z_m^{(a)})\right] \end{aligned}\right\} \quad (5.22)$$

Ze wzorów (5.20) i (5.22) otrzymamy następujące wartości sił dla krawędzi górnej i dolnej

dla $\alpha = \alpha_g$

$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(g)(s)} &= 33{,}2.10^{-3}Eh^3, \quad S_m^{(g)(s)} = -6{,}77.10^{-3}Eh^3; \\ N_{1m}^{(g)(a)} &= -91{,}50.10^{-3}Eh^3, \quad S_m^{(g)(a)} = -38{,}54.10^{-3}Eh^3 \end{aligned}\right\} \quad (5.23a)$$

dla $\alpha = \alpha_d$

$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(d)(s)} &= 0, \quad S_m^{(d)(s)} = 4{,}69.10^{-3}Eh^3, \quad N_{1m}^{(d)(a)} = 97{,}3.10^{-3}Eh^3, \\ S_m^{(d)(a)} &= -0{,}38 . 10^{-3} Eh^3 \end{aligned}\right\} \quad (5.23b)$$

W celu uzyskania sił błonowych odpowiadającym jednostkowym przemieszczeniom krawędzi dolnej należy dodać do siebie stany symetryczne i antysymetryczne pomnożone przez odpowiednie współczynniki. Mając na uwadze sposób w jaki utworzone zostały stany symetryczny i antysymetryczny, p. objaśnienia do wzorów (2.85), na współczynniki te otrzymamy następujące wzory dla stanu $u_m^{(d)} = 1, \quad v_m^{(d)} = 0$

$$u_m^{(d)(s)} = \frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_a - \bar{k}_s}, \qquad u_m^{(d)(a)} = -\frac{\bar{k}_s}{\bar{k}_a} u_m^{(d)(s)} \tag{5.24a}$$

dla stanu $u_m^{(d)} = 0, \quad v_m^{(d)} = 1$

$$u_m^{(d)(s)} = \frac{1}{\bar{k}_s - \bar{k}_a}, \qquad u_m^{(d)(a)} = - u_m^{(d)(s)} \tag{5.24b}$$

gdzie $\bar{k}_s$, $\bar{k}_a$ wg (2.85)

Uwzględniając wartości (5.17) współczynników $\bar{k}$ otrzymamy więc dla stanu $u_m^{(d)} = 1, \quad v_m^{(d)} = 0$

$$u_m^{(d)(s)} = \frac{-11,01}{-11,01-1,900} = 0,853, \qquad u_m^{(d)(a)} = - \frac{1,900}{-11,01} \cdot 0,853 =$$

$= 0,147.$

Wyrażenia na siły błonowe dla tego stanu otrzymamy mnożąc prawe strony wzorów (5.20) przez współczynnik 0,853, a wzorów (5.22) przez 0,147 i dodając wyniki. W szczególności w ten sposób znajdziemy wartości sił błonowych na górnej i dolnej krawędzi

$$\left.\begin{aligned} N_{1mu}^{(g)} &= (33,2.0,853-91,50.0,147).10^{-3}.Eh^3=14,85.10^{-3}Eh^3 \\ S_{mu} &= (-6,77.0,853-38,54.0,147).10^{-3}Eh^3= -11,43.10^{-3}Eh^3 \\ N_{1mu}^{(d)} &= 0+97,3.0,147.10^{-3}Eh^3 = 14,3.10^{-3}\ Eh^3 \\ S_{mu}^{(d)} &= (4,69.0,853-0,38.0,147).10^{-3}Eh^3=3,94.10^{-3}Eh^3 \end{aligned}\right\} (5.25$$

Dla stanu $u_m^{(d)} = 0, \quad v_m^{(d)} = 1,$ znajdziemy

$$u_m^{(d)(s)} = - u_m^{(d)(a)} = \frac{1}{1,900+11,01} = 0,0774,$$

i podobnie

$$\left.\begin{aligned} &N_{1mv}^{(g)} = 9,65.10^{-3}Eh^3, \quad S_{mv}^{(g)} = 2,455.10^{-3}Eh^3, \\ &N_{1mv}^{(g)} = -7,52.10^{-3}Eh^3, \quad S_{mv}^{(d)} = 0,39.10^{-3}Eh^3, \end{aligned}\right\} \quad (5.26)$$

Do uzyskanych szczególnych stanów naprężenia należy dodać stany odpowiadające takim dodatkowym obciążeniom na dolnej krawędzi powłoki, aby spełnione były warunki statyczne (2.84).

Dla stanu $u_m^{(d)} = 1, \quad v_m^{(d)} = 0$, te dodatkowe obciążenia dolnej krawędzi wyniosą $N_{1m}^{(d)} = -14,3.10^{-3}Eh^3$ i $S_m^{(d)} = -3,94.10^{-3}.Eh^3$ p. (5.25).

Siły od jednostkowych obciążeń krawędzi dolnej znajdziemy wg wzorów (2.29). W szczególności dla krawędzi górnej będziemy mieli

$$\begin{aligned} &N_{1mN}^{(g)} = -1,465, \quad N_{1mS}^{(g)} = 2,780, \quad S_{mN}^{(g)} = -0,230, \\ &S_{mS}^{(g)} = -2,555, \end{aligned} \quad (5.27)$$

a stąd biorąc pod uwagę (5.25) otrzymamy dla rozpatrywanego stanu następujące wartości sił błonowych na tej krawędzi

$$\left.\begin{aligned} &N_{1mu}^{(g)} = \left[14,85-14,3(-1,465)-3,94.(2,780)\right].10^{-3}Eh^3 = \\ &= 24,85.10^{-3}Eh^3, \\ &S_{mu}^{(g)} = \left[-11,43-14,3.(-0,230)-3,94.(-2,555)\right].10^{-3}Eh^3 = \\ &= 1,93.10^{-3}Eh^3. \end{aligned}\right\} \quad (5.28a)$$

Obliczając w podobny sposób siły odpowiadające warunkom (2.84)

dla stanu $u_m^{(d)} = 0$, $v_m^{(d)} = 1$, otrzymamy dla górnej krawędzi

$$N_{1mv}^{(g)} = -2,54 \cdot 10^{-3}\, Eh^3, \quad S_{mv}^{(g)} = 1,722 \cdot 10^{-3} Eh^3. \tag{5.28b}$$

Wg (5.28a,b) możemy więc zapisać

$$\left.\begin{aligned} N_{1m,u,v}^{(g)} &= (24,85 \cdot u_m^{(d)} - 2,54 \cdot v_m^{(d)}) \cdot 10^{-3} Eh^3, \\ S_{m,u,v}^{(g)} &= (1,93 \cdot u_m^{(d)} + 1,722 \cdot v_m^{(d)}) \cdot 10^{-3} Eh^3. \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

W ten sam sposób w oparciu o wyrażenia (5.20) i (5.22) oraz wzory (2.29) obliczyć możemy dla obu stanów siły błonowe w dowolnych punktach powłoki. Momenty zginające i skręcające dla tych stanów znajdziemy bezpośrednio ze wzorów (2.60) uwzględniając wartości $\varkappa$ i τ podane w tablicy V.

5.1.3. Sumując wyniki uzyskane w 5.1.1 i 5.1.2 moglibyśmy naszemu rozwiązaniu nadać postać (2.87), podstawiając za stałe całkowania C amplitudy sił i przemieszczeń na krawędzi dolnej.

W rozdziale 4 przedstawiono rozwiązanie układu chłodni metodą mieszaną, w którym przyjęto amplitudy sił na krawędzi dolnej i amplitudy przemieszczeń na górnej krawędzi jako główne niewiadome. W związku z tym w naszym rozwiązaniu zasadniczego stanu naprężenia potraktujemy amplitudy $u_m^{(g)}$ i $v_m^{(g)}$ jako niezależne wielkości.

W oparciu o (5.15) i (5.16) na amplitudy przemieszczeń stycznych na krawędzi górnej zapisać możemy następujące wyrażenia

$$\left.\begin{aligned} u_m^{(g)} &= -0,967\, u_m^{(d)} + 0,0868 \cdot v_m^{(d)} + 48,0 \frac{1}{Eh} N_{1m}^{(d)} - 56,0 \frac{1}{Eh} S_m^{(d)}, \\ v_m^{(g)} &= -1,050 \cdot u_m^{(d)} - 0,555\, v_m^{(d)} + 68,9 \frac{1}{Eh} N_{1m}^{(d)} + 608 \frac{1}{Eh} S_m^{(d)} \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Traktując (5.30) jako układ dwóch równań ze względu na $u_m^{(g)}$ i $v_m^{(g)}$ po rozwiązaniu otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} u_m^{(d)} &= 52,0\,\frac{1}{Eh}\,N_{1m}^{(d)} + 34,6\,\frac{1}{Eh}\,.\,S_m^{(d)} - 0,885\,u_m^{(g)} - 0,1385.v_m^{(g)}, \\ v_m^{(d)} &= 25,7\,\frac{1}{Eh}\,N_{1m}^{(d)} + 1030\,\frac{1}{Eh}\,S_m^{(d)} + 1,675\,u_m^{(g)} - 1,540\,v_m^{(g)}. \end{aligned}\right\} \quad (5.31)$$

Wyrażając w (5.29) $u_m^{(d)}$ i $v_m^{(d)}$ przez nowe niezależne przemieszczenia $u_m^{(g)}$ i $v_m^{(g)}$ wg (5.31) oraz dodatkowo obliczając $N_{mN,S}^{(g)}$ i $S_{mN,S}^{(g)}$ wg (2.29) będziemy mogli jeszcze zapisać

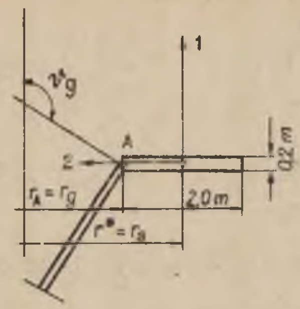
$$\left.\begin{aligned} N_{1m}^{(g)} &= -1,465\,N_{1m}^{(d)} + 2,780.S_m^{(d)} - 26,25.10^{-3}Eh^3.u_m^{(g)} + \\ &+ 0,48.10^{-3}\,Eh^3.v_m^{(g)}, \\ S_m^{(g)} &= -0,230.N_{1m}^{(d)} - 2,555.S_m^{(d)} + 1,17.10^{-3}Eh^3.u_m^{(g)} - \\ &- 2,93.10^{-3}Eh^3.v_m^{(g)}. \end{aligned}\right\} \quad (5.32)$$

W podobny sposób obliczono w zależności od jednostkowych przemieszczeń stycznych górnej krawędzi, siły N_{1m}, S_m i moment M_{2m} w punktach podziału południka powłoki. Otrzymane wyniki zestawiono w tablicy VI.

5.2. Rozwiązanie chłodni hiperboloidalnej, poddanej wpływom pełzania i krzywizny terenu

Obliczenia przeprowadzimy dla chłodni o następujących ogólnych wymiarach $H_1 = 57,5$ m, $H_2 = 5$ m, $r_g = 27$ m, $r_d = 22,5$m, $r_B = 25,5$ m, $h = 0,10$ m p. rys. 1.

Ponadto przyjmiemy moduł Younga $E = 2,1.10^6$ T/m^2, współczynnik Poissona $\nu = 0,18$ oraz współczynniki podłoża $C = 2000$ T/m^3 i $T = 1000$ T/m^3.



Rys. 19

5.2.1. Pierścień górny

Dla pierścienia o przekroju jak na rys. 19, otrzymamy $a_{1'} = s_1 = s_2 = 0$, $a_{2'} = 1,0$ m, $r_A = r_g = 13,5$ m, $\overset{*}{r} = r_s = 14,5$ m, $I_1^* = 0,133\ m^4$, $A = 0,40\ m^2$; przyjmiemy $I_2^* = C_s^* = 0$. Ponad to możemy zapisać $tg(\vartheta_g - 90^0) = -r'_g = 0,1596$ p. tablica I, a a stąd $\vartheta_g = 99^0 04'$ $\chi_g = 0$.

Podstawiając powyższe wartości do wzorów (4.09), (4.10) otrzymamy

$k_{uu} = -0,0234,\quad k_{uv} = 1,075,\quad k_{uw} = -0,1462,\quad k_{u\varphi} = 0;$

$k_{ru} = -0,9875,\quad k_{vv} = 0,\quad k_{vw} = 0,1578,\quad k_{v\varphi} = -1,0;$

$k_{wu} = 0,1578,\quad k_{wv} = 0,\quad k_{ww} = 0,9875,\quad k_{w\varphi} = 0;$

$k_{\varphi u} = k_{\varphi v} = k_{\varphi w} = 0,\quad k_{\varphi\varphi} = 0,$ a stąd wg (4.12)

$r_{uN} = -0,2046,\quad r_{uM_1} = 0,0467,\quad v_{vN} = 2,150,\quad v_{vM_1} = -0,1481$

$r_{wN} = -1,2799,\quad r_{wM_1} = +0,2930,\quad r_{\varphi N} = r_{\varphi M_1} = 0.$

Amplitudy sił wewnętrznych od wpływu jednostkowych przemieszczeń znajdziemy ze wzorów (4.16)

$$\left.\begin{aligned} N^{*}_{mu} &= -5{,}64.10^{-3}E, & M^{*}_{1mu} &= 0{,}4285.10^{-3}E; \\ N^{*}_{mv} &= 59{,}25.10^{-3}E, & M^{*}_{1mv} &= -1{,}360.10^{-3}E, \end{aligned}\right\} \quad (5.33)$$

a wielkości oddziaływań od wpływu tych przemieszczeń wg (4.18)

$$\left.\begin{aligned} & r_{uu} = 1{,}172 \,.\, 10^{-3}E, \qquad r_{uv} = r_{vu} = -12{,}174 \,.\, 10^{-3}E, \\ & r_{uw} = r_{wu} = 7{,}335 \,.\, 10^{-3}E, \\ & r_{u\varphi} = r_{\varphi u} = 0, \qquad r_{vv} = 127{,}50 \,.\, 10^{-3}E, \\ & r_{vw} = r_{wv} = -76{,}30 \,.\, 10^{-3}E; \\ & r_{ww} = 45{,}88 \,.\, 10^{-3}E, \qquad r_{v\varphi} = r_{\varphi v} = r_{\varphi w} = r_{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.34)$$

5.2.2. Powłoka

Powłoka komina wywiewnego naszej chłodni posiada dwa razy mniejsze wymiary od wymiarów powłoki rozwiązanej w ustępie 5.1, za wyjątkiem grubości, która w obu powłokach jest ta sama, i wynosi 0,20 cm. W związku z powyższym przy korzystaniu z wyników uzyskanych dla większej powłoki, należy uwzględnić co następuje:

Siły błonowe od obciążeń krawędziowych w obu powłokach w odpowiadających sobie punktach będą jednakowe. Natomiast przemieszczenia w tych punktach od wpływu obciążeń brzegowych będą już różne. Jak bezpośrednio wynika z równania (2.25a)przemieszczenia w mniejszej powłoce będą dwa razy mniejsze od odpowiednich przemieszczeń w powłoce większej.

Przemieszczenia od wpływu przemieszczeń krawędzi będą jednakowe w obu powłokach. Natomiast momenty zasadniczego stanu zgięciowego będą cztery razy, a siły błonowe osiem razy większe w powłoce mniejszej, aniżeli w większej powłoce, co łatwo stwierdzić na podstawie wzorów (2.79), (2.62), (2.83) i równania (2.81).

Uwzględniając powyższe, będziemy mogli zapisać na podstawie (5.32) dla mniejszej powłoki

$$\left.\begin{aligned}
&N_{1mN}^{(g)} = 1{,}465,\ N_{1mS}^{(g)} = 2{,}780,\ S_{mN}^{(g)} = -0{,}230,\ S_{mS}^{(g)} = -2{,}555;\\
&N_{1mu}^{(g)} = -210{,}0 \cdot 10^{-3} Eh^3,\ N_{1mv}^{(g)} = S_{mu}^{(g)} = 6{,}65 \cdot 10^{-3} Eh^3\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(średnia wartość)}\\
&S_{mv}^{(g)} = -23{,}40 \cdot 10^{-3} Eh^3;
\end{aligned}\right\}(5.35)$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_{mu}^{(d)} = -0{,}885,\ u_{mv}^{(d)} = -0{,}1385,\ v_{mu}^{(d)} = 1{,}675,\ v_{mv}^{(d)} = -1{,}540,\\
&u_{mN}^{(d)} = 26{,}0\ \frac{1}{Eh},\ u_{mS}^{(d)} = v_{mN}^{(d)} = 15{,}0\ \frac{1}{Eh} \text{(średnia wartość)},\\
&v_{mS}^{(d)} = 515\ \frac{1}{Eh}.
\end{aligned}\right\}(5.36)$$

W celu wyznaczenia sił na brzegu górnym powłoki od wpływu $w_m^{(g)}$ i $\varphi_m^{(g)}$ obliczymy promień krzywizny $R_2^{(g)} = \frac{r_g}{\sin \vartheta_g} = \frac{13{,}50}{0{,}9675} = 13{,}70$ m, i wg (2.91) $k = 10{,}80$. Uwzględniając powyższą wartość k otrzymamy ze wzorów (2.91)

$$\left.\begin{aligned}
&M_{1m\varphi}^{(g)} = 1{,}085\ Eh^3,\ M_{1mw}^{(g)} = -Q_{1m\varphi}^{(g)} = -0{,}855\ Eh^3,\\
&Q_{1mw}^{(g)} = 1{,}350\ Eh^3,\\
&N_{1mw}^{(g)} = 0{,}0406\ Eh^3,\ N_{1m\varphi}^{(g)} = 0{,}189\ Eh^3,\\
&S_{mw}^{(g)} = 2{,}74\ Eh^3,\ S_{m\varphi}^{(g)} = 1{,}74\ Eh^3.
\end{aligned}\right\}(5.37)$$

Dla wyznaczenia pozostałych sił obliczymy jeszcze przemieszczenia $w_m^{(g)}$ i $\varphi_m^{(g)}$ od wpływu przemieszczeń stycznych na krawędzi górnej. Wg wzorów (4.20) w artykule [7] dla powłoki stożkowej, znajdziemy

$$w_{mu}^{(g)} = -0{,}1596, \quad \varphi_{1mu}^{(g)} = 0{,}300; \quad w_{mv}^{(g)} = 2{,}023, \quad \varphi_{1mv}^{(g)} = -0{,}024,$$

a stąd na podstawie wzorów (2.95) otrzymamy

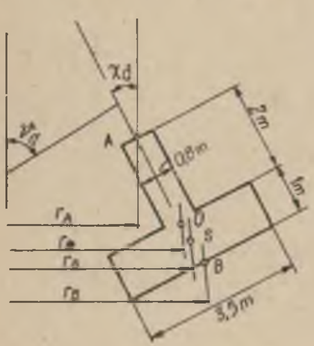
$$\left.\begin{aligned} &\tilde{N}_{1mu}^{(g)} = -0{,}050\ Eh^3, \quad \tilde{N}_{1mv}^{(g)} = -0{,}085\ Eh^3 \approx \tilde{S}_{mu}^{(g)} = -0{,}078\ Eh^3 \\ &\tilde{S}_{mv}^{(g)} = -5{,}508\ Eh^3; \end{aligned}\right\} \quad (5.38)$$

w podobny sposób obliczymy jeszcze dla kontroli

$$\left.\begin{aligned} &Q_{1mu}^{(g)} = -0{,}0405\ Eh^3 \approx -N_{1mw}^{(g)}, \quad M_{1mu}^{(g)} = 0{,}189\ Eh^3 = N_{1m\varphi}^{(g)}, \\ &Q_{1mv}^{(g)} = -2{,}715\ Eh^3 \approx -S_{mw}^{(g)}, \quad M_{1mv}^{(g)} = 1{,}704\ Eh^3 \approx S_{m\varphi}^{(g)}. \end{aligned}\right\} \quad (5.39)$$

5.2.3. Podbudowa

Przyjęto liczbę słupów podbudowy $n = 56$, $r_2 = 24{,}41$ m, wysokość podbudowy $H_2 = 5$ m oraz pole przekroju poprzecznego słupa $F = 0{,}16\ m^2$. Uwzględniając, że $r_1 = r_d = 22{,}5$ m, otrzymamy ze wzoru (4.20b) $\vartheta_1 = 70°53'$; z drugiej strony na dolnej krawędzi powłoki $\vartheta = 90° - \text{arc tg}\ r'_d = 90° - \text{arc tg}\ 0{,}3467 = 70°53' = \vartheta_1$, co świadczy o tym, że płaszczyzny wyznaczone przez słupy zbiegające się w górnych węzłach, są styczne w tych miejscach do środkowej powierzchni powłoki.



Rys. 20

Wg wzorów (4.20) obliczymy jeszcze $\vartheta_2 = 67°58'$, $\alpha_1 = 27°30'$ $\alpha_2 = 25°05'$ i długość słupa $l = 7{,}10$ m

5.2.4. Pierścień fundamentowy

Dla pierścienia o przekroju i wymiarach jak na rys. 20 otrzymamy

$a_{1'} = 2{,}5$ m, $a_{2'} = 0$,; $s_1 = -0{,}38$ m, $s_2 = 0$; $b_{1'} = 0{,}5$ m, $b_{2'} = 0$;

$A^* = 4{,}7\ m^2$, $I_1^* = 3{,}61\ m^4$, $I_2^* = 2{,}74\ m^4$, $C_o^* = 1{,}074\ m^4$, $\bar{I}_x = 3{,}57\ m^3$.

Uwzględniając wyniki uzyskane poprzednio będziemy jeszcze mieli

$r_A = r_2 = 24{,}41$ m, $r_\psi = 25{,}20$ m, $r_s = 25{,}35$ m, $r_B = 25{,}53$ m,

$\vartheta_d = \vartheta_2 = 67^o 58'$, $\varkappa_1 = \psi = 90^o - \vartheta_d = 22^o 02'$.

Obliczając dla powyższych wartości współczynniki k wg (4.09) i (4.10) oraz wielkości r wg (4.12) i podstawiając je do wzorów (4.16) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
&N^*_{mu} = 0{,}1345\ E,\ N^*_{mv} = 0{,}3840\ E,\ N^*_{uw} = -0{,}1725\ .\ E,\\
&N^*_{m\varphi} = -0{,}3660\ E;\\
&M^*_{1mu} = -0{,}002135.E,\ M^*_{1mv} = -0{,}0108\ E,\ M^*_{1mw} = 0{,}02255\ E,\\
&M^*_{1m\varphi} = 0{,}00276\ E;\\
&M^*_{2mu} = 0{,}01775\ E,\ M^*_{2mv} = 0{,}00332\ E,\ M^*_{2mw} = 0,\\
&M^*_{2m\varphi} = -0{,}1005\ E;\\
&M^*_{3mu} = -0{,}00131E,\ M^*_{3mv} = 0, M^*_{3mw} = -0{,}000531, M^*_{3m\varphi} = 0{,}03455.
\end{aligned}\right\}\ (5.40)$$

Uwzględniając powyższe wartości ze wzorów (4.18) wyznaczymy oddziaływania od wpływu jednostkowych przemieszczeń na linii A

$$\left.\begin{aligned}
&r_{uu}=0,1001\ E,\ r_{uv}=r_{vu}=0,2782\ E,\ R_{uw}=r_{wu}=-0,1248\ E,\\
&r_{u\varphi}=r_{u\varphi}=-0,2835\ E;\\
&r_{vv}=0,7909\ E,\ r_{vw}=r_{wv}=-0,3577\ E,\ r_{v\varphi}=r_{\varphi v}=-0,7573\ E;\\
&r_{ww}=0,1636\ E,\ r_{w\varphi}=r_{\varphi w}=0,3384\ E,\ r_{\varphi\varphi}=0,8800\ E.
\end{aligned}\right\}\quad(5.41)$$

Wartości (5.41) uzupełnić należy wartościami oddziaływań $\bar{r}$ na linii A wynikłymi wskutek sprężystego oddziaływania podłoża. W tym celu obliczymy współczynniki $\bar{k}$ wg (4.40)

$$\bar{k}_{uu}=0,2456,\ \bar{k}_{uv}=1,045,\ \bar{k}_{uw}=\bar{k}_{u\varphi}=0;$$

$$\bar{k}_{vu}=-1,\ \bar{k}_{vv}=\bar{k}_{vw}=\bar{k}_{v\varphi}=0\ ;$$

$$\bar{k}_{wu}=\bar{k}_{wv}=0,\ \bar{k}_{ww}=1,\ \bar{k}_{w\varphi}=3;$$

$$\bar{k}_{\varphi u}=\bar{k}_{\varphi v}=\bar{k}_{\varphi w}=0,\ \bar{k}_{\varphi\varphi}=0,$$

a stąd według wzorów (4.43a) otrzymamy następujące wartości na wspomniane oddziaływania $\bar{r}$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{r}_{uu}=-184000,\ \bar{r}_{vv}=-97500,\ \bar{r}_{ww}=-89300,\bar{r}_{\varphi\varphi}=-985000;\\
&\bar{r}_{uv}=\bar{r}_{vu}=-22850,\ \bar{r}_{w\varphi}=\bar{r}_{\varphi w}=-268000,\\
&\bar{r}_{u\varphi}=\bar{r}_{\varphi u}=\bar{r}_{vw}=\bar{r}_{wv}=\bar{r}_{v\varphi}=\bar{r}_{\varphi v}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(5.42)$$

Obliczymy jeszcze przemieszczenia powierzchni terenu wynikłe wskutek krzywizny o promieniu R i rozpełzania o intensywności ε. Ze wzorów (3.62) i (3.65) znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}^{(o)}_{Bm} = -12,76\ \varepsilon,\quad \bar{v}^{(o)}_{Bm} = -151,0\ \frac{1}{R} - 4,970\ .\ \varepsilon,\quad \bar{w}^{(o)}_{Bm} = \\ &= 61,0\ \frac{1}{R} - 11,85\ \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (5.43)$$

5.2.5. Uzyskane poprzednio wyniki pozwolą na obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu (4.46). Ze wzorów (4.48a) uwzględniając wartości (5.34), (5.35), (5.37), (5.38) i (5.39) otrzymamy

$$r_{11} = 64,08.10^{-3}E,\quad r_{21} = r_{12} = 11,530.10^{-3}E,\quad r_{13} = r_{31} = 6,788.10^{-3}E,$$

$$r_{14} = -112,95.10^{-3}E;\quad r_{22} = 14,65.10^{-3}E,\quad r_{23} = -2,560.10^{-3}E,$$

$$r_{24} = -23,0.10^{-3}E;\quad r_{32} = -2,550.10^{-3}E,\quad r_{33} = 4,679.10^{-3}E,$$

$$r_{34} = -11,211.10^{-3}E;\quad r_{41} = -113,30.10^{-3}E,\quad r_{42} = -23,5.10^{-3}E,$$

$$r_{43} = -11,13.10^{-3}E,\quad r_{44} = 202,2.10^{-3}E.$$

Ze wzorów (4.48b) znajdziemy

$$r'_{35} = -\delta'_{53} = 19,80,\quad r'_{36} = -\delta'_{63} = -37,60,$$

$$r'_{45} = -\delta'_{54} = 3,110,\quad r'_{46} = -\delta'_{64} = 34,50;$$

$$\delta_{55} = 9,07\ \frac{10^3}{E},\quad \delta_{56} = \delta_{65} = 3,38\ \frac{10^3}{E},\quad \delta_{66} = 127,5\ \frac{10^3}{E};$$

$\delta'_{57} = -r'_{75} = -23,0,\quad \delta'_{58} = -r'_{85} = -2,420,\quad \delta'_{67} = -r'_{76} = 9,90,$

$\delta'_{68} = -r'_{86} = -20,65;$

Podstawiając wartości (5.41) i (5.42) do wzorów (4.48c) będziemy mieli

$r_{77} = 0,1880\ E,\ r_{78} = r_{87} = 0,289\ E,\ r_{79} = r_{97} = -0,1248\ E,$

$r_{7,10} = r_{10,7} = -0,2835\ E,\ r_{88} = 0,837\ E,\ r_{89} = r_{98} = -0,3577E$

$r_{8,10} = r_{10,8} = -0,7573\ E;\ r_{99} = 0,2060\ E,\ r_{9,10} = 0,466\ E,$

$r_{10,10} = 1,350\ E.$

Wyrazy wolne znajdziemy ze wzorów (4.48d) i (4.43b) uwzględniając (5.43)

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0;\quad \Delta_5 = \Delta_6 = 0,$

$R_7 = -13500\ \frac{C}{R} - 288,5\ C.\ \varepsilon,\ R_8 = 595\ C.\ \varepsilon,$

$R_9 = -2725\ \frac{C}{R} + 530\ C \cdot \varepsilon,\ R_{10} = -8180\ \frac{C}{R} + 1588\ C.\varepsilon\ .$

Rozwiązując układ (4.46) dla powyższych wartości współczynników i wyrazów wolnych, w wyniku otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} u_m^{(g)} &= -(5,19\,\varepsilon + 145,5\ \tfrac{1}{R})10^3\ \tfrac{C}{E}, v_m^{(g)} - (0,845\,\varepsilon + 81,0\ \tfrac{1}{R})10^3 \tfrac{C}{E}, \\ w_m^{(g)} &= -(0,620\varepsilon + 115,7\ \tfrac{1}{R})10^3\ \tfrac{C}{E}, \varphi_m^{(g)} = -(1,744\varepsilon + 61,7\tfrac{1}{R})10^3\ \tfrac{C}{E}; \end{aligned}\right\} \quad (5.44a)$$

$$N_{1m}^{(d)} = 0,536\ C\varepsilon + 26,6\ C/R,\quad S_m^{(d)} = -0,112\ C\varepsilon + 3,33\ C/R \qquad (5.44b)$$

$$u_{Am}=(5{,}46\varepsilon+150{,}3\,\tfrac{1}{R})10^3\,\tfrac{C}{E};\quad v_{Am}=-(8{,}91\varepsilon+31{,}34\,\tfrac{1}{R})10^3\,\tfrac{C}{E};$$
$$w_{Am}=(-15{,}35\varepsilon+21{,}20\,\tfrac{1}{R})10^3\,\tfrac{C}{E};\quad \varphi_{Am}=(0{,}271\varepsilon+12{,}75\,\tfrac{1}{R})10^3\,\tfrac{C}{E} \qquad (5.44c)$$

Znając wartości głównych niewiadomych łatwo już znajdziemy siły wewnętrzne w całym ustroju chłodni.

Siły stanu błonowego w powłoce otrzymamy bezpośrednio ze wzorów (2.29).

W tablicy I zestawione zostały wartości tych sił od wpływu jednostkowych obciążeń krawędzi dolnej. W oparciu o te wartości obliczono siły błonowe od obciążeń wyrażających się amplitudami (5.44b). Do sił tych dodano siły błonowe zasadniczego stanu zgięciowego wykorzystując wyniki uzyskane w pierwszym przykładzie dla większej powłoki (a/b=25 m/60 m) i uwzględniając, fakt, że siły te w mniejszej powłoce (a/b=12/30m) będą osiem razy większe aniżeli w większej powłoce p. 5.2.2.

Otrzymane wartości $N_{1m}^{(\varepsilon)}$, $S_m^{(\varepsilon)}$ od wpływu rozpełzania i $N_{1m}^{(R)}$, $S_m^{(R)}$ od wpływu krzywizny, podano w tablicy VI.

Momenty zgięciowego stanu obliczymy również w oparciu o wyniki uzyskane w pierwszym przykładzie, uwzględniając fakt, że w mniejszej powłoce będą one cztery razy większe aniżeli w powłoce większej.

Wartości $M_{2m}^{(\varepsilon)}$ od wpływu rozpełzania i $M_{2m}^{(R)}$ od wpływu krzywizny zestawiono również w tablicy VI. Wartości amplitud pozostałych dwóch momentów nie podano z uwagi na to, że są one znacznie mniejsze od M_{2m}.

Podane w tablicy VI wartości amplitud sił i momentów pozwoliły wykonać wykresy tych wielkości rys.21.

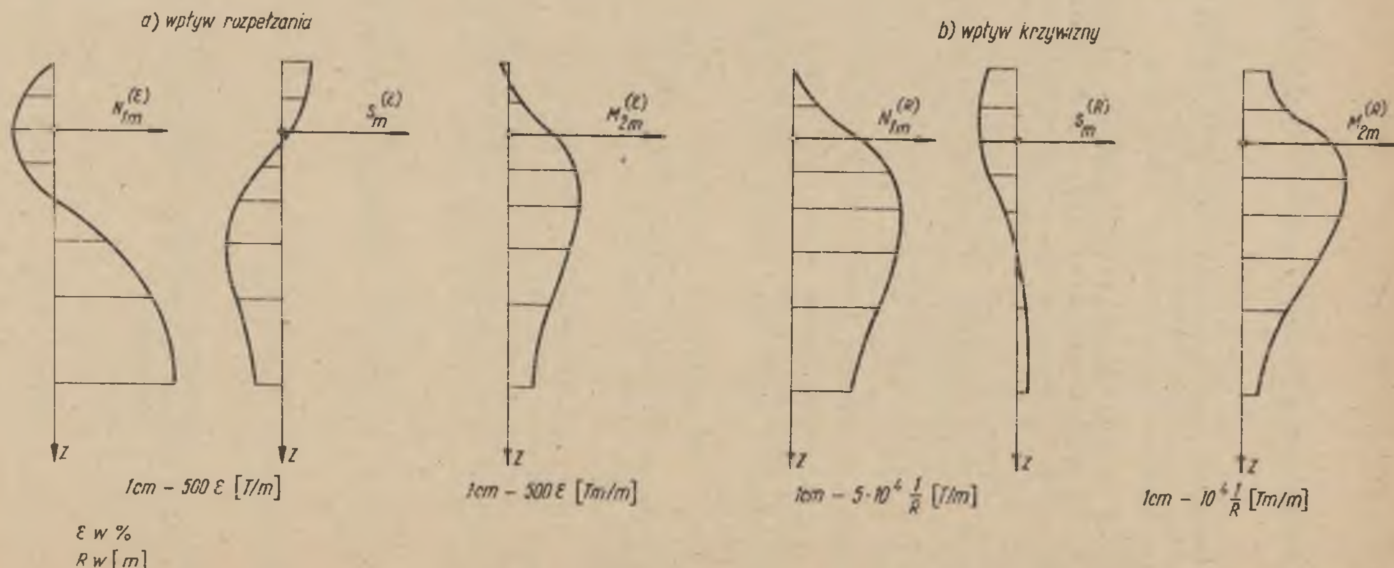
Dodatkowe siły i momenty dla krawędzi górnej związane z zaburzeniem brzegowym znajdziemy ze wzorów (5.37) ÷ (5.39); uwzględniając wartości (5.44a) amplitud, otrzymamy

$$N_{1m}^{(g)}=58\varepsilon-5{,}40.10^3.1/R,\quad S_m^{(g)}=-832\varepsilon+66{,}2.10^3.1/R;$$
$$Q_{1m}^{(g)}=-370\varepsilon+34{,}4.10^3.1/R,\quad M_{1m}^{(g)}=0. \qquad (5.45)$$

Amplitudy sił wewnętrznych w górnym pierścieniu obliczymy wg (5.33) zaś w dolnym wg (5.40). Dla amplitud przemieszczeń (5.44a) i (5.44c) otrzymamy:
dla pierścienia górnego

$$N_m=-2{,}70.10^3\varepsilon+200.10^3.1/R,\quad M_{1m}=5{,}96.10^3\varepsilon-524.10^3\,1/R \qquad (5.46)$$

Wykresy amplitud sił wewnętrznych zasadniczego stanu naprężenia



Rys. 21

dla pierścienia dolnego

$$\left.\begin{array}{ll} N^*_m = -270.10^3\varepsilon -260.10^3.1/R, & M^*_{1m} = -431.10^3\varepsilon +1061.10^3.1/R, \\ M^*_{2m} = 80,4.10^3\varepsilon +2568.10^3.1/R, & M^*_{3m} = 20,7.10^3\varepsilon +464.10^3.1/R \end{array}\right\} \quad (5.47)$$

Uwzględniając wartości (5.44b) amplitud sił na dolnym brzegu powłoki, obliczymy jeszcze siły w słupach podbudowy; wg wzorów ustępu 4.3. otrzymamy

$$\max P^{(\varepsilon)} = 3,60.10^3\varepsilon, \qquad \max P^{(R)} = 152.10^3\,\frac{1}{R} \qquad (5.48)$$

Jak wynika z wykresów na rys.21, siły błonowe w powłoce komina dla średnich wartości rozpełzania i krzywizny terenu (ε = = 3^0/oo, R = 10 km) są niewielkie i w rozpatrzonym przykładzie nie przekraczają wartości 10 T/m Natomiast momenty obwodowe (M_2) osiągają w miejscu przewężenia komina wartości rzędu 4 Tm/m, a więc decydujące dla wymiarowania. Pozostałe momenty są rzędu dziesiętnych części Tm/m, a więc już znacznie mniejsze. Również dodatkowe siły w słupach podbudowy jak i siły i momenty w obu pierścieniach osiągają wartości, których przy obliczeniach wytrzymałościowych tych elementów nie można pominąć.

1. RÓWNANIA OGÓLNEJ TEORII POWŁOK

Różniczkowe równania równowagi wewnętrznej dla dowolnej powłoki odniesionej do linii krzywizn głównych, przy oznaczeniach sił wewnętrznych jak na rys. 3, możemy zapisać następująco

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS_{21}) + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_2\right] + \frac{Q_1}{R_1} + X = 0,\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_{12}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{21} - \frac{\partial A}{\partial\beta}N_1\right] + \frac{Q_2}{R_2} + Y = 0\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BQ_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AQ_2)\right] - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} - Z = 0,\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AM_{21}) + \frac{\partial A}{\partial\beta}M_{12} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2\right] - Q_1 = 0,\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_{12}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AM_2) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{21} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_1\right] - Q_2 = 0,\\
&S_{12} - S_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0,
\end{aligned}\right\}\quad (I)$$

[3] str. 36, [8] str. 36, 37, [10] str. 251.

Związki geometryczne między składowymi ε_1, ε_2, γ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ i τ stanu odkształcenia, a składowymi u,v,w stanu przemieszczenia - p. rys. 2, zapiszemy wg [8] str. 25

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v - \frac{w}{R_1},\\
&\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u - \frac{w}{R_2},\\
&\gamma = \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right),
\end{aligned}\right|\quad (II)$$

$$
\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right), \\
\varkappa_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right), \\
\tau &= \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \\
&+ \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v\right),
\end{aligned}
\qquad \text{(cd.II)}
$$

por. [3] str. 53, 54.

Związki między składowymi przemieszczeniami a kątami obrotu φ_1, φ_2 elementu odpowiednio wokół osi β i α – p. rys. 3, przyjmiemy wg [3] str. 53 i [8] str. 20

$$
\varphi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}. \qquad \text{(III)}
$$

Występujące w (I), (II), (III) współczynniki A, B pierwszej formy kwadratowej i główne promienie krzywizny R_1 i R_2 w przypadku powłoki obrotowej odniesionej do układu osi z, β – p. rys. 2, wyrażają się następująco

$$
A = (1+r^{2})^{1/2}, \; B = r, \; R_1 = -\frac{1}{r''}(+r'^{2})^{3/2}, \; R_2=(1+r'^{2})^{1/2} r \qquad \text{(IV)}
$$

p [10] str. 25.

Na związki między siłami wewnętrznymi a odkształceniami przyjmiemy najprostszy wariant równań fizycznych

$$
\begin{aligned}
&N_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2), \; S = \frac{Eh}{1+\nu}\gamma, \; N_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1), \\
&M_1=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1+\nu\varkappa_2), M_{12}=M_{21} = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau, M_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_2+\nu\varkappa_1),
\end{aligned}
\qquad \text{(V)}
$$

[3] str. 70, [8] str. 50.

2. RÓWNANIA TEORII BŁONOWEJ

Równania równowagi stanu błonowego otrzymamy z ogólnych równań (I) pomijając w trzech pierwszych równaniach siły poprzeczne Q, a w szóstym równaniu moment skręcający M_{12}, w wyniku otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS) + \frac{\partial A}{\partial B}\,S - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\,N_2 + ABX = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\,S - \frac{\partial A}{\partial\beta}\,N_1 + ABY = 0,\\
&\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + Z = 0
\end{aligned}\right\}\quad\text{(VI)}$$

W równaniach tych uwzględniono $S_{12} = S_{21} = S$, co wynika z szóstego uproszczonego równania układu (I).

Równania (VI) po podstawieniu w nich wielkości A, B, R_1 i R_2 wg (IV) i zamianie α na z, przyjmą następującą postać

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}(rN_1)+(1+r'^2)^{1/2}\,\frac{\partial S}{\partial\beta} - r'N_2+(1+r'^2)^{1/2}\,r\,X = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial z}(rS) + r'S+(1+r'^2)^{1/2}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,N_2+(1+r'^2)^{1/2}\,r\,Y = 0,\\
&-\frac{r''r}{1+r'^2}\,N_1+N_2+(1+r'^2)^{1/2}\,r\,Z = 0,
\end{aligned}\right\}\quad\text{(VII)}$$

por. [10] str.25.

Równania geometryczne dla stanu błonowego otrzymamy z trzech pierwszych równań (II). Wyrażając składowe odkształcenia błonowego ε_1, ε_2 i γ przez siły błonowe N_1, N_2 i S wg (V) możemy równaniom tym nadać następującą postać

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{2Eh}(N_1 - \nu N_2),\\
&\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{2Eh}(N_2 - \nu N_1),\\
&\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) = \frac{1+\nu}{Eh}\, r\, S.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}$$

3. RÓWNANIA ZABURZENIA BRZEGOWEGO

Zakładając, że linia zaburzenia pokrywa się z β -linią, rozwiązanie w przemieszczeniach w tym przypadku sprowadza się do jednego równania różniczkowego, ze względu na przemieszczenia normalne w

$$\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \frac{3(1-\nu^2)}{h^2R_2^{\,2}}\,w = 0 \qquad \text{(IX)}$$

p. [3] str. 373. Pozostałe przemieszczenia i kąt obrotu φ_1 wyrażają się następująco przez w

$$\left.\begin{aligned}
&u = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)\frac{h^2R_2^{\,2}}{3(1-\nu^2)}\,\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3},\quad v = -\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\,\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R_2}{A^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2},\\
&\text{[3] str. 371, 373.}\qquad \varphi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(X)}$$

Uwzględniając nasze oznaczenia sił wewnętrznych jak na rys. 3, możemy zapisać następujące wzory wg [3] str. 372, 373.

$$\left.\begin{aligned}
&N_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta} + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\frac{R_2}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\\
&N_2 = -\frac{2Eh}{R_2}w,\quad S = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\,\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R_2}{A^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3},\\
&Q_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\,\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3},\quad M_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\,\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI)}$$

W oparciu o równanie (IX) wyznaczać będziemy siły (XI) na górnym brzegu $\alpha = \alpha_g$ powłoki obrotowej jak na rys. 2. Całkując równanie (IX) otrzymamy dla $\alpha \geqslant \alpha_g$

$$w = \frac{1}{2Eh}\left[\psi_1 \cos\frac{A}{R_2}k(\alpha-\alpha_g) - \psi_2 \sin\frac{A}{R_2}k(\alpha-\alpha_g)\right] e^{-\frac{A}{R_2}k(\alpha-\alpha_g)} \qquad \text{(XII)}$$

gdzie ψ_1 i ψ_2 dowolne funkcje β, a $k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{4}}\sqrt{\frac{R_2}{h}}$.

Wyrażenie (XII) uzyskać można bezpośrednio z odpowiedniego wzoru w [3] str. 374, uwzględniając różnicę między zwrotem osi α w [3], a zwrotem tej osi w niniejszej pracy.

Podstawiając (XII) do wzorów (X) i (XI), otrzymamy dla $\alpha = \alpha_g$ następujące wzory na przemieszczenia i siły krawędziowe związane z zaburzeniem brzegowym

$$\left.\begin{aligned}
& u = -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)\frac{h}{3(1-\nu^2)E}\,\frac{k^3}{R_2}(\psi_1-\psi_2), \quad v = -\frac{2h}{3(1-\nu)E}\,\frac{k^2}{BR_2}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\psi_2, \\
& w = \frac{1}{2Eh}\psi_1, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2Eh}\,\frac{k}{R_2}(\psi_1+\psi_2); \\
& N_1 = \frac{2h^2}{3(1-\nu^2)}\,\frac{k^2}{BR_2}\left[\frac{1}{B}\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\psi_2 + \frac{k}{AR_2}\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}(\psi_1-\psi_2)\right], \quad N_2 = -\frac{\psi_1}{R_2}, \\
& S = -\frac{2h^2}{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{k^3}{BR_2^2}\,\frac{\partial}{\partial\beta}(\psi_1-\psi_2), \quad Q_1 = \frac{2h^2}{3(1-\nu^2)}\,\frac{k^3}{R_2^3}(\psi_1-\psi_2), \\
& M_1 = \frac{2h^2}{3(1-\nu^2)}\,\frac{k^2}{R_2^2}\psi_2,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII)}$$

por. [3] str. 377.

Pochodne pomocniczych funkcji zasadniczego stanu zgięciowego w powłoce hiperboloidalnej.

$$
\left.
\begin{aligned}
& g_1(z) = (1+r'^2)^{-1/2}, \qquad g_1'(z) = -r'.r''.g_1^3, \\
& g_1''(z) = -(r''^2 + r'.r''')g_1^3 - 3\,r'.r''.g_1^2.g_1', \\
& g_1'''(z) = -(3\,r''.r'''+r'.r^{(IV)})g_1^3-6(r''^2+r'.r''')g_1^2.g_1' - \\
& - 3r'r''g_1(2g_1'^2 + g_1.g_1''), \\
& g_1^{(IV)}(z) = -(3r'''^2+4\,r''.r^{(IV)} + r'.r^{(V)})g_1^3 - \\
& - 9(3.r''r'''+r'r^{(IV)})g_1^2\, g_1' - 9(r''^2+r'r''').(2g_1g_1'^2+g_1^2g_1'') - \\
& - 3r'.r''(2g_1'^3+6g_1g_1'g_1''+g_1^2.g_1'''), \\
& g_1^{(V)}(z) = -(10r'''.r^{(IV)}+5r''r^{(V)}+r'.r^{(VI)}).g_1^3-12. \\
& \left(3\,r'''^2+4r''r^{(IV)}+r'.r^{(V)}\right)g_1^2.g_1'-18\left(3r''.r'''+\right. \\
& \left.+ r'.r^{(IV)}\right).\left(2g_1g_1'^2 + g_1^2g_1''\right)-12\left(r''^2+r'.r'''\right).\left(2g_1'^3 +\right. \\
& \left.+ 6g_1g_1'.g_1'' + g_1^2.g_1'''\right)- 3r'r''.\left(12g_1'^2.g_1'' + 6g_1g_1''^2 +\right. \\
& \left.+ 8g_1.g_1'.g_1''' + g_1^2.g_1^{(IV)}\right).
\end{aligned}
\right\} \quad (\mathrm{I})
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& r' = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{z}{r}, \quad r'' = \frac{a^4}{b^2}\,\frac{1}{r^3}, \quad r''' = -3\,\frac{a^6}{b^4}\cdot\frac{z}{r^5}, \\
& r^{(IV)} = 12\,\frac{a^6}{b^4}\,\frac{1}{r^5} - 15\,\frac{a^8}{b^4}\,\frac{1}{r^7}, \\
& r^{(V)} = -60\,\frac{a^6}{b^4}\,\frac{r'}{r^6} + 105\,\frac{a^8}{b^4}\,\frac{r'}{r^8}, \\
& r^{(VI)} = 360\,\frac{a^8}{b^6}\,\frac{1}{r^7} - 1260\,\frac{a^{10}}{b^6}\,\frac{1}{r^9} + 945\,\frac{a^{12}}{b^6}\,\frac{1}{r^{11}}.
\end{aligned}\right\} \quad (II)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& g_2(z) = \frac{a^2}{b}\cdot\frac{1}{r^2}, \quad g_2'(z) = -\frac{2a^2}{b}\,r^{-3}.r', \\
& g_2''(z) = 6\,\frac{a^4}{b^3}\,\frac{1}{r^4} - 8\,\frac{a^6}{b^3}\,\frac{1}{r^6}, \\
& g_2'''(z) = -24\,\frac{a^4}{b^3}\cdot\frac{r'}{r^5} + 48\,\frac{a^6}{b^3}\,\frac{r'}{r^7}, \quad g_2^{(IV)} = 120\,\frac{a^6}{b^5}\,\frac{1}{r^6} - \\
& - 480\,\frac{a^8}{b^5}\cdot\frac{1}{r^8} + 384\,\frac{a^{10}}{b^5}\,\frac{1}{r^{10}}.
\end{aligned}\right\} \quad (III)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& g_3(z) = (1+r'^2)r^3, \quad g_3'(z) = 3.\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{a^2}{b^2}.r.z - \frac{a^4}{b^2}\,r', \\
& g_3''(z) = 3\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}\left(2r - \frac{a^2}{r}\right) - \frac{a^4}{b^2}\,r'', \\
& g_3'''(z) = 6\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}\,r' + 3\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right).\frac{r'}{r^2} - \frac{a^4}{b^2}\cdot r''', \\
& g^{(IV)} = 9\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{a^8}{b^4}\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{a^4}{b^2}\,r^{(IV)}
\end{aligned}\right\} \quad (IV)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& g_4(z) = r''.g_1^3(z),\ g_4'(z) = r'''.g_1{}^3+3\ r''.g_1{}^2\ g_1', \\
& g_4''(z) = r^{(IV)}g_1{}^3 + 6r'''g_1{}^2.g_1'+3r''.(2g_1g_1'{}^2 + g_1{}^2.g_1''), \\
& g_4'''(z) = r^{(V)}g_1{}^3 + 9r^{(IV)}g_1{}^2g_1' + 9r'''(2g_1g_1'{}^2+g_1{}^2.g_1'')+3\ r''. \\
& (2g_1'{}^3 + 6.g_1g_1'g_1'' + g_1{}^2.g_1'''),
\end{aligned}
\right\} \quad (V)
$$

$$
g_5(z) = -\frac{r'}{r}.\ g_1{}^2,\ g_5' = -\left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2}\right).g_1{}^2-2.\ \frac{r'}{r}\ g_1g_1'. \qquad (VI)
$$

Tablica I

Wielkości pomocnicze do wyznaczenia stanu błonowego w powłoce hiperboloidalnej

z	α	r	r'	r"	f_{1m}	f_{2m}	N_{1mN}	N_{1mS}	S_{mN}	S_{mS}	$N^{(s)}_{1m}$	$S^{(s)}_{m}$	$N^{(a)}_{1m}$	$S^{(a)}_{m}$	$G^{(s)}_{m1}$	$G^{(s)}_{m2}$	$G^{(a)}_{m1}$	$G^{(a)}_{m2}$
0	0	25,00	0	6,944	-0,3835	0,9235	-0,653	7,180	-0,655	-1,240	-4,444	0	0	-0,766	-0	-2680	-19,15	0
11,95	0,1964	25,49	0,8137	6,551	-0,0007	1,0000	-0,004	7,660	-0,680	-0,003	-4,040	-0,678	0,691	-0,680	-17,30	-2550	-17,40	435,0
24,88	0,3929	27,06	1,596	5,473	0,3822	0,9241	0,610	6,700	-0,558	1,050	-2,930	-1,112	1,217	-0,462	-30,50	-2125	-12,65	865,0
40,15	0,5893	30,08	2,317	3,996	0,7068	0,7074	1,016	4,660	-0,346	1,575	-1,440	-1,175	1,440	-0,202	-36,00	-1320	- 6,200	1320
60,10	0,7858	35,38	2,949	2,449	0,9238	0,3828	1,155	2,180	-0,136	1,495	0,002	-0,923	1,353	0,000	-33,95	3	0,011	1800
90,00	0,9822	45,07	0,3407	1,185	1	0	1	0	0	1	1	-0,524	1	0,091	-25,00	2240	4,325	2240
			x10^{-1}	x10^{-3}												xb^2/a^4		xb^2/a^4

Tablica II

Wartości funkcji pomocniczych do wyznaczenia zasadniczego stanu zgięciowego w powłoce hiperboloidalnej

z	g_1	g_1'	g_1''	g_1'''	$g_1^{(IV)}$	$g_1^{(V)}$	g_2	g_2'	g_2''	g_2'''	$g_2^{(IV)}$	g_3	g_3'	g_3''	g_3'''	$g_3^{(IV)}$	g_4	g_5
0	1	10	-48,219	0	18,068	0	166,67	0	9,258	0	308,81	15,625	0	14,517	0	1,3357	6,944	0
11,95	0,9966	0,5275	-36,580	173,58	8,103	-134,9	160,31	-102,34	-7,266	30,307	155,50	16,673	1,7732	15,454	0,1541	1,2011	6,483	-0,3170
24,88	0,9875	0,8110	-11,811	170,35	-5,579	- 57,37	142,21	-167,73	-2,782	33,686	-79,80	20,330	3,9430	18,365	0,2888	0,8671	5,270	-0,5750
40,15	0,9784	0,8651	7,485	75,32	-6,635	25,94	115,12	-177,35	1,048	15,57	-120,03	28,680	7,129	23,627	0,3310	0,4910	3,734	-0,7374
60,10	0,9596	0,6425	12,007	-7,311	-1,627	16,401	83,20	-138,66	2,315	-0,04	- 38,25	48,155	12,676	32,178	0,4570	0,2074	2,179	-0,7665
90,00	0,9448	0,3465	7,194	-14,469	0,252	0,843	51,29	- 78,90	1,548	-3,113	3,25	102,55	21,416	40,469	0,4918	0,0587	0,9997	-0,6874
		x10^{-3}	x10^{-6}	x10^{-8}	x10^{-8}	x10^{-10}	x10^{-4}	x10^{-6}	x10^{-6}	x10^{-8}	x10^{-10}	x10^{3}	x10^{2}			x10^{-2}	x10^{-3}	x10^{-2}

Tablica III

Wartości prze ieszczeń i ich pochodnych od wpływu $u_m^{(c)} = 1$

z	u_{mu}	u'_{mu}	u''_{mu}	u'''_{mu}	$u^{(IV)}_{mu}$	$u^{(V)}_{mu}$	v_{mu}	v'_{mu}	v''_{mu}	v'''_{mu}	$v^{(IV)}_{mu}$	$v^{(V)}_{mu}$	w_{mu}	w'_{mu}	w''_{mu}	w'''_{mu}	$w^{(IV)}_{mu}$
0	-0,3835	3,0785	4,445	-55,642	-161,27	3365,3	23,088	0,3190	-19,239	-265,32	+3743,1	111,20	481,01	6,950	-0,4225	-0,5850	[illegible],232
11,95	-0,0007	3,1953	-2,3705	-50,523	222,57	2155,9	25,491	0,0814	-19,651	186,52	3301,2	-1[illegible],42	532,75	1,7131	-0,4325	0,4165	7,266
24,88	0,3774	2,5631	-6,601	-13,961	272,06	-1022,0	25,010	-0,1467	-15,170	446,88	675,12	-186,23	521,08	-3,310	-0,3336	0,9816	1,3400
40,15	0,6933	1,5322	-6,3500	12,463	73,41	-1105,2	21,278	-0,3256	-8,459	390,09	-1010,32	-37,02	438,14	-7,286	-0,1859	0,8689	-2,274
60,10	0,8865	0,5520	-3,4412	13,139	-31,85	-105,89	13,546	-0,4311	-2,8132	183,28	-851,11	27,96	265,79	-9,588	-0,0630	0,4000	-1,9600
90,00	0,9448	-0,0347	-0,9218	4,5520	-1888	75,40	0	0,4622	0	36,72	-223,5	11,45	-35,53	-10,299	0,0151	0,0959	0,1560
		$x10^{-2}$	$x10^{-4}$	$x10^{-6}$	$x10^{-8}$	$x10^{-10}$			$x10^{-3}$	$x10^{-6}$	$x10^{-6}$	$x10^{-8}$				$x10^{-2}$	$x10^{-4}$
	x 1,0583						x -0,10159						x - 0,009752				

Tablica IV

Wartości przemieszczeń i ich pochodnych od wpływu $v_m^{(d)} = 1$

z	u_{mv}	u'_{mv}	u''_{mv}	u'''_{mv}	$u^{(IV)}_{mv}$	$u^{(V)}_{mv}$	v_{mv}	v'_{mv}	v''_{mv}	v'''_{mv}	$v^{(IV)}_{mv}$	$v^{(V)}_{mv}$	w_{mv}	w'_{mv}	w''_{mv}	w'''_{mv}	$w^{(IV)}_{mv}$
0	0,9235	12,851	-10,680	-23,107	396,35	1397,5	-9,586	0,7696	7,989	-638,91	1554,4	267,78	200,79	-16,70	-174,48	13,96	3,4235
11,95	0,9960	-0,5045	-10,611	22,945	305,4	-2400,2	-0,002	0,8172	0,001	-625,20	1611,28	205,23	-8,412	-17,780	-1,55	13,74	-3,7036
24,88	0,9125	-11,510	-6,042	40,499	-21,42	-1921,3	10,343	0,7723	-6,275	-320,38	2662,43	-29,60	-234,00	-16,821	135,52	6,950	-5,7901
40,15	0,6921	-16,533	-0,8811	24,442	-138,04	136,57	21,262	0,6536	-8,453	0,62	1388,74	-97,50	-474,17	-14,312	184,75	-0,027	-2,986
60,10	0,3674	-15,000	1,6847	4,198	-58,18	389,76	32,690	0,498	-6,788	122,86	76,80	-32,12	-722,25	-10,901	146,58	-2,641	0,146
90,00	0	-9,690	1,5621	-2,286	1,959	55,36	45,069	0,3466	-3,555	82,07	-185,66	2,16	-993,7	-7,640	78,06	-1,742	0,406
		$x10^{-3}$	$x10^{-4}$	$x10^{-6}$	$x10^{-8}$	$x10^{-10}$			$x10^{-3}$	$x10^{-6}$	$x10^{-8}$	$x10^{-8}$			$x10^{-3}$	$x10^{-3}$	$x10^{-4}$
	x 0,23113						x 0,02218						x - 0,002130				

Tablica V

Wartości odkształceń zgięciowych i składowych obciążenia fikcyjnego

z	χ_{1mu}	χ_{2mu}	τ_{mu}	χ_{1mv}	χ_{2mv}	τ_{mv}	X_{mu}	Y_{mu}	Z_{mu}	X_{mv}	Y_{mv}	Z_{mv}	$X_m^{(s)}$	$Y_m^{(s)}$	$Z_m^{(s)}$	$X_m^{(a)}$	$Y_m^{(a)}$	$Z_m^{(a)}$
0	3,894	2,250	3,890	3,510	2,055	-2,040	1,745	58,15	-14,25	-0,913	5,310	-1,300	0	68,20	-167,2	11,81	0	0
11,95	3,980	2,285	0,009	0,007	0,004	-2,130	-0,438	56,60	-13,82	-0,870	0,015	0,141	-2,088	56,60	-135,52	9,142	56,43	-153,73
24,88	3,060	2,110	-3,310	-2,650	-1,906	-1,730	-1,595	44,25	-10,15	-0,485	-4,050	1,142	-2,517	36,55	-79,80	3,745	88,85	-22[illegible],50
40,15	1,685	1,484	-5,010	-3,730	-3,220	-1,093	-1,315	24,70	-5,05	-0,131	-5,360	1,358	-1,564	14,50	-24,70	0,105	83,70	-200,00
60,10	0,548	0,689	-4,680	-2,900	-3,644	-0,429	-0,521	7,95	-1,280	0,001	-4,150	0,956	-0,499	-0,03	-5,35	-0,049	53,55	-117,90
90,00	-0,141	0,014	-3,120	-1,515	-3,128	0	-0,102	0	0,184	0,002	-2,105	0,452	-0,069	-1,00	10,44	-0,200	23,20	-47,96
	$x10^{-3}$	$x10^{-2}$	$x10^{-3}$	$x10^{-4}$	$x10^{-3}$	$x10^{-3}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-5}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-5}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-6}$	$xEh^3 10^{-[illegible]}$	$xEh^3 10^{-6}$

Tablica VI

Wartości funkcji pomocniczych i sił wewnętrznych stanu zgięciowego. Wartości sił wewnętrznych w powłoce od [illegible]

z	$F_{1m}^{(s)}$	$F_{2m}^{(s)}$	$F_{1m}^{(a)}$	$F_{2m}^{(a)}$	N_{1mu}	N_{1mv}	S_{mu}	S_{mv}	M_{2mu}	M_{2mv}	z	$N_{1m}^{(\varepsilon)}$	$S_m^{(\varepsilon)}$	$M_{2m}^{(\varepsilon)}$	$N_{1m}^{(\kappa)}$	$S_m^{(\kappa)}$	$M_{2m}^{(\kappa)}$
-24,88					-26,30	0,48	1,17	-2,93	0	-11,60	-12,44	-6	244	-40,5	0,74	-23,6	3,58
-11,95					-27,0	2,97	-2,80	-2,03	- 6,11	-11,62	- 5,97	-229	210	79,7	32,0	-31,20	6,98
0	0	53,35	-0,185	0	-23,4	4,30	-5,72	-0,61	-23,2	-8,80	0	-356	66	426	62,0	-29,1	15,55
11,95	0,217	42,90	0,055	50,27	-17,0	4,22	-6,46	0,59	-30,6	-2,31	5,97	-314	-172	594	90,7	-22,0	17,72
24,88	0,303	24,69	0,645	73,47	-10,1	3,03	-5,42	1,16	-30,6	0,03	12,44	-58	-368	602	96,[illegible]	-11,58	16,91
40,15	0,198	7,04	1,260	63,60	-4,55	1,58	-3,30	0,51	-25,9	4,07	20,07	388	-450	523	93,8	-0,88	13,10
60,10	0,092	2,146	1,565	36,80	-1,10	0,45	-1,25	0,37	-17,10	6,52	30,05	808	-382	358	78,1	[illegible],18	7,40
90,00	-0,308	-3,42	1,545	14,77	0	0	0	0	-7,50	6,72	45,00	1054	-232	171,5	53,2	[illegible],06	2,05
	xEh^3	$xEh^3 10^{-5}$	xEh^3	$xEh^3 10^{-5}$	$xEh^3 10^{-3}$								x^{E}			$x10^3 \frac{1}{R}$	

LITERATURA

[1] Flüge W: Statik u. Dynamik der Schalen, Berlin 1962.

[2] Girkman K.: Dźwigary powierzchniowe, tłum. z niemieckiego, Warszawa 1957,

[3] Goldenwejzer A.Ł.: Tieoria uprugich tonkich obołoczek, Moskwa, 1953.

[4] Ledwoń J.: Żelbetowe chłodnie powłokowe, Warszawa 1959.

[5] Niewiadomski J.: Z zagadnienia pracy walcowej chłodni kominowej na terenie wpływów górniczych, "Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej; Budownictwo", z. 4, 1961.

[6] Niewiadomski J.:Obliczenie walcowej chłodni kominowej na obciążenie parciem wiatru, "Archiwum Inżynierii Lądowej", z. 1/1963.

[7] Niewiadomski J.: Zasadniczy stan zgięciowy w powłokach obrotowych, "Archiwum Inżynierii Lądowej", z. 3/1964,

[8] Nowożyłow W.W.: Tieoria tonkich obołoczek, 1951.

[9] Sarkadi Szabo: Die mit Säulen untersützte vertikale Kreiszylinderschale unter Windlast, Österreichisches Ingenieur Archiv", t. XVI, Z.2, 1961.

[10] Własow W.Z.: Obszczaja tieoria obołoczek, Moskwa 1949,

[11] Wierzbicki W.: Mechanika Budowli, Warszawa 1948.

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАШЕННЫХ ГРАДИРЕН С УЧЕТОМ МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ

В работе представлен статический расчет произвольной башенной градирни на влияние различных нагрузок. В решении учтена совместная работа всех элементов градирни и грунтового основания, которое принято как двупараметрическое основание Винклера.

Расчет выполнен в двух стадиях. В первой стадии определяются внутренние силы в оболочке градирни по безмоментной теории оболочек, предполагая, что оболочка защемлена внизу и наверху.

В результате получаются некоторые фиктивные силы вдоль линий соединения оболочки с примыкающими элементами.

Во второй стадии влияние фиктивных сил устаняется путем решения целой системы нагруженной на линиях соединения обратно направленными силами по отношении к силам первой стадии. Во второй стадии к оболочке градирни применен приближенный способ определения основных моментных состояний напряжения, основанный на геометрических и статических уравнениях безмоментной теории оболочек. Кроме того учтены внутренние силы краевого эффекта на верхнем крае оболочки усиленным кольцом.

Уравнения решения второй стадии получены из начала виртуальных работ как статические уравнения для верхнего и фундаментного кольца и уравнения неразрывности на линии соединения оболочки со столбами основания.

В работе имеюся два числовых примера.

В первом примере рассмотрено основное напряжение состояние в гиперболоидальной оболочке.

Во второй - решена система гиперболической градирни на влияние кривизны и оползания грунта на территории горных выработок.

STATICAL WORK OF THE SHELLED COOLING TOWERS TAKING INTO ACCOUNT BENDING STATE

In the paper the statical calculations of a cooling tower subjected to various influences have been presented.
The calculations have taken into account the elastic cooperation of all the elements of the cooling tower and its subsoil which were regarded as a two - parameter winkler 's base.

The solution has been carried out in two phases. In the first phase the internal forces in the shell have been determined according to the membrane theory.

It has been assumed that the shell is fastened on both sides of its edges, what has led to certain fictitious forces along the line of the shell 's connections with the adjacent elements.

In the second phase the influence of fictitious forces has been eliminated, solving the entire system charges along the lines of connections with reversely directed forces in relation to the forces of the first phase.

In this phase there has been applied to the chimney stack shell an approximate way of determining bending stress states with a small variability, based on the statical and geometrical equations of the membrane theory.

There vere moreover taken into account the internal forces bonnd the edge disturbance on the upper edge reinforced with a ring. The solution equations of the second phase have been got writing down on the ground of the principle of virtual work the equilibrium equations for the upper ring and the foundetion ring, as vell as the compatibility conditions along the line of shell connection with the posts.

The paper includes two numerical examples. In the first instance the stress state with a small variability in the hyperboloidal shell has been determined.

In the second example - the system of the hyperboloidal cooling tower, subjected to the influence of curvature and the weak ground has been solved.

ŻESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty serii B.:

Budownictwo z. 1,	1956 r.,	s. 84,	zł	13,50
Budownictwo z. 2,	1967 r.,	s. 75,	zł	14,25
Budownictwo z. 3,	1960 r.,	s. 104,	zł	28,50
Budownictwo z. 4,	1961 r.,	s. 107,	zł	18,75
Budownictwo z. 5,	1962 r.,	s. 156,	zł	12,90
Budownictwo z. 6,	1962 r.,	s. 111,	zł	8,90
Budownictwo z. 7,	1961 r.,	s. 118,	zł	9,20
Budownictwo z. 8,	1962 r.,	s. 86,	zł	6,25
Budownictwo z. S,	1962 r.,	s. 128,	zł	8,85
Budownictwo z. 9,	1963 r.,	s. 80,	zł	4,40
Budownictwo z. 10,	1964 r.,	s. 81,	zł	6,—
Budownictwo z. 11,	1964 r.,	s. 78,	zł	5,85
Budownictwo z. 12,	1964 r.,	s. 90,	zł	6,90
Budownictwo z. 13,	1964 r.,	s. 143,	zł	6,25
Budownictwo z. 14,	1964 r.,	s. 262,	zł	16,25

Cena zł 10,–