ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 19 Energetyka z. 3 1958

STANISŁAW OCHĘDUSZKO, JÓZEF FOLWARCZNY
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

NOWE UJĘCIE ZAGADNIENIA ADIABATYCZNEGO PRZEPŁYWU GAZU W PRZEWODZIE RUROWYM *

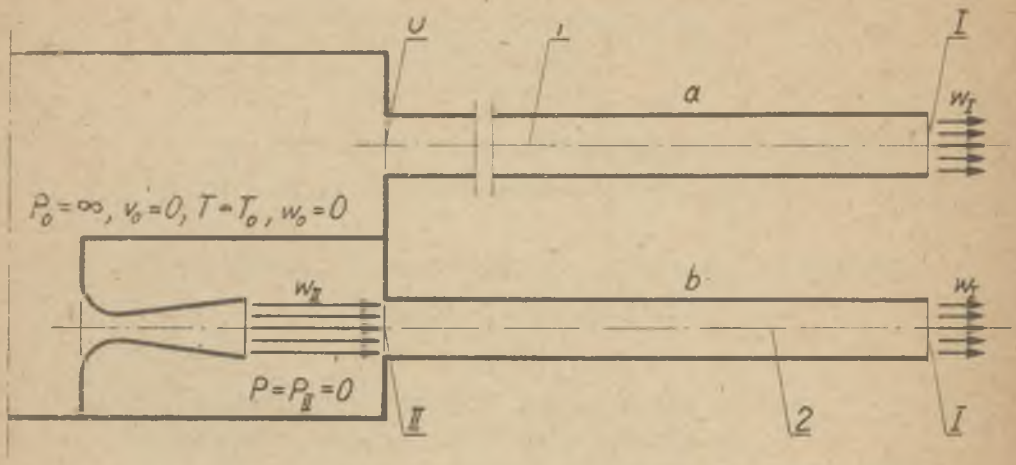
1. Symbole

p	kG/m^2	- bezwzględne ciśnienie statyczne płynu
T	^{o}K	- bezwzględna temperatura statyczna
v	m^3/kg	- objętość właściwa płynu
i	kcal/kg	- entalpia właściwa płynu
c_p	kcal/(kg grd)	- ciepło właściwe płynu przy stałym ciśnieniu
c_v	" " "	- ciepło właściwe płynu przy stałej objętości
$\varkappa$		- wykładnik adiabaty gazu doskonałego
R	kGm/(kg grd)	- stała gazowa płynu
w	m/sec	- rzeczywista prędkość płynu
w_m	m/sec	- średnia prędkość masowa płynu
w_v	m/sec	- " " objętościowa
C		- stosunek kwadratów prędkości
G^*	kg/sec	- natężenie przepływu płynu
F	m^2	- przekrój kanału
B	kg^2/(sec^2 m^4)	- kwadrat gęstości strumienia
l	kGm/kg	- praca jednostkowa
q	kcal/kg	- ciepło jednostkowe
A	kcal/kGm	- cieplny równoważnik pracy mechanicznej
μ	kgm/(kG sec^2)	- równoważnik jednostek masy

Indeksy stosowane (rys. 1):

$(\ )_o$	- przy parametrach stanu spoczynkowego
$(\ )_{1,I,II,2}$	- przy parametrach w przekrojach 1,I,II,2
$(\ )_s$	- przy parametrach przemiany izentropowej (adiabaty odwracalnej)
$(\ )_f$	- przy oznaczeniach pracy i ciepła tarcia
$(\ )_F$	- przy wielkościach dotyczących krzywej Fanno

* Praca referowana w maju 1957 na sesji naukowej w ramach 250-lecia istnienia Szkół Inżynierskich w Pradze Czeskiej.



Rys. 1. Schemat przewodu rurowego, w którym zachodzi: a) ekspansja, b) kompresja

2. Wstęp

Przepływ płynu elastycznego w kanale przebiega zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki i zasadą ciągłości strumienia. Pierwszą zasadę termodynamiki w odniesieniu do rozważanego przypadku adiabatycznego przepływu w poziomym przewodzie rurowym wyraża równanie

$$i_1 - i = A\,\frac{w_m^2 - w_{m1}^2}{2\mu} \tag{1}$$

natomiast zasadę ciągłości strumienia dla dowolnego przepływu określa wzór

$$\frac{G^*}{F} = \frac{w_v}{v} = \sqrt{B} \tag{2}$$

W powyższych równaniach odróżniono średnią prędkość masową w_m od średniej prędkości objętościowej w_v, przy czym stosunek

$$\frac{w_m^2}{w_v^2} = C \tag{3}$$

jest liczbą charakteryzującą profil prędkości.

Po skojarzeniu zależności (1), (2), (3) i po wprowadzeniu oznaczenia upraszczającego

$$B = \left(\frac{G^*}{F}\right)^2 \tag{2a}$$

otrzymuje się równanie

$$i_1 - i = \frac{A}{2\mu} B\left(Cv^2 - C_1 v_1^2\right) \tag{4}$$

które po założeniu $C = C_1 = 1{,}0$ staje się znanym równaniem krzywej Fanno.

3. Przedstawienie pracy tarcia i przyrostu energii kinetycznej w układzie (P,v)

Dalsze rozważania ze ścisłą dokładnością są słuszne dla gazów doskonałych, które podlegają następującym prawom:

$$Pv = RT \tag{a}$$

$$i = c_p T \tag{b}$$

$$AR = c_p - c_v = idem \tag{c}$$

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = idem \tag{d}$$

Po wprowadzeniu powyższych zależności do równania (4) otrzymuje się wzór

$$P = \left(P_1 v_1 + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa\mu} BC_1 v_1^2\right)\frac{1}{v} - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa\mu} BCv \tag{I}$$

według którego przebiega przemiana nieodwracalnej ekspansji adiabatycznej gazu w układzie (P,v).

Jeżeli równanie (I) skojarzy się z równaniem

$$i_0 = i_1 + A\frac{w_{m_1}^2}{2\mu} = i + A\frac{w_m^2}{2\mu} \tag{e}$$

wyrażającym entalpię spoczynkową oraz z równaniami (2) i (3) to zależność (I) przyjmuje postać prostszą:

$$P = \frac{RT_0}{v} - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa\mu} BCv. \tag{Ia}$$

W przypadku nieodwracalnego przepływu pole pracy technicznej w układzie (P,v) wyraża sumę pracy tarcia i przyrostu energii kinetycznej:

$$-v\,dP = dl_f + d\frac{w_m^2}{2\mu} \tag{5}$$

Zamierzony cel przejrzystszego przedstawienia pracy tarcia i przyrostu energii kinetycznej w układzie (P,v) osiąga się umieszczając pole pracy technicznej p o d l i n i ą p r z e m i a n o w ą. Ponieważ pole pracy technicznej w ogólności jest różne od pola pracy bezwzględnej, przeto linia ograniczająca od dołu pole pracy technicznej nie będzie pokrywała się z osią objętości właściwej.

Powyższe spostrzeżenie zapisać można w postaci różniczkowej

$$-v\,dP = (P + \Delta P')\,dv \tag{5a}$$

Różniczkę zupełną dP wyznacza się z równania [Ia]

$$dP = -\left(\frac{RT_0}{v^2} + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa\mu}BC\right)dv - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa\mu}Bv\,dC \tag{6}$$

Po wprowadzeniu równań (Ia), (6) do równania (5a) otrzymuje się równanie linii

$$\Delta P' = \frac{\varkappa-1}{\varkappa\mu}BCv + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa\mu}Bv^2\frac{dC}{dv} \tag{II}$$

ograniczającej od dołu pole pracy technicznej.

Część pola pracy technicznej stanowi pracę tarcia, co można zapisać w postaci równania różniczkowego

$$dl_f = (P - \Delta P'')\,dv \tag{7}$$

lub

$$dq_f = A\,(P - \Delta P'')\,dv \tag{7a}$$

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki

$$dq_f = di - Av\,dP \tag{8}$$

Po zróżniczkowaniu równania (4) otrzymuje się

$$di = -\frac{A}{\mu}BCv\,dv - \frac{A}{2\mu}Bv^2\,dC \tag{9}$$

Z równania (7a), po wstawieniu równania (Ia), (6), (8), (9) wyznacza się wielkość

$$\Delta P'' = \frac{BCv}{\varkappa\mu} + \frac{Bv^2}{2\varkappa\mu}\frac{dC}{dv} = \frac{\Delta P'}{\varkappa-1} \tag{III}$$

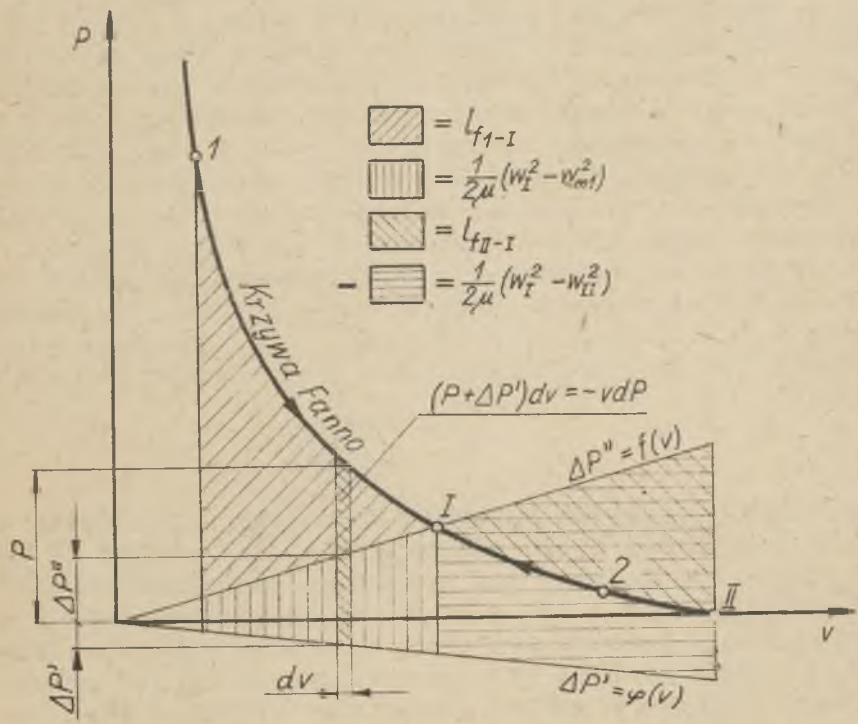
Przy założeniu, że stosunek C nie zmienia się $(\frac{dC}{dv}=0)$ oraz, że $C = 1$ (jak się to przyjmuje we wszystkich zastosowaniach krzywej Fanno), równania (Ia),(II),(III) przyjmują postać prostszą

$$p = \frac{RT_0}{v} - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa\mu} Bv \qquad (I')$$

$$\Delta P' = \frac{\varkappa-1}{\varkappa\mu} Bv \qquad (II')$$

$$\Delta P'' = \frac{Bv}{\mu} \qquad (III')$$

W tym przypadku wielkości $\Delta P'$ i $\Delta P''$ zmieniają się prostoliniowo z objętością właściwą v (rys. 2).



Rys. 2. Krzywa Fanno w układzie (P,v) z zaznaczeniem pracy tarcia i przyrostu energii kinetycznej

Na rysunku 2 jest widoczne, że pole elementarnej pracy tarcia maleje z rosnącą objętością właściwą i w punkcie I przyjmuje wartość zero, gdyż $\Delta P_I = P_I$. Jest to punkt izentropowy, gdyż wolna od tarcia przemiana adiabatyczna przebiega przy stałej wartości entropii. Punkt I określa parametry termiczne czynnika gazowego w przekroju końcowym przewodu rurowego. Gdyby się bowiem założyło dalszą ekspansję czynnika w przewodzie o tej samej średnicy, to, jak widać z wykresu, praca tarcia musiałaby być ujemną, co oczywiście jest niemożliwe.

Krzywa przemianowa ma zatem dwie gałęzie dotyczące tej samej temperatury spoczynkowej T_0. Pierwsza, to ekspansja gazu przebiegająca od punktu 1 do punktu osobliwego I. Na pozostałej części krzywej może zachodzić jedynie kompresja gazu od dowolnego punktu 2 do punktu I.

Lewa gałąź krzywej zaczyna się w punkcie 0 (nie uwidocznionym na rys. 2). Punkt ten określa stan gazu przy dolocie do przewodu rurowego. Parametry w tym przekroju są identyczne z parametrami czynnika będącego w zbiorniku (rys. 1a) w stanie spoczynku $\omega_0 = 0$. Z równania ciągłości (2) wynika, że przy skończonej wartości G^* natężenia przepływu i skończonej wartości F przekroju, objętość właściwa v_0 musi być równa zeru, a tym samym $p_0 = \infty$, jeżeli prędkość ω_0 w przekroju dolotowym ma być równa zeru.

Prawa gałąź krzywej zaczyna się w punkcie II przy ciśnieniu $p_{II} = 0$ i objętości właściwej v_{II}. Dla tego punktu równanie [2] przy założeniu, że $C_{II} = 1$ można napisać w postaci

$$B = \frac{\omega^2_{m\,max}}{v^2_{II}} \tag{2b}$$

Zasilanie przewodu rurowego musiałoby się odbywać za pomocą doskonałej dyszy adiabatycznej dołączonej do zbiornika (rys. 1). W dyszy tej musiałoby zachodzić rozprężenie gazu do ciśnienia $p = p_{II} = 0$ i objętości właściwej $v = v_{II}$. W przekroju wylotowym tej dyszy gaz posiadałby prędkość $\omega_{m\,max}$. Osobliwością tej dyszy jest to, że jej przekrój wylotowy posiada wielkość skończoną. Strumień gazu po opuszczeniu dyszy porusza się w próżni bez jakichkolwiek strat, gdyż wszystkie drobiny gazu poruszają się z jednakową prędkością molarną (prędkość molekularna jest równa zeru, $T = 0$) po torach prostoliniowych, równoległych do siebie. Tak uporządkowany strumień gazu wprowadza się do przewodu rurowego (rys. 1b), którego przekrój dolotowy F równy jest przekrojowi wylotowemu wspomnianej dyszy. I dlatego założenie $C_{II} = 1$ jest słuszne.

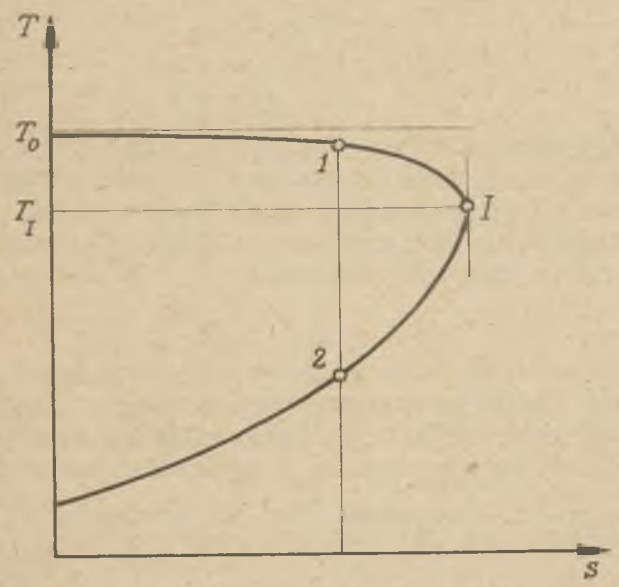
W dyszy doskonałej gaz osiągnąłby prędkość $w_{m_{max}}$ po całkowitej zamianie entalpii spoczynkowej i_o (równanie [e]) na energię kinetyczną.

Maksymalną energię kinetyczną strumienia w układzie (P, v) wyraża pole zawarte między liniami $\Delta P', \Delta P''$ (rys.2) ograniczone objętościami właściwymi $v_o = 0$ oraz v_{II}.

Po zastosowaniu równań [2a] i [e] otrzymuje się wzór:

$$v_{II}^2 = \frac{2\mu\, c_p\, T_o}{A\,B} \tag{10}$$

To, że krzywa Fanno w układzie (P, v) osiąga oś odciętych przy wartości $v_{II} < \infty$, znajduje wyraźne uzasadnienie w wykresie (T, s) (rys. 3), gdzie dolna gałąź krzywej Fanno po przecięciu izentropy wychodzącej z punktu 1 szybko od niej odbiega w kierunku mniejszych objętości właściwych. Poniżej punktu przecięcia 2 dla każdej dowolnej temperatury objętość właściwa na krzywej Fanno jest mniejsza od objętości właściwej na izentropie.



Rys. 3. Krzywa Fanno w układzie (T, s)

4. Stosunek kwadratów prędkości C

Dla obliczenia stosunku C wykorzystuje się równania

$$F\omega_v = \int_0^F \omega \, dF \tag{11}$$

oraz

$$F\omega_v \, \omega_m^2 = \int_0^F \omega^3 \, dF \tag{12}$$

Równaniem (11) zanotowano, że natężenie przepływu obliczone za pomocą średniej prędkości objętościowej ω_v jest równe sumie natężeń przepływu strug elementarnych czynnika, których prędkość rzeczywista wynosi ω. Natomiast równanie (12) podkreśla, że energia kinetyczna strumienia w danym przekroju przewodu rurowego obliczona za pomocą średniej prędkości masowej ω_m jest równa sumie energii kinetycznej strug elementarnych.

Po wyznaczeniu z równania (11) i (12) wielkość ω_m^2 i ω_v^2 dla stosunku C otrzymuje się równanie

$$C = F^2 \frac{\int_0^F \omega^3 \, dF}{\left(\int_0^F \omega \, dF\right)^3} \tag{13}$$

Dla przepływu ustalonego, wolnego od wszelkich zakłóceń bryła prędkości w kanale kołowym jest bryłą obrotową. Po przyjęciu, że bryła prędkości jest paraboloidą n-tego stopnia, można określić granice, w których teoretycznie może się mieścić wartość stosunku C. W takim przypadku

$$\omega = \omega_{os} \left(1 - \rho^n\right) \tag{14}$$

gdzie

ω_{os} - prędkość płynu w osi przewodu,

ρ - stosunek promienia r pierścieniowego przekroju elementarnego do promienia $\frac{d}{2}$ przewodu rurowego.

Po wprowadzeniu równania (14) do równania (13) i po dokonaniu całkowania od $\rho = 0$ do $\rho = 1$ otrzymuje się następujący wzór:

$$C = \frac{1 - \frac{6}{n+2} + \frac{6}{2n+2} - \frac{2}{3n+2}}{1 - \frac{6}{n+2} + \frac{12}{(n+2)^2} - \frac{8}{(n+2)^3}} \tag{15}$$

Z równania tego wynika, że stosunek C zdąża do jedności dla $n = 0$ i $n = \infty$. Dla $0 < n < \infty$ stosunek C przyjmuje wartości większe od jedności. Jeżeli przepływ laminarny odbywa się w kanale o przekroju kołowym przy parabolicznym profilu prędkości, to $n = 2$ i $C = 2$. Ponadto stosunek C nie może przyjmować wartości mniejszych od jedności pod warunkiem, że w całym przekroju przepływ odbywa się tylko w jednym kierunku.

Rozważania w rozdziale 3 były oparte na założeniu, że stosunek C kwadratów prędkości jest wielkością niezmienną i ma wartość jeden. Założenie to nie jest słuszne, gdyż stosunek C podczas przepływu gazu w przewodzie zmienia się wskutek zmiany profilu prędkości. Zależność stosunku C kwadratów prędkości od objętości v i temperatury T gazu ujmuje równanie

$$\frac{dC}{dv} = -\frac{2C}{v} - \frac{C}{T_0 - T}\frac{dT}{dv} \tag{16}$$

Równanie to jest wynikiem skojarzenia równań (a), (b), (c), (d), (e), (1), (2), (3), (6) i (Ia).

W przekroju 0 i w przekroju II (rys. 1) stosunek C ma wartość $C_0 = C_{II} = 1{,}00$ z powodów, które były przytoczone poprzednio.

W przekroju wylotowym I (rys. 1) musi wystąpić prędkość dźwięku, która zależy tylko od temperatury T_0 (bez względu na to czy przemiana ekspansji realizowana jest w adiabatycznej dyszy, czy też w adiabatycznym przewodzie rurowym). Prędkość dźwięku w przekroju końcowym odpowiada temperaturze

$$T_I = \frac{2}{\varkappa + 1} T_0 \tag{17}$$

W celu określenia stosunku C korzysta się z równania (16). Linia przemianowa w punkcie I jest styczna do izentropy (rys. 3). Dla izentropy można napisać

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_s = -(\varkappa - 1)\frac{T}{v} \tag{f}$$

Jeżeli zastosuje się równanie (f) do punktu I i podstawi do równania (16), to otrzyma się

$$\left(\frac{dC}{dv}\right)_I = \frac{C_I}{v_I}\left[\frac{T_I}{T_0 - T_I}(\varkappa - 1) - 2\right] \tag{16a}$$

Po wykorzystaniu równania (17) z równania (16a) wynika, że

$$\left(\frac{dC}{dv}\right)_I = 0 \tag{16b}$$

Drugą pochodną funkcji C w miejscu I na podstawie równania (16) i równania (f) wyraża wzór

$$\frac{d^2 C}{dv^2} = 2\frac{C}{v^2} - \frac{C}{T_0 - T}\frac{d^2 T}{dv^2} - \frac{C}{(T_0 - T)^2}\cdot(\varkappa - 1)^2\frac{T^2}{v^2} \qquad (18)$$

Jeżeli przyjmie się, że w punkcie osobliwym I linia przemianowa jest styczna do krzywej Fanno, dla której $C = C_I =$ = idem, to przybliżoną wartość drugiej pochodnej temperatury względem objętości właściwej [na podstawie równania (16a)] wyraża wzór

$$\left(\frac{d^2 T}{dv^2}\right)_I \approx -\frac{2}{v_I^2}\left[T_0 - T_I\right] = \left(\frac{d^2 T}{dv^2}\right)_{F_I} \qquad (19)$$

Po podstawieniu równania (17) i równania (19) do równania (18) otrzymuje się dla punktu osobliwego I

$$\left(\frac{d^2 C}{dv^2}\right)_I = 0 \qquad (20)$$

Wynikałby stąd wniosek, że funkcja $C = f(v)$ w punkcie osobliwym I posiada punkt przegięcia.

Jeżeli jednak przyjmie się, że $C = 1$ jest warunkiem, bez którego nie ma przepływu beztarciowego, to w punkcie osobliwym I może wystąpić tylko minimum wartości C, to jest

$$C_I = 1 \qquad (21)$$

[Wartość ta wynika również z równania (15) po zastosowaniu $n = \infty$]

Wniosek więc wysnuty z równania (20) zdaje się być niesłuszny, a to dlatego, że wyznaczenie drugiej pochodnej określonej równaniem (19) nie jest ścisłe.

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja $C = f(v)$ przyjmuje wartość $C = 1$ w przekrojach 0 i II przewodu rurowego, w którym płynie gaz doskonały. Rozważania powyższe dotyczą tego przypadku, gdy rurociągiem płynie maksymalna ilość substancji.

Zmienność stosunku C między przekrojami 0 - I i II-I będzie przedmiotem następnej rozprawy. Zakres rozważań zostanie rozszerzony również na gazy rzeczywiste.

Otrzymano 20 kwietnia 1957 r.