ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 19 Energetyka z. 3 1958

WITOLD OKOŁO-KUŁAK
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

KRYTERIA PODOBIEŃSTWA CIEPLNEGO W PRZYPADKU KONWEKCJI NATURALNEJ

W artykule wykazano, że przyjmowanie tzw. wielkości charakterystycznych, potrzebnych przy obliczaniu kryteriów podobieństwa nie może być dowolne, jeśli równanie kryterialne ujmujące wymianę ciepła ma być jednoznaczne. Dobieranie wielkości charakterystycznych powinno być oparte na dokładnej analizie równań różniczkowych opisujących stronę fizyczną rozważanych zjawisk. Postać równań kryterialnych nie może w żadnym wypadku zależeć od umownie przyjętych wielkości. Warunek ten będzie spełniony tylko w tym przypadku, gdy kryteria podobieństwa będą poprawnie określone, a wielkości charakterystyczne występujące w tych kryteriach będą dobrane w oparciu o równania różniczkowe.

1. Wstęp

Rozpatrując zjawisko wymiany ciepła w przypadku konwekcji naturalnej zachodzącej na zewnętrznej powierzchni rury pionowej napotykamy pewną niejasność. Niejasność ta polega na kwestii doboru tzw. charakterystycznego wymiaru liniowego, występującego w liczbie Grashoffa Gr:

$$Gr = \frac{l^3 \cdot g \cdot \beta \cdot \Theta}{\nu^2}$$

gdzie:

l m - charakterystyczny wymiar liniowy,
g m/sec^2 - przyspieszenie ziemskie,
β grd^{-1} - współczynnik rozszerzalności objętościowej,
Θ grd - różnica temperatur pomiędzy ścianką zewnętrzną rury i strugą czynnika w pewnej odległości od ścianki,
ν m^2/sec - kinematyczny współczynnik lepkości.

W przypadku, gdy wymiana ciepła odbywa się pomiędzy rurą pionową o średnicy d i wysokości H i otoczeniem powstaje zagadnienie, który wymiar liniowy należy uważać za charakterystyczny, średnicę rury czy jej wysokość?

Niektórzy autorzy biorą w tym przypadku wysokość [5 str. 173 2 str. 184] motywując to tym, że przypadek konwekcji swobodnej dla rury pionowej jest bardzo zbliżony do zjawiska wymiany ciepła pomiędzy płaską ścianą pionową i płynem. Inni autorzy biorą w tym przypadku średnicę rury [4 str. 77]. Oczywiście również i w liczbie Nusselta Nu w tym przypadku należy brać średnicę jako charakterystyczny wymiar liniowy. Lecz wtedy obliczenie współczynnika wnikania ciepła staje się zupełnie niezależne od wysokości, co w sposób oczywisty koliduje z sensem fizycznym warstwy granicznej Prandtla, bowiem warstwa ta, jak to widać wyraźnie na zdjęciach smugowych [4 str. 70] zwiększa swą grubość i zmienia swój charakter (z uwarstwionego na przejściowy a następnie burzliwy) w zależności właśnie od wysokości rury pionowej, a nie średnicy.

2. Dobór wielkości charakterystycznych

W celu rozstrzygnięcia kwestii, który z wymiarów d czy H należy wprowadzić do liczby Grashoffa, weźmy pod uwagę równanie różniczkowe ruchu uwarstwionego cieczy nieściśliwej, tzw. równanie Naviera-Stokesa. Równanie to we współrzędnych walcowych ma postać [1 str. 44] [9 str. 261]

$$-g\frac{\partial}{\partial z}\left(H+\frac{p}{\gamma_c}\right)+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w_z}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right]=\frac{dw_z}{d\tau}\quad(\alpha)$$

W równaniu powyższym zupełny iloraz różniczkowy po prawej stronie znaku równości oznacza

$$\frac{dw_z}{d\tau}=\frac{\partial w_z}{\partial\tau}+w_r\frac{\partial w_z}{\partial r}+w_\varphi\frac{\partial w_z}{r\cdot d\varphi}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}$$

W przypadku ruchu ustalonego w czasie $\frac{\partial w_z}{\partial\tau}=0$. Ponadto wykluczamy możliwość przepływu cieczy w kierunku promieniowym ($w_r=0$) oraz w kierunku obwodowym ($w_\varphi=0$). Dla tych założeń wspomniany zupełny iloraz różniczkowy uprości się do postaci

$$\frac{dw_z}{d\tau}=w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}$$

W dalszym ciągu precyzujemy znaczenie wyrazu $(H + \frac{P}{\gamma_c})$. Ponieważ $P = \gamma_{oc}(H - z)$, gdzie γ_{oc} oznacza ciężar właściwy cieczy w osi rury, H - całkowitą wysokość rury, a z współrzędną w kierunku pionowym, wyrażenie pierwsze w równaniu (α) można przedstawić następująco:

$$-g\frac{\partial}{\partial z}\left(H + \frac{\gamma_{oc}(H_o - z)}{\gamma_c}\right) = -\frac{g}{\gamma_c}\frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma_c \cdot z + \gamma_{oc}(H_o - z)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\rho}(\gamma_c - \gamma_{oc}) = \frac{1}{\rho}(\gamma_{oc} - \gamma_c) = \frac{\gamma_c}{\rho}\left(\frac{\gamma_{oc}}{\gamma_c} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\gamma_c\left(\frac{v_c}{v_{oc}} - 1\right) = g\,\frac{v_c - v_{oc}}{v_{oc}} = g\,\frac{\Delta v}{v} = g \cdot \beta \cdot \theta$$

Ostatnie przekształcenie wynika z następującej zależności: przyrost objętości Δv można wyrazić jako iloczyn objętości v, objętościowego współczynnika rozszerzalności β i przyrostu temperatury θ:

$$\Delta v = v \cdot \beta \cdot \theta, \qquad \text{a stąd} \qquad \frac{\Delta v}{v} = \beta \cdot \theta$$

Jeśli jeszcze weźmiemy pod uwagę, że zachodzi następująca zależność $\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} = 0$, to równanie Naviera-Stokesa dla rozważanego przypadku przyjmie następującą postać:

$$g \cdot \beta \cdot \theta + \nu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) = w_z\,\frac{\partial w_z}{\partial r}. \qquad (1)$$

Sens fizyczny powyższego równania można ująć następująco: siły wyporu spowodowane różnicą ciężarów właściwych $(g \cdot \beta \cdot \theta)$ są w równowadze z siłami bezwładności $(w_z \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z})$ i oporami lepkości

$$\nu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)$$

Równanie Naviera-Stokesa wyprowadzone dla warunku równowagi sił dotyczy w zasadzie przepływu izotermicznego. Ponieważ przyczyną wyporu są różnice temperatur, powstaje kwestia, czy wolno tego równania użyć również i dla przepływu nieizotermicznego, z jakim właśnie mamy do czynienia. Ogólną postać równania, słuszną także i w przypadku przepływu nieizotermicznego podaje S. Erk [2, str.144]

$$\rho\,\frac{d\bar{w}}{dt} = \rho \cdot g - \operatorname{grad} p + \eta\,\Delta\,\bar{w} + \frac{1}{3} \cdot \eta \cdot g \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{w}$$

W równaniu powyższym poza znanymi wielkościami występuje jedynie dynamiczny współczynnik lepkości η oraz gęstość ρ. Oba współczynniki lepkości dynamiczny i ki-

nematyczny są funkcjami temperatury. Z tym właśnie zastrzeżeniem, równanie Naviera-Stokesa jest słuszne również i dla przepływu nieizotermicznego.

Oprócz równania ujmującego warunek równowagi sił, należy także uwzględnić równanie określające zasadę zachowania energii w stosunku do elementarnej masy płynu.

Pomocne tutaj będzie tzw. równanie termodynamiczne strugi płynącego czynnika znane również pod nazwą równania Fouriera-Kirchhoffa [4 str. 44]

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \cdot \Delta t$$

w równaniu powyższym oznaczają

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z}$$

a m^2/sec - współczynnik przewodzenia temperatury,

Δ - operator Laplace'a.

W przypadku przepływu ustalonego w czasie $(\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0)$ po wprowadzeniu współrzędnych walcowych i pominięciu wyrażeń zawierających w_r, w_φ, równanie Fouriera-Kirchhoffa przyjmuje postać

$$w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right) \qquad (2)$$

Równanie powyższe umożliwia wyznaczenie kryterium (sprawdzianu) podobieństwa termodynamicznego dla rozważanego przypadku. W celu wyznaczenia powyższego kryterium skorzystamy z tego faktu, że w przypadku zjawisk termodynamicznie podobnych odpowiednie profile wielkości zredukowanych muszą być identyczne. Przez profil zredukowany wielkości rozumie się wykres

$$\frac{w}{w_0} = f\left(\frac{u}{u_0}\right)$$

W równaniu powyższym W oznacza dowolną wielkość fizyczną, która tworzy interesujące nas w danym przypadku pole (np. temperatura w równaniu Fouriera-Kirchhoffa, prędkość w równaniu Naviera-Stokesa, itp.). W_0 oznacza tę samą wielkość w pewnym szczególnym miejscu (lub określoną inaczej, jednak w sposób jednoznaczny), natomiast u przedstawia współrzędną (x, y, z dla prostokątnego układu, r, φ, z dla walcowego układu współrzędnych), u_0 oznacza charakterystyczną wielkość danej współrzędnej.

Jeśli dla zjawisk podobnych profile zredukowanych wielkości fizycznych są identyczne, to dowolny stosunek pochodnych cząstkowych wielkości zredukowanych (W/W_0) odnie-

siony do odpowiednich bezwymiarowych współrzędnych (z/z_o i r/r_o) powinien być taki sam

$$\left[\frac{\partial^2\left(\frac{t}{t_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{r_o}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{r}{r_o}\right)}\frac{\partial\left(\frac{t}{t_o}\right)}{\partial\left(\frac{r}{r_o}\right)}\right]\cdot\frac{\partial\left(\frac{t}{t_o}\right)w_z}{\partial\left(\frac{z}{z_o}\right)w_{z_o}}=\text{idem}$$

W równaniu powyższym wielkości w_{zo}, t_o, r_o, z_o są niezmienne jako tzw. wielkości charakterystyczne. Wyłączając je przed nawias otrzymamy

$$\frac{w_{zo}}{w_z}\cdot\frac{r_o^2}{t_o}\cdot\frac{t_o}{z_o}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=\text{idem}$$

Łącząc ostatnie równanie z zależnością (2) rugujemy wszelkie pochodne cząstkowe. Oznaczając ponadto wartość "idem" przez K_1 otrzymamy

$$K_1=\frac{w_{zo}\cdot r_o}{a}\cdot\frac{r_o}{z_o}=\text{idem}$$

Przyjmując dla uproszczenia jako wielkość charakterystyczną w kierunku promienia $r_o=d$ (średnicę rury), a w miejsce z_o wysokość rury H, otrzymamy ostatecznie

$$K_1=\frac{w_{zo}\,d}{a}\cdot\frac{d}{H}=\text{idem}$$

Ponieważ kryterium $Pe=w_{zo}\cdot d/a$, zatem ostatnią zależność przedstawiamy ostatecznie w następującej formie:

$$K_1=Pe\cdot\frac{d}{H}=\text{idem}$$

Otrzymany wynik wskazuje na to, że kryterium podobieństwa w przypadku przepływu laminarnego wymuszonego lub swobodnego jest iloczyn

$$K_1=Pe\cdot\frac{d}{H}=Re\cdot Pr\cdot\frac{d}{H} \qquad (\beta)$$

Dowodem na to, że tak jest istotnie, są rozliczne wzory, jak np.:

1. Wzór Hausena [5 str. 118]
2. Wzór wynikający z doświadczeń Siebera i Tate'a [5 str. 119]
3. Wzór Pietuchowa [4 str. 98]
4. Wzór wyprowadzony przez Nusselta [2 str. 182, 183]
5. Wzór Graetza otrzymany w r. 1883

Jest rzeczą godną podkreślenia, że kryterium podobieństwa wynikające z równania Fouriera-Kirchhoffa zawiera

dwa wymiary długości: średnicę d i długość lub wysokość rury H. Również rzeczą ważną jest to, że w liczbie Re jako wymiar charakterystyczny znajduje się średnica rury d.

Na marginesie można zaznaczyć, że jest to niewątpliwie najlepszy dowód na to, że metody oparte na wykrywaniu kryteriów podobieństwa za pomocą analizy wymiarowej są niedokładne, albowiem w metodach tych nie ma istotnej różnicy pomiędzy wymiarowo identycznymi wielkościami d i H.

Kryterium K_1 określone za pomocą równania (β) niektórzy nazywają liczbą Graetza.

Równanie termodynamiczne Fouriera-Kirchhoffa ujmuje jedynie stronę cieplną rozważanego zjawiska. Równie wielki wpływ będzie miało równanie określające równowagę sił działających na płyn w ruchu laminarnym. Takim równaniem, jak wspomnieliśmy przedtem, jest równanie Naviera-Stokesa, które w rozważanym przypadku wygodnie jest rozpatrywać w postaci (1). Równanie to umożliwia wykrycie dalszego kryterium podobieństwa. W tym celu poddamy go analogicznej operacji, jak to poprzednio uczyniliśmy w przypadku równania Fouriera-Kirchhoffa. W przypadku podobieństwa dwu zjawisk zredukowane profile prędkości muszą być identyczne.

Podobnie będzie i dla zredukowanych profilów sił - powinny one być takie same. Jak wspomnieliśmy poprzednio, równanie Naviera-Stokesa wyraża istnienie stanu równowagi pomiędzy siłami lepkości, wyporu i bezwładności. Oznacza to, że w przypadkach zjawisk podobnych stosunek dwu dowolnych sił w odpowiednich miejscach pola powinien być taki sam. Rozpatrując zatem ściśle określone miejsce układu, możemy ustalić stosunek sił lepkości do sił wyporu. Stosunek ten dla zjawisk podobnych powinien być niezmienny:

$$\frac{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)\right]}{g\cdot\beta\cdot\Theta}=c_1 \qquad \text{(a)}$$

Z drugiej strony, jak wiemy, wszelkie kombinacje pochodnych wielkości zredukowanych, odniesione do bezwymiarowych współrzędnych, w odpowiednich punktach pola muszą dać takie same wartości, bowiem zjawiska podobne posiadają i d e n t y c z n e profile wielkości zredukowanych.

Weźmy pod uwagę profile zredukowane dwu pól: prędkości i temperatur i utwórzmy następujący stosunek (na podstawie dwu pierwszych wyrażeń równania Naviera-Stokesa)

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{r}{r_0}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial\left(\frac{r}{r_0}\right)}\left(\frac{r}{r_0}\cdot\frac{\partial\left(\frac{w_z}{w_{z0}}\right)}{\partial\left(\frac{r}{r_0}\right)}\right)\right]:\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)=c_2 \qquad \text{(b)}$$

W równaniu powyższym wielkości r_0, w_{z0}, Θ_0 są stałe. Dwa ostatnie równania (b) i (a) dzielimy stronami, w celu wyrugowania zmiennych wielkości w_z, r oraz Θ wraz z pochodnymi cząstkowymi. Prowadzi to do dalszej zależności:

$$\frac{g \cdot \beta \cdot \Theta_0 \cdot r_0^2}{w_{z0} \cdot \nu} = \text{idem} = K_2 \qquad (3)$$

Otrzymaliśmy nową zależność, która musi być spełniona w przypadku zjawisk podobnych. Jak widzimy, po lewej stronie równania (3) występują jedynie wartości stałe, ważne dla ściśle określonego miejsca. W dalszym ciągu należy bliżej określić te wielkości. Niechaj Θ_0 oznacza różnicę temperatur pomiędzy ścianką i temperaturą płynu w znacznej odległości od rury

r_0 - wymiar charakterystyczny w kierunku promienia przyjmiemy oczywiście średnicę rury d; $(r_0 = d)$

w_{z0} - prędkość płynu w kierunku pionowym (oś "z") w odległości np. .

β i ν odniesione do warstwy stykającej się ze ścianką $(r = d/2)$

Nowootrzymany warunek, aby dla zjawisk podobnych było

$$K_2 = \frac{g \cdot \beta \cdot \Theta_0 \cdot d^4}{w_{z0} \, \nu} = \text{idem}$$

wynika bezpośrednio z równań Naviera-Stokesa i jest dalszym kryterium podobieństwa rozpatrywanego zjawiska.

Należy zaznaczyć, że oba kryteria K_1 i K_2 powinny niezależnie jedno od drugiego spełniać warunki

$$K_1 = \text{idem}, \qquad K_2 = \text{idem}$$

aby zaistniało podobieństwo zjawisk. Niestety określenie zarówno jednego z nich, jak i drugiego nie jest możliwe, dopóki nie określi się prędkości płynu w_{z0} w ściśle określonym punkcie. Trudność tę można pokonać, gdy weźmie się pod uwagę iloczyn $K_1 \cdot K_2$:

$$K_3 = K_1 K_2 = \frac{g \cdot \beta \cdot \Theta_0 \cdot d^4}{\nu \cdot a \cdot H} = Gr \cdot Pr \cdot \frac{d}{H} \qquad (4)$$

ponieważ

$$Gr = \frac{d^3 \cdot g \cdot \beta \cdot \Theta_0}{\nu^2} \qquad Pr = \frac{\nu}{a}$$

Jak widzimy z powyższego, jednym z kryteriów podobieństwa zjawisk w rozważanym przypadku konwekcji wzdłuż rury pionowej jest równość iloczynu liczb Gr, Pr i d/H.

Kryterium podobieństwa K_3, jak widzimy, składa się z iloczynu $Gr \cdot Pr$. Wszystkie znane wzory, dotyczące konwekcji naturalnej zawierają wspomniany iloczyn, co jest najlepszym potwierdzeniem słuszności podanych wywodów. Co więcej, rozumowania powyższe wyjaśniają, dlaczego zawsze we wzorach dotyczących konwekcji naturalnej występuje iloczyn $Gr \cdot Pr$. Mówi się bowiem zazwyczaj, że kryterium podobieństwa w przypadku konwekcji naturalnej jest liczba Gr. Jest to, jak widzimy, nieścisłe. Kryteria podobieństwa są dwa: pierwsze z nich jest to $Pe \cdot (d/H)$ (inaczej $Re \cdot Pr \frac{d}{H}$, lub Gz - kryterium Graetza) wynikające z równania termodynamicznego przepływu strugi czynnika, drugim jest $Gr \cdot Pr \cdot \frac{d}{H}$ wynikające z równania hydrodynamicznego przepływu Naviera-Stokesa.

3. Kontrola otrzymanych wyników

W celu przeprowadzenia kontroli rozpatrzymy przypadek szczególny, gdy średnica pionowej rury zdąża do nieskończoności. Ponieważ w tym przypadku mamy do czynienia ze ścianą płaską o wysokości H, oprzemy się na wzorze wyprowadzonym przez Lorenza (1881 r.) [5 str. 172]

$$Nu_m = -A \cdot \sqrt[4]{Pr} \cdot \sqrt[4]{Gr}$$

Jak wykazaliśmy poprzednio, w liczbie Nusselta wymiarem liniowym powinien być wymiar prostopadły do ścianki rury. Jako ten wymiar przyjmujemy średnicę rury d. Po wprowadzeniu w miejsce iloczynu $Gr \cdot Pr$ kryterium podobieństwa, określonego równaniem (4) otrzymamy:

$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = -A \cdot \sqrt[4]{\frac{\nu}{a} \cdot \frac{d^4 \cdot g \cdot \beta \cdot \theta_0}{\nu^2 \cdot H}}$$

Po wyciągnięciu średnicy d spod pierwiastka, stwierdzamy, że średnica ta się upraszcza. Jest to oczywiście słuszne, bowiem dla pionowej ściany płaskiej o szerokości nieskończenie dużej, wynik nie może być zależny od owej szerokości. Gdybyśmy we wzorze powyższym w miejsce d wstawili H, wynik znów pozostałby bez zmiany, jednak w liczbie Nusselta figurowałaby wówczas wysokość - co upraszcza sytuację, eliminuje bowiem wprowadzanie dwu

odrębnych wymiarów liniowych. W obu przypadkach pozostaje faktem, że dla ściany pionowej współczynnik wnikania ciepła jest proporcjonalny do $H^{-1/4}$.

Na marginesie można dodać, że wzór Lorenza może być stosowany również i dla rur pionowych o dużej średnicy. Dla rur o mniejszym stosunku d/H niewątpliwie należałoby wziąć pod uwagę wpływ średnicy na warunki wymiany ciepła.

Zgodnie z rozważaniami dotyczącymi kryteriów podobieństwa dla omawianego przypadku możemy założyć następujące równania:

$$Nu = f\left[\left(Gr \cdot Pr \cdot \frac{d}{H}\right), \frac{d}{H}\right]$$

Ponieważ iloczyn $Gr \cdot Pr \cdot \frac{d}{H}$ jest właśnie kryterium podobieństwa zjawiska wymiany ciepła na drodze konwekcji swobodnej w przypadku rury pionowej.

Zgodnie z wymaganiem, aby wzór miał możliwie najprostszą postać, aproksymujemy powyższą zależność do postaci potęgowej

$$Nu = C \cdot \left(Gr \cdot Pr \cdot \frac{d}{H}\right)^n \cdot \left(\frac{d}{H}\right)^m \qquad (5)$$

Wykładnik potęgi n zależy od charakteru ruchu powietrza. Jak wykazały liczne doświadczenia dla małych wartości liczb Gr ruch jest "pełzający". W tym przypadku $n = 0{,}125$. Dla wyższych wartości Gr ruch przechodzi w zwykłą postać przepływu uwarstwionego i w tym przypadku $n = 0{,}25$. Dla szczelin pionowych przyjmuje się $0{,}2 < n < 0{,}3$. Dla $Gr > 10^9$ Saunders podaje $n = 1/3$, bowiem charakter ruchu jest wówczas burzliwy. We wzorze (5) stosunek d/H występuje ponadto zupełnie niezależnie od kryterium podobieństwa cieplnego $Gr.Pr.\frac{d}{H}$, ponieważ pierwszym warunkiem podobieństwa jest podobieństwo geometryczne, które w przypadku rury pionowej jest określone właśnie za pomocą stosunku d/H. Zgodnie z drugim teorematem podobieństwa, liczba Nu powinna być funkcją wszystkich kryteriów, określających jednoznacznie podobieństwo rozpatrywanego zjawiska fizycznego [4]. Jest rzeczą zrozumiałą, że w przypadku rury poziomej lub ściany pionowej warunek podobieństwa geometrycznego będzie spełniony zawsze, niezależnie od długości w kierunku poziomym, ponieważ w każdym przekroju pionowym prostopadłym do osi rury, lub prostopadłym do ściany pionowej - fizyczny obraz zjawiska powtarza się w identyczny sposób.

Należy jeszcze podkreślić, że wymiarem charakterystycznym, który wprowadzamy do liczb Gr i Nu, jak to wynika z przytoczonych poprzednio wywodów powinien być wymiar średnicy zewnętrznej rury d. Wniosek ten, wynikający z analizy równań różniczkowych opisujących przebieg zjawiska, można potwierdzić na drodze rozumowej: wymiarem decydującym o wielkości sił lepkości jest wymiar prostopadły do ruchu płynu (ściślej o siłach lepkości decyduje gradient prędkości w kierunku normalnym do przepływu masy, jak to wynika z wzoru Newtona). Również i dla zjawiska przewodzenia ciepła w płynie tuż przy ściance rury istotny jest kierunek prostopadły do ścianki. Wymiarem tym jest w obu przypadkach średnica.

Wysokość rury występuje w wyrażeniu d/H, które należy uważać za niezmiennik podobieństwa geometrycznego.

4. Zastosowania otrzymanych wyników

Przytoczone wywody pozwalają na wyciągnięcie praktycznych wniosków dotyczących oceny wyników przeprowadzonych doświadczeń. Weźmy np. pod uwagę prace pomiarowe Saundersa i Caldera [8, str. 77] dotyczące zjawiska wymiany ciepła w dyszach silników rakietowych. Badacze ci podają wzór

$$St = 0{,}0285 \cdot Re^{-0{,}2}$$

który można doprowadzić do postaci

$$Nu = 0{,}0285\, Re^{0{,}8} \cdot Pr$$

Autorzy stwierdzają dalej, że lepszą zgodność wyników otrzymuje się, gdy jako charakterystyczny wymiar liniowy przyjmie się w miejsce średnicy dyszy - odległość od przewężenia dyszy.

Zgodnie z wywodami podanymi w poprzednich rozdziałach, dla ujęcia liczby Re, oddającej stosunek sił bezwładności do sił tarcia należy jednak brać właśnie średnicę. Poza tym jednak należy bezwarunkowo wprowadzić stosunek d/L jako sprawdzian (kryterium) podobieństwa geometrycznego. W przeciwnym wypadku linie przepływu strug czynnika nie będą podobne. Bowiem stosunek d/L, związany z kątem α rozwarcia części rozszerzającej się dyszy ($d/L = 2\,tg\,\alpha$) ma decydujący wpływ na przebieg linii przepływu czynnika, mogąc w granicznym przypadku spowodować oderwanie się strugi czynnika od ścianek dyszy.

Przykładem poprawnej formy wzorów, ujmujących wymianę ciepła w przypadku konwekcji są prace A.G. Romanowa [7, str. 63]. Autor ten badał doświadczalnie proces wymiany ciepła, zachodzący w wypełnionym cieczą zamkniętym z jednej strony kanale, który jest poddany działaniu siły odśrodkowej.

W pracy wspomnianego autora rozróżnia się trzy odmienne strefy ruchu 1) strefa burzliwa, 2) strefa laminarna i 3) obszar przejściowy. Dla każdej z poszczególnych stref podaje się graniczne wartości iloczynów $Gr.Pr$ i to, co jest godne podkreślenia, w zależności od stosunku d/L oraz wzory określające wymianę ciepła w postaci równań kryterialnych

$$(Nu)_d = const.\,(d/L)^a \left[(Gr)_d\, Pr\right]^b \cdot A$$

Jak widać z sugestywnego, wykluczającego omyłki sposobu pisania, zarówno liczba Nu, jak i kryterium Gr są brane ze względu na średnicę d (wiercenia) kanału.

5. Wnioski końcowe

W przeciwieństwie do metod używanych w analizie wymiarowej, a polegających na wyszukiwaniu kryteriów podobieństwa w sposób czysto formalny - w metodzie przedstawionej w poprzednich rozdziałach, polegającej na analizie właściwości podobnych pól wektorowych, skalarowych lub przypadków, gdy oba rodzaje pól są wzajemnie uzależnione jedno od drugiego - cała uwaga koncentruje się na sensie fizycznym rozważanego zjawiska.

Przez podobne pola należy rozumieć takie pola, dla których odpowiadające sobie profilowe wykresy zredukowanych wielkości fizycznych są identyczne.

W celu określenia kryteriów podobieństwa bierze się pod uwagę układ równań różniczkowych opisujących przebieg zjawiska i transformuje się go w ten sposób, aby wprowadzić bezwymiarowe wielkości fizyczne odniesione do zredukowanych (również bezwymiarowych) współrzędnych. W ten sposób dochodzi się do równań różniczkowych określających profilowe wykresy. Po zastosowaniu definicji podobieństwa (tj. że zjawiska podobne posiadają identyczne odpowiadające sobie wykresy profilowe) otrzymuje się w rezultacie warunek, jaki musi być w tym przypadku spełniony.

Warunkiem takim w przypadku konwekcji naturalnej dla zewnętrznego odpływu rury pionowej jest równość kryteriów

$$K = (Gr)_d \cdot Pr \cdot \frac{d}{H}$$

Ostatecznie zatem w rozważanym przypadku jako wymiar długości tzw. charakterystyczny należy przy obliczaniu liczby Gr brać średnicę rury d, a poza tym do obliczeń należy wprowadzić stosunek d/H jako kryterium podobieństwa geometrycznego.

W razie modelowania zjawiska, należy zachować niezależnie od siebie dwa warunki:

1. $$(Gr)_d \cdot Pr \cdot \frac{d}{H} = idem$$

2. $$d/H = idem$$

Spełnienie obu tych warunków zapewnia w konsekwencji

$$(Gr)_d \cdot Pr = idem$$

Otrzymano 27 kwietnia 1957 r.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Broszko, Hydromechanika, cz. I, Warszawa 1953, PWN.

[2] M. Gröber - S. Erk, Die Grundgesätze der Wärmeübertragung, Berlin 1933.

[3] T. Hobler, Ruch ciepła i wymienniki, Warszawa 1953, PWT

[4] М.А. Михеев, Основы теплопередачи, Госэнергоиздат., 1956 М.-Л.

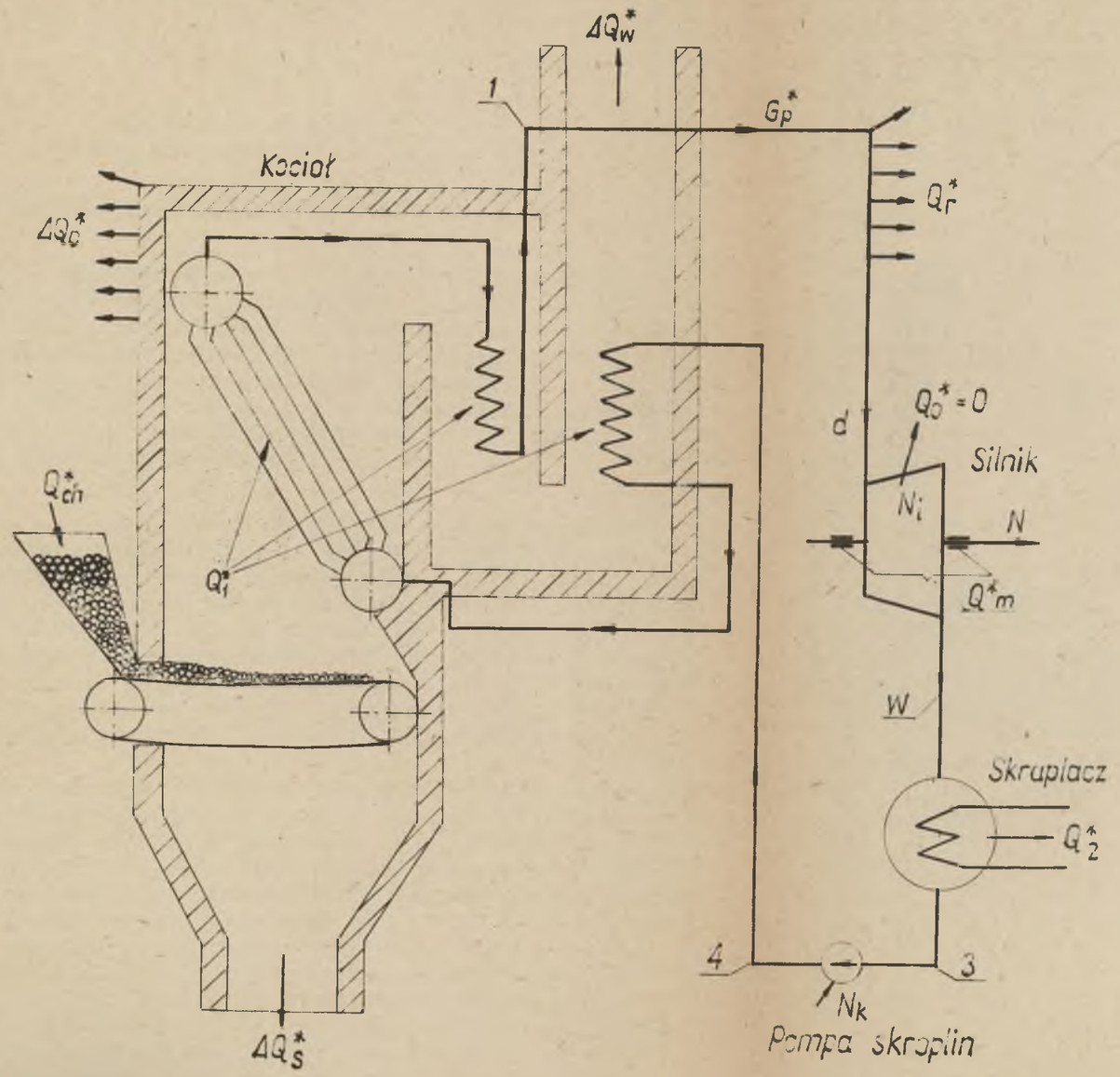
[5] S. Ochęduszko, Teoria Maszyn Cieplnych, cz. III, Warszawa 1955, PWT.

[6] L. Prandtl, Dynamika przepływów, Warszawa 1956, PWN.

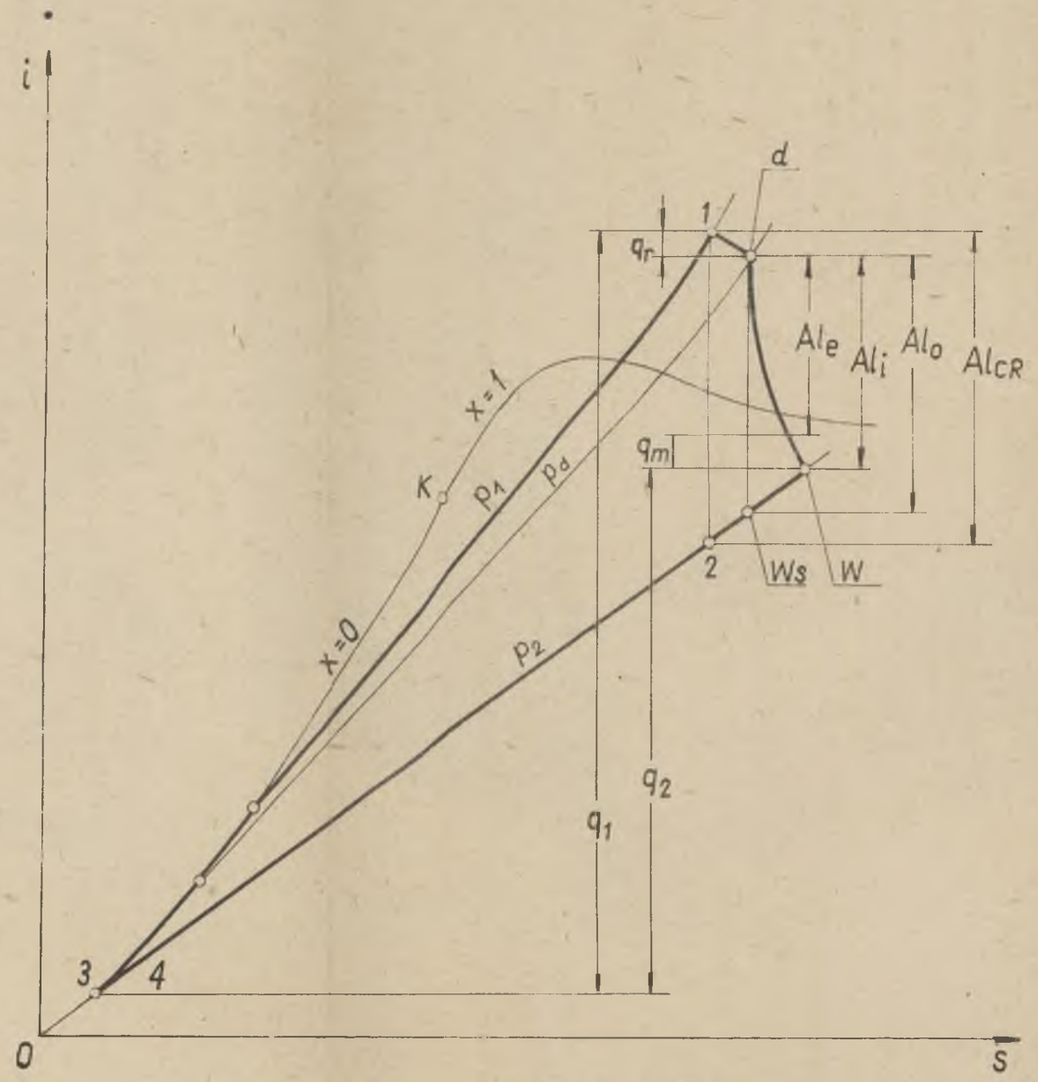
[7] А.Г. Романов, Исследование теплообмена в глухом канале в условиях естественной конвекции, Изд. А.Н., О.Т.Н. 1956/6, стр. 63.

[8] O.A. З а у н д е р с, Т. К а л ь д е р, Теплообмен в сопле при сверхзвуковых скоростях, "Вопросы ракетной техники", 1/54, стр. 70.

[9] A.T. T r o s k o l a ń s k i, Hydromechanika techniczna, tom I, Warszawa 1951, P.W.T.


ΔQ*w
1
Gp*
Kocioł
Qr*
ΔQo*
Qo*=0
d
Silnik
Qch*
Ni
N
Qi*
Q*m
W
Skraplacz
Q*2
4
3
Nk
Pompa skroplin
ΔQ*s

Rys. 1


i
d
1
qr
Ale
Ali
Alo
AlcR
x=1
K
p1
pd
qm
2
Ws
W
x=0
p2
q2
q1
3
4
0
s

Rys. 2