AUTOMATYKA z. 29

P. 3341/74

ERNEST CZOGAŁA

REAKCJA GIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH NA PRZESTRZENNO-CZASOWE POLA LOSOWE

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 430 – GLIWICE 1974

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 430

ERNEST CZOGAŁA

P. 3341/74

REAKCJA CIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH NA PRZESTRZENNO-CZASOWE POLA LOSOWE

GLIWICE 1974

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Stanisław Malzacher

SEKRETARZ REDAKCJI

Józef Chmielowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 80+170 Ark. wyd. 5,25 Ark. druk. 6,13 Papier offset. kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 5.6.1974 Podpis. do druku 8.10.1974 Druk zakoń. w listopadzie 1974
Zam. 87 74/75 Cena zł 8,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PJ-1/75

SPIS TREŚCI

Str.

WSTĘP 5

1. METODY KORELACYJNE I SPEKTRALNE 9

1.1. Analiza korelacyjna i spektralna liniowych układów ciągłych 9

1.1.1. Równania opisujące matematyczne modele fizycznych i technicznych liniowych układów ciągłych. Warunki początkowe i brzegowe 9

1.1.2. Matematyczne modele wymuszeń losowych 16

1.1.3. Empiryczne modele wymuszeń losowych 19

1.1.4. Podstawowe zależności pomiędzy charakterystykami wejściowymi pól losowych i wyjściowych 21

1.1.5. Metody badania reakcji ciągłych układów pobudzanych przestrzenno-czasowymi polami losowymi 24

1.2. Metody korelacyjne i spektralne badania reakcji nieliniowych układów ciągłych 58

1.2.1. Nieliniowe równania wyjściowe opisujące modele układów ciągłych 58

1.2.2. Linearyzacja równań opisujących układy ciągłe .. 59

1.2.3. Metody wyznaczania reakcji nieliniowych powłok na przestrzenno-czasowe pola losowe 62

1.2.4. Metoda badania nieliniowych płyt na wymuszenie losowe 74

2. METODY RÓWNAŃ KINETYCZNYCH FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa 79

2.1. Analiza drgań nieliniowych ciągłych układów dynamicznych metodą równań FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa 79

2.2. Badanie drgań nieliniowych powłok metodą równań kinetycznych FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa 81

Str.

3. METODY QUASISTATYCZNE W ANALIZIE UKŁADÓW CIĄGŁYCH 86

3.1. Drgania belki sprężystej o losowej sztywności zginania 87

UWAGI KOŃCOWE 90

LITERATURA CYTOWANA W PRACY 93

WSTĘP

W ostatnich latach, w związku z głębszym poznaniem teorii pól losowych okazało się, że opisy i rozwiązania deterministyczne stanowią zbyt dużą idealizację i nie odzwierciedlają złożonej struktury rzeczywistych zjawisk zachodzących w układach dynamicznych. Próby rejestracji tych zjawisk i badanie ich metodami klasycznymi, opartymi zasadniczo na analizie harmonicznej, były niezwykle pracochłonne i mało efektywne. Wskutek realnych potrzeb wielu gałęzi techniki, a zwłaszcza radiotechniki, automatyki, mechaniki, lotnictwa, techniki rakietowej i innych, powstała nowa dziedzina na pograniczu tych działów techniki i matematyki stosowanej zwana dynamiką statystyczną, której aparatem matematycznym jest teoria prawdopodobieństwa. Analiza zachowania się układów dynamicznych, zarówno dyskretnych jak i ciągłych pod działaniem pobudzeń losowych stanowi jeden z podstawowych problemów dynamiki statystycznej. Badanie reakcji ciągłych układów dynamicznych zwanych też układami o stałych rozłożonych na pobudzenia w postaci przestrzenno-czasowych pól losowych jest przedmiotem rozważań niniejszej pracy. Szczegółowej analizie poddano podstawowe ciągłe układy mechaniczne, które mogą być m.in. potraktowane jako pobudzane losowo elementy pewnych urządzeń automatyki.

Metody dynamiki statystycznej można podzielić na trzy zasadnicze grupy. Grupę pierwszą stanowią metody korelacyjne i spektralne, opierające się na wykorzystaniu związków między wartościami oczekiwanymi, funkcjami korelacyjnymi wejściowych pól losowych (np. obciążeń, wymuszeń kinematycznych) oraz wyjściowych pól losowych (np. przemieszczeń, naprężeń). Grupa druga oparta jest na równaniach kinetycznych FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa, pozwalających na bezpośrednie wyznaczenie gęsto-

ści prawdopodobieństwa wyjściowych pól losowych. Do grupy trzeciej należą tzw. metody quasistatyczne, opierające się na elementarnej teorii prawdopodobieństwa.

W ostatnim okresie ukazało się wiele prac dotyczących zastosowań metod korelacyjnych i spektralnych do analizy reakcji ciągłych układów mechanicznych. Metody te okazują się szczególnie efektywne w zastosowaniu do badania stacjonarnych jak i niestacjonarnych pól losowych w ciągłych układach liniowych. VAN LEAR i UHLENBECK [14] jako pierwsi analizowali reakcję struny i prętów sprężystych na pobudzenia losowe. Bardziej szczegółową analizę podstawowych układów ciągłych jak pręty i płyty pod wpływem obciążeń losowych podał ERINGEN [14]. Prace DYER [7] [8] zawierają ogólną teorię wyznaczania reakcji liniowych ciągłych układów sprężystych. Te pierwsze prace jak i prace [11], [24], [25], [26] zakładały stacjonarność i jednorodność rozpatrywanych pól losowych stosując do ich badania metodę spektralną. Oryginalną metodę opartą na wykorzystaniu funkcji charakterystycznych podał KNOWLES [20] w zastosowaniu do prętów sprężystych. Znacznie mniejszą liczbę prac poświęcono niestacjonarności reakcji układów dynamicznych spowodowanej skończonym czasem działania wejściowego pola losowego. Zagadnienie niestacjonarnej reakcji ciągłego układu sprężystego poddanego stacjonarnemu wymuszeniu było poruszane przez NIKOŁAJENKO [23] oraz przez autora niniejszej pracy [10]. Problem niestacjonarnej reakcji na niestacjonarne wymuszenie przypadkowe porusza TYLIKOWSKI [36]. Uogólnieniem tych zagadnień są rozważania autora w niniejszej pracy traktujące o tzw. probabilistycznym przejściu przez rezonans w liniowych ciągłych układach mechanicznych.

Jeszcze mniejsza liczba prac jest poświęcona zastosowaniu teorii pól losowych w nieliniowych układach ciągłych. Napotyka się tutaj na trudności z powodu braku ogólnej teorii nieliniowych równań cząstkowych, opisujących modele matematyczne ciągłych układów dynamicznych. Istniejące prace z tego zakresu prawie wszystkie dotyczą badania stacjonarnych i jednorodnych pól losowych w nieliniowych układach. Należy tu wymienić głównie prace FEDOROWa [15], LYONa [21], DIMENTBERGa [13] i TYLIKOWSKIego [33].

Na tle wymienionych publikacji widać, że nie są dotychczas w pełni przeanalizowane i rozwiązane, mające znaczenie poznawcze jak i praktyczne, następujące zagadnienia:

a) metody, które pozwalałyby na dostatecznie ogólny, a przy tym jakościowo poprawny, w przejrzystej i zwartej postaci, pogląd na statystyczne charakterystyki stanów niestacjonarnych, pojawiających się przy włączaniu pobudzeń przypadkowych na układy ciągłe,
b) probabilistyczny aspekt przejścia przez rezonans w ciągłych układach liniowych,
c) metody wyznaczania i badania niestacjonarnej reakcji układów ciągłych nieliniowych,
d) probabilistyczne przejście przez rezonans w ciągłych układach nieliniowych,
e) zastosowanie metod quasistatycznych w układach ciągłych.

Analiza powyższych zagadnień stanowi jeden z podstawowych celów niniejszej pracy. Drugoplanowym celem jest usystematyzowane i jednolite przedstawienie poprzednio wymienionych metod badania ciągłych układów, pobudzanych polami losowymi. Znaczenie omówionych w pracy metod wynika z ich bezpośredniego zastosowania nie tylko do analizy ciągłych układów mechanicznych, lecz stanowią one podstawę do rozwiązywania podobnych zagadnień w innych układach ciągłych opisanych analogicznymi równaniami różniczkowymi.

1. METODY KORELACYJNE I SPEKTRALNE

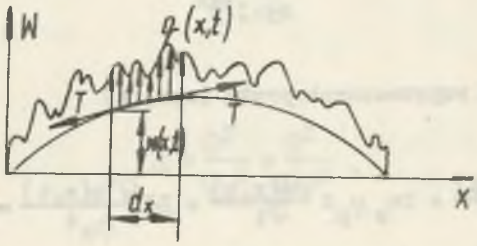
1.1. Analiza korelacyjna i spektralna liniowych układów ciągłych

1.1.1. Równania opisujące matematyczne modele fizycznych i technicznych liniowych układów ciągłych. Warunki początkowe i brzegowe.

Równaniami wyjściowymi obecnych rozważań są liniowe deterministyczne cząstkowe równania dynamiki, opisujące drgania wymuszone następujących układów ciągłych [18]:

a) równanie drgań poprzecznych struny (rys. 1)

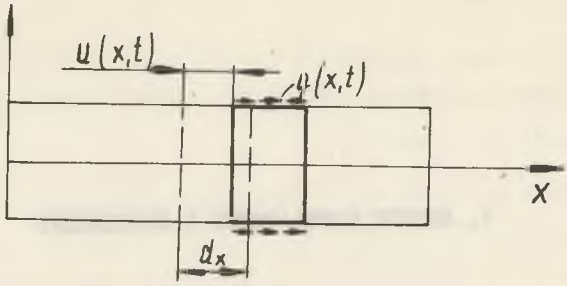
$$\varrho_p A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p A \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t), \qquad (1)$$



Rys. 1

b) równanie drgań podłużnych pręta (rys. 2)

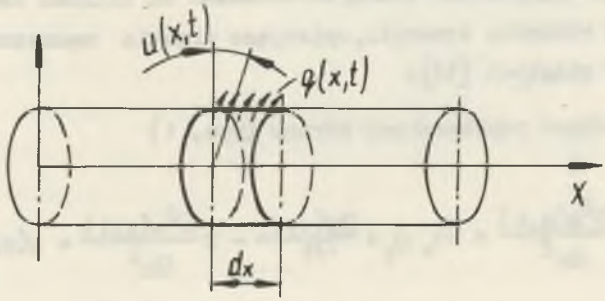
$$\varrho_p A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2n_u \varrho_p A \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t), \qquad (2)$$



Rys. 2

c) równanie drgań skrętnych pręta (rys. 3)

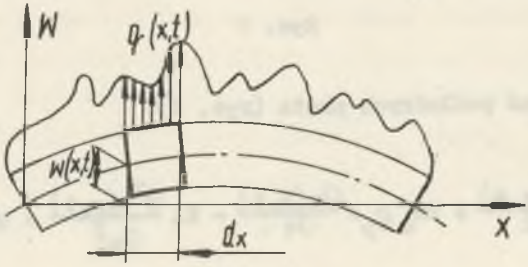
$$\varrho_p J_o \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2n_v \varrho_p J_o \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - GJ_o \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t), \qquad (3)$$



Rys. 3

d) równanie drgań poprzecznych pręta (rys. 4)

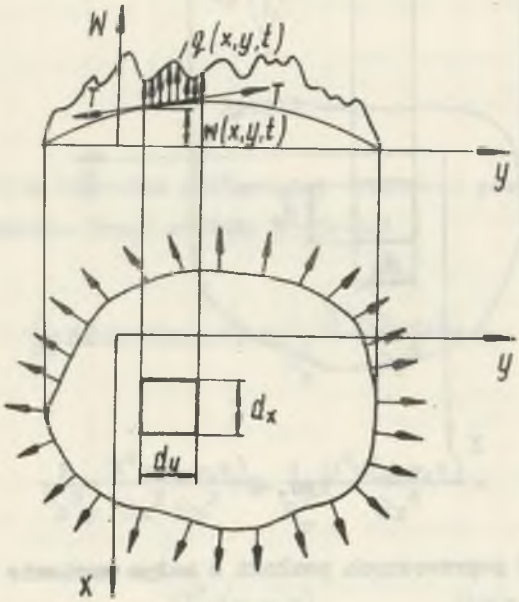
$$\varrho_p A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p A \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = q(x,t), \qquad (4)$$



Rys. 4

e) równanie drgań poprzecznych membrany (rys. 5)

$$\rho_p h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} + 2n_w \rho_p h \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} - T\Delta w(x,y,t) = q(x,y,t) \qquad (5)$$



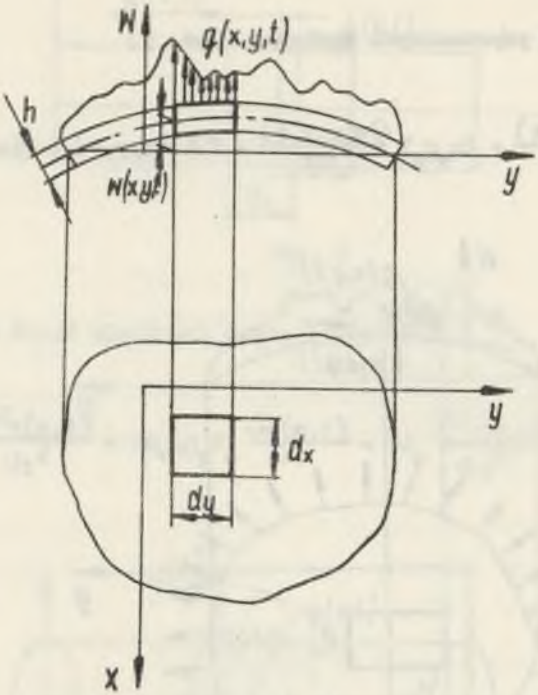
Rys. 5

przy czym

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

f) równanie drgań poprzecznych płyty cienkiej (rys. 6)

$$\rho_p h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} + 2n_w \rho_p h \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} + D\Delta\Delta w(x,y,t) = q(x,y,t) , \qquad (6)$$



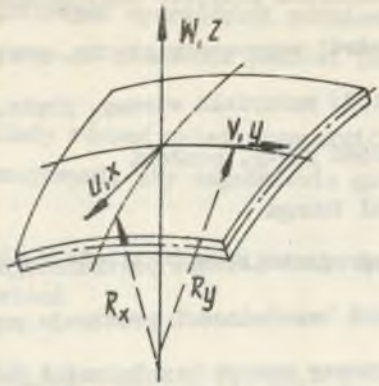
Rys. 6

g) równania drgań poprzecznych powłoki o małym wzniosie (rys. 7)

$$\varrho_p h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} + D\Delta\Delta w(x,y,t) -$$

$$- \frac{h}{R_x} \frac{\partial^2 \Phi(x,y,t)}{\partial y^2} - \frac{h}{R_y} \frac{\partial^2 \Phi(x,y,t)}{\partial x^2} = q(x,y,t),$$

$$\frac{1}{E}\Delta\Delta\Phi(x,y,t) + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} = 0. \qquad (7)$$



Rys. 7

Eliminując funkcję naprężeń powierzchni środkowej powłoki $\Phi(x,y,t)$, uzyskuje się równanie drgań powłoki w postaci

$$\frac{D}{Eh}\Delta\Delta\Delta\Delta w(x,y,t) + \frac{1}{R_x^2}\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial y^4} +$$

$$\frac{2}{R_x R_y}\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{1}{R_y^2}\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^4} =$$

$$= \frac{1}{Eh}\Delta\Delta\left[q(x,y,t) - \varrho_p h\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} - 2n_w\varrho_p h\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}\right], \qquad (8)$$

a w przypadku szczególnym, gdy promienie głównych krzywizn $R_x \to \infty$, $R_y = R = \text{const}$, uzyskuje się z równania (8), równanie drgań poprzecznych powłoki cylindrycznej:

$$\frac{D}{Eh}\Delta\Delta\Delta\Delta w(x,y,t) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^4} = \frac{1}{Eh}\Delta\Delta\left[q(x,y,t) -\right.$$

$$\left. - \varrho_p h\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} - 2n_w\varrho_p h\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}\right]. \qquad (9)$$

W powyższych równaniach przyjęto następujące oznaczenia:

A	- przekrój poprzeczny struny, pręta
ϱ_p	- gęstość materiału struny, pręta, płyty, powłoki
h	- grubość płyty, powłoki
E	- moduł Younga
G	- moduł odkształcenia postaciowego
J	- moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta
J_o	- biegunowy moment bezwładności przekroju pręta
x,y	- współrzędne układu
t	- czas
u,v,w	- składowe przemieszczeń
q,q^j	- obciążenia
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	- sztywność cylindryczna
ν	- liczba Poissona
R_x,R_y,R	- promienie głównych krzywizn powłoki
T	- siła wstępnego naciągu struny, membrany
n_u,n_v,n_w	- współczynniki tłumienia drgań
Φ	- funkcja naprężeń powierzchni środkowej płyty, powłoki.

Równania (7), (8) i (9) są szczególnym przypadkiem układu równań technicznej teorii powłok obrotowych [18] o postaci:

$$L_{11}\, u + L_{12}\, v + L_{13}\, w = q^1 - \varrho_p h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n_u \varrho_p h \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$L_{21}\, u + L_{22}\, v + L_{23}\, w = q^2 - \varrho_p h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2n_v \varrho_p h \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (10)$$

$$L_{31}\, u + L_{32}\, v + L_{33}\, w = q^3 - \varrho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w}{\partial t}$$

Operatory L_{ik} są cząstkowymi operatorami różniczkowymi współrzędnych przestrzennych. Zależą one od geometrii powłoki (cylindrycznej, kulistej, stożkowej) [18].

Powyższe równania i układy równań należy uzupełnić odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi, aby zagadnienie graniczne było poprawnie postawione [22].

Podane wyżej równania można traktować jako przypadek szczególny równań różniczkowych o postaci

$$\sum_i \left[P_i^j(D_t) + \sum_s Q_s^j(D_t)\, L_i^s(\bar{x}, D_{\bar{x}}) \right] u^i(\bar{x},t) = q^j(\bar{x},t) \qquad (11)$$

w obszarze $C^{N+1} = D^N \times \Delta_t \subset E^{N+1}$

gdzie

D_t, $D_{\bar{x}}$ są wielowskaźnikowymi symbolami różniczkowania względem czasu i współrzędnych przestrzennych [22],

$P_i^j(D_t)$, $Q_s^j(D_t)$ są macierzami wielomianów operatorów różniczkowania w czasie stopnia p, q odpowiednio,

$L_i^s(\bar{x}, D_{\bar{x}})$ jest macierzą liniowych operatorów różniczkowych względem współrzędnych przestrzennych,

E^N oznacza N-wymiarową przestrzeń Euklidesa,

D^N oznacza obszar spełniający relację $D^N \subset E^N$,

$\bar{x} = [x^1, \ldots, x^N]$ jest elementem E^N,

$\bar{u}(\bar{x},t) = [u^1(\bar{x},t), \ldots, u^M(\bar{x},t)]$ jest zbiorem funkcji spełniających układ równań różniczkowych (11) dla czasu t należącego do przedziału $\Delta_t = \{t;\ t_0 < t < T\}$.

Przyjmijmy zerowe warunki początkowe:

$$D_t^k\, \bar{u}(\bar{x},t)\Big|_{t=0} = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, l-1 \qquad (12)$$

gdzie

$$l = \max(p,q)$$

oraz jednorodne warunki brzegowe

$$B_j(\bar{x},D_{\bar{x}})\ \bar{u}(\bar{x},t)\Big|_{\partial D^N} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, s \tag{13}$$

gdzie $B_j(\bar{x},D_{\bar{x}})$ jest macierzą liniowych operatorów różniczkowych względem współrzędnych, określonych na brzegu obszaru ∂D^N.

1.1.2. Matematyczne modele wymuszeń losowych

W dalszej części rozważań będziemy przyjmować, że ciągłe układy dynamiczne opisane w punkcie 1.1.1, poddane są działaniu pól losowych tj. prawe strony układu równań (11) są polami losowymi.

Ogólna definicja przestrzenno-czasowego pola losowego

Zanim przystąpimy do wyznaczenia reakcji ciągłych układów dynamicznych pobudzanych polami losowymi, krótko scharakteryzujemy te ostatnie. Jednym z możliwych podziałów pól losowych jest ich sklasyfikowanie na [30]:

1° skalarowe

2° wektorowe

3° tensorowe.

Ponieważ interesujące nas wymuszenia są zasadniczo skalarowymi polami losowymi, przejdziemy do definicji skalarowego pola losowego i jego charakterystyk.

Zespolonym przestrzenno-czasowym skalarowym polem losowym określonym na obszarze $D^N \times \Delta_t$, nazywamy zmienną losową $\underset{\sim}{\varrho}(\bar{x},t)$ będącą funkcją $\bar{x} \in D^N$, $t \in \Delta_t$ tego obszaru.

Pełny probabilistyczny opis pola losowego określają jego wszystkie skończenie wymiarowe dystrybuanty, spełniające warunki zgodności [16]. Podstawowymi charakterystykami przestrzenno-czasowego pola losowego $\underset{\sim}{\varrho}(\bar{x},t)$ są:

a) wartość oczekiwana

$$m_{\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x},t) = E\underset{\sim}{\varrho}(\bar{x},t) \tag{14}$$

gdzie symbol E oznacza operację uśredniania

b) funkcja korelacyjna

$$K_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) =$$

$$= E\left\{\left[\underset{\sim}{\varrho}(\bar{x}_1,t_1) - m_{\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_1,t_1)\right]\left[\underset{\sim}{\varrho}^*(\bar{x}_2,t_2) - m^*_{\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_2,t_2)\right]\right\} \tag{15}$$

przy czym gwiazdka oznacza operację sprzężenia funkcji zespolonej. W szczególnym przypadku gdy $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$, $t_1 = t_2 = t$, otrzymujemy wariancję przestrzenno-czasowego pola losowego $\underset{\sim}{\varrho}(\bar{x},t)$

$$\sigma^2_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x},t) = E\left[\left|\underset{\sim}{\varrho}(\bar{x},t) - m_{\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x},t)\right|\right]^2 \tag{16}$$

Pole losowe nazywamy jednorodnym i stacjonarnym w szerszym sensie, jeżeli jego wartość oczekiwana jest stała a funkcja korelacyjna zależy tylko od różnicy wektorów $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{s}$ i różnicy czasów $t_1 - t_2 = \tau$ tzn.

$$K_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = K^{(1)}_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_1-\bar{x}_2,\ t_1-t_2) \tag{17}$$

dla $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D^N$ oraz $t_1, t_2 \in \Delta_t$

Przestrzenno-czasowe pole losowe nazywać będziemy izotropowym w szerszym sensie, jeżeli jego funkcja korelacyjna $K_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2)$ zależy tylko od długości wektora różnicy argumentów, a nie od jego kierunku tzn.

$$K_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = K^{(1)}_{\underset{\sim}{\varrho}\underset{\sim}{\varrho}}(|\bar{x}_1-\bar{x}_2|,\ t_1,t_2) \tag{18}$$

Inną, równoważną funkcji korelacyjnej, charakterystyką przestrzenno-czasowego skalarowego pola losowego jest uogólniona gęstość spektralna określona (przy założeniu istnienia transformaty) zależnością:

$$S_{\underset{\sim}{QQ}}(\varkappa_1,\omega_1,\varkappa_2,\omega_2) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2N}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\underset{\sim}{QQ}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2)\,\cdot$$

$$\cdot\, e^{-i\left[(\bar{\varkappa}_1\bar{x}_1-\bar{\varkappa}_2\bar{x}_2)+(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)\right]}\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, dt_1\, dt_2 \qquad (19)$$

przy czym

$$\bar{\varkappa} = \left[\varkappa^1, \varkappa^2, \ldots, \varkappa^N\right]$$

$$\bar{\varkappa}\,\bar{x} = \varkappa^1 x^1 + \varkappa^2 x^2 + \ldots + \varkappa^N x^N$$

$$d\bar{x} = dx^1\, dx^2 \ldots dx^N$$

Korzystając z transformaty odwrotnej można wyznaczyć funkcję korelacyjną

$$K_{\underset{\sim}{QQ}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = \frac{1}{(2\pi)^{2(N+1)}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2N}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\underset{\sim}{QQ}}(\bar{\varkappa}_1,\omega_1,\bar{\varkappa}_2,\omega_2)$$

$$\cdot\, e^{i\left[(\bar{\varkappa}_1\bar{x}_1-\bar{\varkappa}_2\bar{x}_2)+(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)\right]}\, d\bar{\varkappa}_1\, d\bar{\varkappa}_2\, d\omega_1\, d\omega_2 \qquad (20)$$

gdzie $d\bar{\varkappa} = d\varkappa^1\, d\varkappa^2 \ldots d\varkappa^N$.

Zależności (19), (20) zwane są uogólnionymi równaniami WIENERa-CHINCZYNa.

Łatwo zauważyć, że w przypadku jednorodnego i stacjonarnego pola losowego, gęstość spektralna (19) przybiera postać dodatniego masywu dystrybucyjnego, skoncentrowanego na prostej $\bar{\varkappa}_1 = \bar{\varkappa}_2$, $\omega_1 = \omega_2$ czyli

$$S_{\underset{\sim}{QQ}}(\bar{\varkappa}_1,\omega_1,\bar{\varkappa}_2,\omega_2) = (2\pi)^{N+1}\, S^{(1)}_{\underset{\sim}{QQ}}(\bar{\varkappa}_1,\omega_1)\,\delta(\bar{\varkappa}_1-\bar{\varkappa}_2)\,\delta(\omega_1-\omega_2) \tag{21}$$

gdzie

$$\delta(\bar{\varkappa}_1-\bar{\varkappa}_2) = \delta(\varkappa_1^1-\varkappa_2^1)\,\delta(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)\ \ldots\ \delta(\varkappa_1^N-\varkappa_2^N)$$

Analogicznie jak dla skalarowego pola losowego można wprowadzić definicję wektorowego i tensorowego pola losowego oraz ich charakterystyk.

1.1.3. Empiryczne modele wymuszeń losowych

Pobudzenia losowe działające na układy dynamiczne mogą pochodzić z różnych źródeł. Przykładami takich pobudzeń są szumy akustyczne, pochodzące od silników rakietowych i lotniczych [21], turbulentne pulsacje ciśnienia [6], [7], ruchy tektoniczne skorupy ziemskiej, obciążenia wiatrem, fale morskie, nierówności dróg oddziaływujące na pojazdy [36], [23], [2] itp. Eksperymentalne wyznaczenie średnich i funkcji korelacyjnych tego rodzaju pól losowych jest związane z dużymi trudnościami natury pomiarowej i obliczeniowej [7], [8], [16]. W tej sytuacji bardzo pomocna może się okazać fizykalna analiza oddziaływania wymuszeń na ciągłe układy dynamiczne. Posługując się tą analizą omówimy kilka najczęściej występujących klas wymuszeń:

a) przestrzennie nieskorelowane wymuszenie

Jest ono granicznym przypadkiem wymuszenia, którego funkcja korelacyjna praktycznie mało różni się od zera dla różnych nawet bliskich argumentów przestrzennych. Mówimy wtedy, że skala korelacji jest mała [1]. W tym przypadku funkcję korelacji można wyrazić

$$K_{\underset{\sim}{QQ}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = K^{(1)}_{\underset{\sim}{QQ}}(t_1,t_2)\,\delta(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\,. \tag{22}$$

W zastosowaniach można przyjmować wymuszenie w tej postaci, jeżeli skala korelacji jest mała w stosunku do długości fal podstawowych form drgań.

b) przestrzennie całkowicie skorelowane wymuszenie

Ten rodzaj wymuszenia jest drugim granicznym przypadkiem, gdy skala korelacji jest duża w stosunku do rozmiarów analizowanego układu ciągłego. W tym przypadku funkcja korelacyjna nie zależy od współrzędnych przestrzennych, a więc można napisać

$$K_{\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = K^{(1)}_{\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}}(t_1,t_2). \tag{22a}$$

Mówimy wtedy o działaniu procesu stochastycznego na układ.

c) wymuszenie falowe

Wymuszenia tego rodzaju występują w zagadnieniach oddziaływania pól akustycznych i turbulentnych pulsacji ciśnienia [1] na układy ciągłe oraz przy ruchu pojazdów na konstrukcjach mostowych [2]. Przykładem takiego wymuszenia jest wymuszenie o funkcji korelacyjnej której argumenty należą do przestrzeni trójwymiarowej ($\bar{x} = [x,y,z]$):

$$K_{\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = \sum_{j=1}^{K} B_j \cos\Big[\tilde{f}_j(t_1) - \tilde{f}_j(t_2) - \gamma_j\Big(\frac{x_1-x_2}{c_x} + \frac{y_1-y_2}{c_y} + \frac{z_1-z_2}{c_z}\Big)\Big] \tag{23}$$

gdzie $\tilde{f}_j(t)$ jest daną funkcją czasu, a c_x, c_y, c_z są odpowiednimi prędkościami rozchodzenia się fal w kierunku x,y,z. Wymuszenie o funkcji korelacyjnej określonej wzorem (23) może być zapisane w postaci sumy nieskorelowanych funkcji losowych typu

$$\underset{\sim}{Q}(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{K} \underset{\sim}{A}_j \cos\Big[\tilde{f}_j(t) - \gamma_j\Big(\frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y} + \frac{z}{c_z}\Big) + \underset{\sim}{\delta}_j\Big] \tag{24}$$

gdzie $\underset{\sim}{A}_j$, $\underset{\sim}{\delta}_j$ są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi, przy czym zakłada się, że znane są rozkłady prawdopodobieństwa $p_{\underset{\sim}{A}_j}(A)$ amplitud A_j, a $\underset{\sim}{\delta}_j$ są losowymi fazami o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa $p_{\underset{\sim}{\delta}_j}(\delta)$ na odcinku $[0,2\pi]$. Wielkość B_j w zależności (23) jest połową wariancji amplitud $\underset{\sim}{A}_j$ i wyznaczana jest formułą

$$B_j = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, p_{\underset{\sim}{A}_j}(A) \, dA . \tag{25}$$

Wartość oczekiwana pola losowego (24)

$$E\underset{\sim}{Q}(x,y,z,t) = 0 . \tag{26}$$

Można jeszcze rozważać inne klasy pól losowych działających na układy ciągłe, jak przestrzenno-czasowe pola losowe jednorodne (lub niejednorodne) stacjonarne (lub niestacjonarne), lokalnie stacjonarne, prawie stacjonarne [30] itp. Tym niemniej omówione poprzednio klasy a), b), c) występują najczęściej w zastosowaniach teorii pól losowych [1].

1.1.4. Podstawowe zależności pomiędzy charakterystykami wejściowych pól losowych i wyjściowych

Zależności pomiędzy funkcjami korelacyjnymi wejściowymi i wyjściowymi

Przyjmijmy, że wejściowe pole losowe (obciążenie, wymuszenie) jest scharakteryzowane jego podstawowymi charakterystykami tj. wartością oczekiwaną i funkcją korelacyjną. Zakładając, że wyjściowe pole losowe (np. przemieszczenia, naprężenia ciągłych układów) $\bar{u}(\bar{x},t)$ jest średniokwadratowo różniczkowalne odpowiednią ilość razy względem współrzędnych przestrzennych i czasu [16] oraz uśredniając po zespole realizacji obustronnie układ (11) otrzymuje się równania różniczkowe dla wartości oczekiwanych rozwiązania. W celu uproszczenia zapisu, nie zmniejszając ogólności rozważań założono, że wartość oczekiwana wejściowego

pola losowego a zatem i wyjściowego pola losowego jest równa zeru. Mnożąc stronami układ (11) i uśredniając po zespole realizacji, uzyskuje się równania różniczkowe wiążące funkcje korelacyjne wejściowych pól losowych i wyjściowych pól losowych.

Równania te można zapisać

$$\sum_{l}\sum_{m}\left[P_l^j(D_{t_1}) + \sum_s Q_s^j(D_{t_1})\, L_l^s(\bar{x}_1, D_{x_1})\right]\left[P_m^k(D_{t_2}) + \sum_r Q_r^k(D_{t_2})\,\cdot\right.$$

$$\left. L_m^r(\bar{x}_2, D_{\bar{x}_2})\right] K_{u^l u^m}(\bar{x}_1, t_1, \bar{x}_2, t_2) = K_{q^j q^k}(\bar{x}_1, t_1, \bar{x}_2, t_2) \qquad (27)$$

Rozwiązując numerycznie lub znanymi metodami układy cząstkowych równań różniczkowych (27), przy poprawnie postawionym zagadnieniu granicznym, dla zadanych funkcji korelacyjnych wymuszeń, otrzymuje się funkcje korelacyjne wyjściowych pól losowych.

W wielu przypadkach można wykorzystać metodę funkcji GREENa [3]. Funkcja GREENa jest rozwiązaniem układu (11) z odpowiednimi warunkami brzegowymi i zerowymi warunkami początkowymi przy $t = \tau$ dla jednostkowego obciążenia impulsowego, działającego w punkcie $\bar{\varrho} = [\varrho^1, \varrho^2, \ldots, \varrho^N]$

$$\sum_i \left[P_i^j(D_t) + \sum_s Q_s^j(D_t)\, L_i^s(\bar{x}, D_{\bar{x}})\right] G_i^i(\bar{x}, t, \bar{\varrho}, \tau) =$$

$$= \delta_i^j\, \delta(\bar{x} - \bar{\varrho})\, \delta(t - \tau) \qquad (28)$$

gdzie δ_i^j jest symbolem Kroneckera.

Funkcje korelacyjne wyjściowego pola losowego można zapisać

$$K_{u^j u^k}(\bar{x}_1, t_1, \bar{x}_2, t_2) = \sum_l \sum_m \int_{D^N} \int_{D^N} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} G_l^j(\bar{x}_1, t_1, \bar{\varrho}_1, \tau_1)\,\cdot$$

$$\cdot\, G_m^k(\bar{x}_2, t_2, \bar{\varrho}_2, \tau_2)\, K_{q^l q^m}(\bar{\varrho}_1, \tau_1, \bar{\varrho}_2, \tau_2)\, d\bar{\varrho}_1\, d\tau_1\, d\bar{\varrho}_2\, d\tau_2 \qquad (29)$$

Jak wiadomo, przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych [22] dogodnie jest wprowadzić rozwinięcia

$$u^j(\bar{x},t) = \sum_k f_{kj}(t)\,\varphi_{kj}(\bar{x}) \tag{30}$$

gdzie $\varphi_{kj}(\bar{x})$ są funkcjami własnymi poprawnie postawionego zagadnienia granicznego [22]. Funkcje korelacyjne wyjściowego pola losowego można zapisać w postaci

$$K_{u^j u^l}(\bar{x}_1,t_1,\bar{x}_2,t_2) = \sum_i \sum_k K_{f_{ij} f_{kl}}(t_1,t_2)\,\varphi_{ij}(\bar{x}_1)\,\varphi_{kl}(\bar{x}_2) \tag{31}$$

Wariancję wyjściowych pól losowych uzyskuje się analogicznie jak w przypadku wejściowych pól losowych przyjmując $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$, $t_1 = t_2 = t$ oraz $j = l$.

Zależności pomiędzy gęstościami spektralnymi na wejściu i wyjściu układu

Efektywnym aparatem matematycznym teorii niestacjonarnych i niejednorodnych pól losowych w układach dynamicznych jest uogólniona analiza spektralna [6],[7]. Jeżeli np. układ równań (27) opisuje nieskończenie rozległy układ dynamiczny to stosując do niego transformację (19), otrzymuje się zależności między niejednorodnymi i niestacjonarnymi gęstościami widmowymi wejściowych i wyjściowych pól losowych

$$\sum_l \sum_m H_l^j(\bar{\varkappa}_1,\omega_1)\, H_m^{k^*}(\bar{\varkappa}_2,\omega_2)\, S_{u^l u^m}(\bar{\varkappa}_1,\omega_1,\bar{\varkappa}_2,\omega_2) =$$

$$= S_{q^j q^k}(\bar{\varkappa}_1,\omega_1,\bar{\varkappa}_2,\omega_2) \tag{32}$$

gdzie $H_l^j(\bar{\varkappa}_1,\omega_1)$ i $H_m^{k^*}(\bar{\varkappa}_2,\omega_2)$ są sprzężonymi funkcjami argumentów $\bar{\varkappa}$ i ω otrzymanymi po wykonaniu działań wskazanych przez operatory układu równań (27).

Wykorzystując metody funkcji GREENa do wyznaczania uogólnionej gęstości spektralnej wyjściowych pól losowych, po dokonaniu transformacji (19) na równaniu (29) otrzymuje się

$$S_{u^j u^k}(\bar{x}_1,\omega_1,\bar{x}_2,\omega_2) = \sum_l \sum_m G_l^j(\omega_1,\bar{x}_1)\, G_m^{k*}(\omega_2,\bar{x}_2)$$

$$S_{q^l q^m}(\omega_1,\bar{x}_1,\omega_2,\bar{x}_2) \qquad (33)$$

gdzie $G_l^j(\omega_1,\bar{x}_1)$, $G_m^{k*}(\omega_2,\bar{x}_2)$ są sprzężonymi charakterystykami częstotliwościowymi.

Analogicznie można stosować transformację (19) do układu (31). Przyjmując skończony czas działania wejściowego pola losowego na układ, otrzymuje się niestacjonarne pola wyjściowe. Badanie tego rodzaju niestacjonarności ciągłych układów dynamicznych stanowi jeden z zasadniczych problemów poruszonych w pracy. Badanie to dotyczy układów liniowych jak i nieliniowych.

Z uwagi na fakt, że metody korelacyjne i spektralne są dość proste i efektywne, przeto przez wielu autorów były stosowane do analizy drgań układów ciągłych [3], [4], [9], [10], [14], [20]. W pracach tych wykorzystywano również odmiany analizy korelacyjnej np. teorię funkcjonałów charakterystycznych lub metodę rozkładów kanonicznych.

1.1.5. Metody badania reakcji ciągłych układów pobudzanych przestrzenno-czasowymi polami losowymi

Stosując rozwinięcia typu (30), równania opisujące podstawowe układy ciągłe można sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Dla uproszczenia będziemy oznaczać

$u^1 = u$ - przemieszczenie wzdłużne,

$u^2 = v$ - przemieszczenie styczne,

$u^3 = w$ - przemieszczenie poprzeczne.

Zakładając istnienie rozwiązania układu równań (11) w postaci

$$u(\bar{x},t) = \sum_k f_k^{(u)}(t)\, u_k(\bar{x}),$$

$$v(\bar{x},t) = \sum_k f_k^{(v)}(t)\, v_k(\bar{x}), \tag{34}$$

$$w(\bar{x},t) = \sum_k f_k^{(w)}(t)\, w_k(\bar{x}),$$

gdzie $u_k(\bar{x})$, $v_k(\bar{x})$, $w_k(\bar{x})$ jest rodziną funkcji ortogonalnych spełniającą odpowiednie warunki brzegowe (13), po podstawieniu zależności (34) do układu równań (11), uzyskuje się liniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych względem $f_k^{(u)}(t)$, $f_k^{(v)}(t)$, $f_k^{(w)}(t)$. Układ ten pozwala się sprowadzić do układu niezależnych równań względem $f_k^{(u)}(t)$, $f_k^{(v)}(t)$, $f_k^{(w)}(t)$ jedynie w przypadku występowania jednego rodzaju obciążenia. Założymy w dalszym ciągu pracy, że na układ ciągły działa tylko wymuszenie poprzeczne tzn. $q^3 = q(\bar{x},t)$. Po wyrugowaniu $f_k^{(u)}(t)$, $f_k^{(v)}(t)$ i oznaczeniu $f_k^{(w)}(t) = f_k(t)$, otrzymuje się układ równań różniczkowych o postaci

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + 2\, n_k \frac{df_k(t)}{dt} + \omega_k^2\, f_k(t) = Q_k(t) \tag{35}$$

gdzie $Q_k(t)$ jest siłą uogólnioną, określoną zależnością

$$Q_k(t) = \frac{\int_{D^N} q(\bar{x},t)\, w_k(\bar{x})\, d\bar{x}}{\int_{D^N} \mu\, w_k^2(\bar{x})\, d\bar{x}} \tag{36}$$

przy czym μ jest masą jednostkową (np. $\mu = A\varrho_p$ lub $\mu = h\varrho_p$).

Impulsowa funkcja przejścia k-tej formy drgań, przy założeniu podkrytycznego tłumienia $n_k < \omega_k$, przyjmuje postać

$$h_k(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ \frac{1}{\bar{\omega}_k} \exp(-n_k t) \cdot \sin \bar{\omega}_k t & t > 0 \end{cases} \tag{37}$$

gdzie

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\omega_k^2 - n_k^2}$$

Założymy dla uproszczenia, że wartość oczekiwana pola losowego obciążenia wynosi zero. Funkcja korelacyjna wyjściowego pola losowego wyrazi się zależnością (31)

$$K_{ww}(\bar{x}_1, t_1, \bar{x}_2, t_2) = \sum_i \sum_k K_{f_i f_k}(t_1, t_2)\, w_k(\bar{x}_1)\, w_i(\bar{x}_2), \tag{38}$$

gdzie

$$K_{f_i f_k}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_i(t_1 - \tau_1)\, h_k(t_2 - \tau_2)\, K_{Q_i Q_k}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \tag{39}$$

przy czym

$$K_{Q_i Q_k}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\int_{D^N} \int_{D^N} K_{qq}(\bar{x}_1, \tau_1, \bar{x}_2, \tau_2)\, w_i(\bar{x}_1)\, w_k(\bar{x}_2)\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2}{\int_{D^N} \mu w_i^2(x_1)\, d\bar{x}_1 \int_{D^N} \mu w_k^2(\bar{x}_2)\, d\bar{x}_2}. \tag{40}$$

Przyjmijmy dalej, że układ dla czasu $t < 0$ jest w równowadze i zostaje pobudzony w czasie $t = 0$. Możemy wtedy zbadać interesujący pro-

blem niestacjonarności w czasie, wyjściowego pola losowego. Zależność (39) przyjmuje wówczas postać

$$K_{f_i f_k}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h_i(t_1-\tau_1)\, h_k(t_2-\tau_2)\, K_{Q_i Q_k}(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (41)$$

Reakcja ciągłego układu na wymuszenie stacjonarne

Sposób wyznaczania funkcji korelacyjnej $K_{f_i f_k}(t_1,t_2)$ w postaci zamkniętej zależy od struktury funkcji korelacyjnej wejściowych pól losowych. Przyjmując w szczególnym przypadku że funkcja korelacyjna

$$K_{Q_i Q_k}(\tau_1,\tau_2) = K^{(1)}_{Q_i Q_k}(\tau_2-\tau_1) \qquad (42)$$

całkę (41) można przedstawić w postaci sumy (np. dla $t_2 > t_1$):

$$K_{f_i f_k}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{\tau_1} h_i(t_1-\tau_1)\, h_k(t_2-\tau_2)\, K^{(1)}_{Q_i Q_k}(\tau_1-\tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_0^{\tau_2} h_i(t_1-\tau_1)\, h_k(t_2-\tau_2)\, K^{(1)}_{Q_i Q_k}(\tau_2-\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 +$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2} h_i(t_1-\tau_1)\, h_k(t_2-\tau_2)\, K^{(1)}_{Q_i Q_k}(\tau_2-\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (43)$$

Można też wprowadzić [2] transformację układu współrzędnych τ_1,τ_2, obracając go o $\pi/4$, poprzez wprowadzanie nowych zmiennych

$$\tau = \tau_2 - \tau_1, \qquad z = \tau_1 + \tau_2$$

Wtedy dla $t_2 > t_1$ zależność (41) przyjmie postać

$$K_{f_i f_k}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\int_0^{t_2}\int_{\tau}^{2t_2-\tau} h_i\left[t_1 - \frac{1}{2}(z-\tau)\right] h_k\left[t_2 - \frac{1}{2}(z+\tau)\right]$$

$$K_{Q_i Q_k}(\tau)\, dz\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-t_1}^{0}\int_{-\tau}^{2t_2+\tau} h_i\left[t_1 - \frac{1}{2}(z-\tau)\right] h_k\left[t_2 - \frac{1}{2}(z+\tau)\right] K_{Q_i Q_k}(-\tau)\, dz\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{t_2-t_1}\int_{2t_1+\tau}^{2t_2-\tau} h_i\left[t_1 - \frac{1}{2}(z-\tau)\right] h_k\left[t_2 - \frac{1}{2}(z+\tau)\right] K_{Q_i Q_k}(\tau)\, dz\, d\tau \qquad (44)$$

Obecnie podamy konkretne przykłady badań reakcji ciągłych układów dynamicznych na podstawowe rodzaje wymuszeń.

Przykład 1

Reakcja ciągłego układu dynamicznego na przestrzennie nieskorelowane wejściowe pole losowe

Zakładając, że funkcja korelacyjna ma postać

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\tau_1,\bar{x}_2,\tau_2) = K_{qq}(\tau_1,\tau_2)\,\delta(\bar{x}_2-\bar{x}_1) \qquad (45)$$

można dla funkcji korelacyjnej sił uogólnionych, biorąc pod uwagę ortogonalność funkcji własnych, otrzymać zależność

$$K_{Q_i Q_i}(\tau_1,\tau_2) = K_{qq}(\tau_1,\tau_2)\, b_i \qquad (46)$$

gdzie

$$b_i = \frac{\int\limits_{D^N} w_i^2(\bar{x}_1)\, d\bar{x}_1}{\left(\int\limits_{D^N} \mu w_i^2(\bar{x}_1)\, d\bar{x}_1\right)^2} \tag{47}$$

Wariancja wyjściowego pola wyrazi się

$$\sigma^2_{ww}(\bar{x},t) = \sum_i b_i\, w_i^2(\bar{x}) \int_0^t\int_0^t h_i(t-\tau_1)\, h_i(t-\tau_2)\, K_{qq}(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \tag{48}$$

Ilustrując powyższe, przytoczymy badania numeryczne powłok cylindrycznych [10], [28], pod wpływem wejściowego pola losowego nieskorelowanego przestrzennie i czasowo. Rozpatrzmy powłokę cylindryczną zamkniętą, zamocowaną przegubowo-przesuwnie na brzegach, na którą działa obciążenie promieniowe, którego funkcja korelacyjna może być aproksymowana wyrażeniem

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\tau_1,\bar{x}_2,\tau_2) = K_o\, \delta(\bar{x}_2-\bar{x}_1)\, \delta(\tau_2-\tau_1) \tag{49}$$

Wariancje przemieszczeń powłoki przyjmują postać

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{uu}(\xi,t) \\ \sigma^2_{vv}(\xi,t) \\ \sigma^2_{ww}(\xi,t) \end{bmatrix} = \frac{\pi K_o R^3 L}{2(\pi L R \rho_p h)^2} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\bar{\omega}^2_{mn}(n^2_{mn}+\bar{\omega}^2_{mn})}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\Phi_u^2(m,n)}{G_w^2(m,n)} \cos^2 \dfrac{m\pi\xi}{l} \\ \\ \dfrac{\Phi_v^2(m,n)}{G_w^2(m,n)} \sin^2 \dfrac{m\pi\xi}{l} \\ \\ \sin^2 \dfrac{m\pi\xi}{l} \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\bar{\omega}_{mn}^2}{n_{mn}^2} - \exp(-2\, n_{mn}\, t) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(2\, n_{mn} \sin^2 \bar{\omega}_{mn}\, t + \bar{\omega}_{mn} \sin 2\, \bar{\omega}_{mn}\, t + \frac{\bar{\omega}_{mn}^2}{n_{mn}}\right) \right] \qquad (50)$$

gdzie $\bar{\omega}_{mn} = \sqrt{\omega_{mn}^2 - n_{mn}^2}$ oznacza tłumioną częstość powłoki,

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)R^2\varrho_p} \left[\frac{(1-\nu^2)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4}{\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2} + \right.$$

$$\left. + c^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^4 \right]$$

jest kwadratem częstości własnych powłoki,

$$c^2 = \frac{h^2}{12\, R^2},$$

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} 1/2 & \text{dla } m \geqslant 1,\ n = 0 \\ 1 & \text{dla } m \geqslant 1,\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

$\xi = \frac{x}{R}$ jest bezwymiarową współrzędną w kierunku osi powłoki,

$l = \frac{L}{R}$ jest bezwymiarową długością powłoki.

$\Phi_u(m,n)$, $\Phi_v(m,n)$ i $G_w(m,n)$ są wielomianami otrzymanymi z układu równań technicznej teorii powłok cylindrycznych [18], [28]

$$\Phi_u(m,n) = -\nu\frac{m\pi}{l}\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right) - \frac{1+\nu}{2}\frac{m\pi}{l}n$$

$$\Phi_v(m,n) = -\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)n - \nu\frac{1+\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2}n$$

$$G_w(m,n) = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2$$

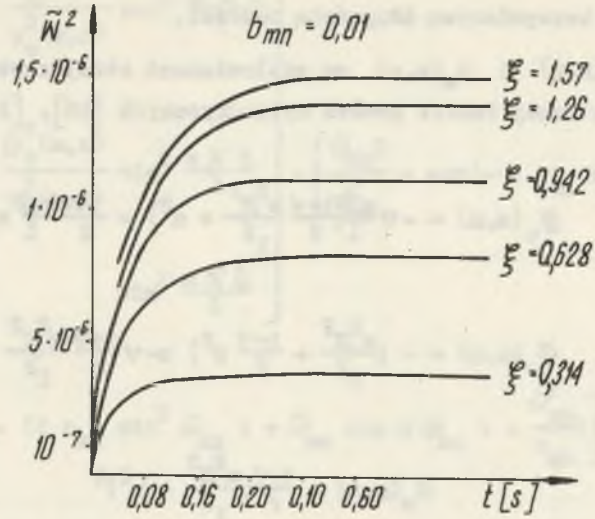
Obliczenia numeryczne zostały wykonane dla wielkości bezwymiarowej wariancji przemieszczenia promieniowego

$$\tilde{\sigma}^2_{ww}(\xi,t) = \sigma^2_{ww}(\xi,t)\,\frac{2(\pi L R \varrho_p h)^2}{\pi K_o R^3 L} \tag{51}$$

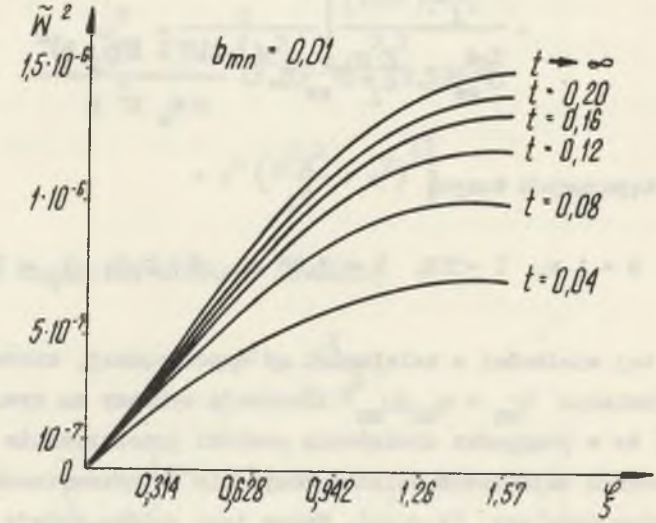
dla następujących danych

$$R = 1\ m,\quad L = \pi R,\quad h = 0{,}02\ m,\quad \nu = 0{,}3,\quad \varrho_p = 7800\ \frac{kg}{m^3}$$

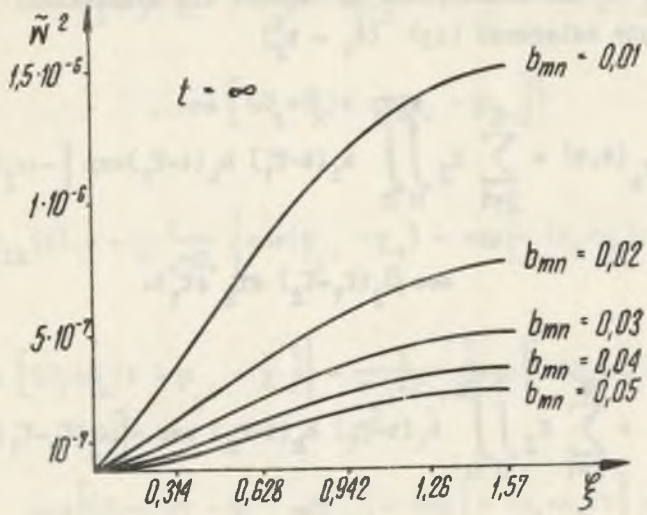
Zmiany tej wielkości w zależności od współrzędnej, czasu i współczynnika tłumienia $b_{mn} = n_{mn}/\omega_{mn}$ ilustrują wykresy na rys. 8, 9, 10. Zauważmy, że w przypadku obciążenia powłoki przestrzennie i czasowo nieskorelowanym wejściowym polem losowym nie ma przewyższeń wariancji ponad poziom ustalony $(t \to \infty)$. Wobec tego celowe wydaje się stosowanie metody spektralnej dla oceny wariancji w stanie ustalonym. Z wykresu na rys. 10 widać, że wzrost współczynnika tłumienia powoduje obniżenie się poziomu wariancji.


$\tilde{W}^2$
$b_{mn} = 0,01$
$1,5 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}
$\xi = 1,57$
$\xi = 1,26$
$\xi = 0,942$
$\xi = 0,628$
$\xi = 0,314$
0,08 0,16 0,20 0,10 0,60
t [s]

Rys. 8


$\tilde{W}^2$
$b_{mn} = 0,01$
$1,5 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-7}$
10^{-7}
0
$t \to \infty$
$t = 0,20$
$t = 0,16$
$t = 0,12$
$t = 0,08$
$t = 0,04$
0,314 0,628 0,942 1,26 1,57
ξ

Rys. 9



Rys. 10

Przykład 2

Reakcja ciągłego układu dynamicznego na przestrzennie całkowicie skorelowane wymuszenie

Przyjmijmy, że funkcja korelacyjna obciążenia nie zależy od współrzędnych przestrzennych a tylko od różnicy czasów

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\tau_1,\tau_2) = K_{qq}^{(1)}(\tau_2-\tau_1) \tag{52}$$

Wejściowe pole losowe jest wtedy stacjonarnym procesem stochastycznym. Z uwagi na fakt, że szeroką klasę stacjonarnych procesów stochastycznych działających na rzeczywiste układy można aproksymować funkcją korelacji typu

$$\sum_{j=1}^{K} K_j \exp(-\alpha_j|\tau|) \cos\beta_j\tau$$

można podać ogólne analityczne zależności dla wyznaczenia wariancji wykorzystując zależność (43) $(t_1 = t_2)$

$$K_{f_i f_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} K_j \int_0^t \int_0^{\tau_1} h_i(t-\tau_1)\, h_k(t-\tau_2) \exp\left[-\alpha_j(\tau_1-\tau_2)\right]$$

$$\cos \beta_j(\tau_1-\tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{K} K_j \int_0^t \int_0^{\tau_2} h_i(t-\tau_1)\, h_k(t-\tau_2) \exp -\left[\alpha_j(\tau_2-\tau_1)\right]$$

$$\bullet$$

$$\cos \beta_j(\tau_2-\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \tag{53}$$

Dokonując zmian zmiennych w drugiej całce, można wykorzystać wynik pierwszej całki, zamieniając wskaźniki i na k oraz odwrotnie. Zależność (53) sprowadza się do postaci

$$K_{f_i f_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{K_j}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}_k} \Big[A_{ik}(t) + B_{ik}(t) + C_{ik}(t) + D_{ik}(t) +$$

$$+ A_{ki}(t) + B_{ki}(t) + C_{ki}(t) + D_{ki}(t)\Big] \tag{54}$$

gdzie:

$$A_{ik}(t) = -\frac{1}{r_{2-} \cdot \varrho_+} \Big\{\cos(\chi_+ - \psi_{2-}) - \exp\left[-(n_i+n_k)\, t\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)\, t - \psi_{2-} + \chi_+\right]\Big\} - \frac{1}{r_{2-} \cdot r_{1-}} \Big\{\exp\left[-(\alpha_j+n_k)t\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[(\beta_j+\bar{\omega}_k)t - \psi_{2^-} - \psi_{1^-}\right] - \exp\left[-(n_i+n_k)t\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)t + \psi_{2^-} - \psi_{1^-}\right]\Big\} \tag{54a}$$

$$B_{ik}(t) = -\frac{1}{r_{2^+}\cdot\varrho_+}\Big\{\cos(\psi_{2^+} + \chi_+) - \exp\left[-(n_i+n_k)t\right] \cdot$$

$$\cos\left[(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)t + \psi_{2^+} + \chi_+\right]\Big\} - \frac{1}{r_{2^+}\cdot r_{1^+}}\Big\{\exp\left[-(\alpha_j+n_k)t\right]$$

$$\cos\left[(\beta_j-\bar{\omega}_k)t - \psi_{2^+} - \psi_{1^+}\right] - \exp\left[-(n_i+n_k)t\right] \cdot$$

$$\cos\left[(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)t + \psi_{2^+} + \psi_{1^+}\right]\Big\} \tag{54b}$$

$$C_{ik}(t) = \frac{1}{r_{2^+}\cdot\varrho_-}\Big\{\cos(\chi_- - \psi_{2^+}) - \exp\left[-(n_i+n_k)t\right] \cdot$$

$$\cos\left[(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)t - \psi_{2^+} + \chi_-\right]\Big\} + \frac{1}{r_{2^+}\cdot r_{1^-}}\Big\{\exp\left[-(\alpha_j+n_k)t\right]$$

$$\cdot \cos\left[(\beta_j-\bar{\omega}_k)t - \psi_{2^+} - \psi_{1^-}\right] - \exp\left[-(n_i+n_k)t\right] \cdot$$

$$\cos\left[(\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_k)t - \psi_{2^+} - \psi_{1^+}\right]\Big\} \tag{54c}$$

$$D_{ik}(t) = + \frac{1}{r_{2^-}\varrho_-}\Big\{\cos(\chi_- + \psi_{2^-}) - \exp\Big[-(n_i+n_k)t\Big] \cdot$$

$$\cos\Big[(\bar{\omega}_k-\bar{\omega}_i)t - \psi_{2^-} - \chi_-\Big]\Big\} - \frac{1}{r_{2^-}\cdot r_{1^+}}\Big\{\exp\Big[-(\alpha_j+n_k)t\Big] \cdot$$

$$\cos\Big[(\beta_j+\bar{\omega}_k)t - \psi_{2^-} - \psi_{1^+}\Big] - \exp\Big[-(n_i+n_k)t\Big]$$

$$\cos\Big[(\bar{\omega}_k-\bar{\omega}_i)t - \psi_{2^-} - \psi_{1^+}\Big]\Big\} \tag{54d}$$

przy czym

$$r_{1\pm} = \sqrt{(n_i-\alpha_j)^2 + (\pm\bar{\omega}_i+\beta_j)^2}$$

$$\psi_{1\pm} = \arctan\frac{\pm\bar{\omega}_i + \beta_j}{n_i - \alpha_j}$$

$$\varrho_\pm = \sqrt{(n_i+n_k)^2 + (\bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_k)^2}$$

$$\chi_\pm = \arctan\frac{\bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_k}{n_i + n_k}$$

$$r_{2\pm} = \sqrt{(n_k+\alpha_j)^2 + (\pm\bar{\omega}_k-\beta_j)^2}$$

$$\psi_{2\pm} = \arctan\frac{\pm\bar{\omega}_k - \beta_j}{n_k + \alpha_j}$$

Pozostałe składniki sumy w zależności (54) uzyskuje się, jak to zaznaczono powyżej, po zmianie indeksów i na k oraz odwrotnie w zależnościach (54a),(54b),(54c),(54d).

Wariancja przemieszczeń wyraża się

$$\sigma^2_{ww}(\bar{x},t) = \sum_i \sum_k c_i \, c_k \, w_i(\bar{x}) \, w_k(\bar{x}) \, K_{f_i f_k}(t,t) \tag{55}$$

gdzie

$$c_s = \frac{\int_{D^N} w_s(\bar{x}) \, d\bar{x}}{\int_{D^N} \mu w_s^2(\bar{x}) \, d\bar{x}} \tag{56}$$

W powyższych rozważaniach nie pomija się korelacji wzajemnej pomiędzy poszczególnymi formami drgań. Tym samym rozważania te zachowują ważność dla dowolnej wartości współczynnika tłumienia podkrytycznego $n_k < \omega_k$.

Można podać warunki [2], kiedy przy wyznaczaniu wariancji znikają elementy niediagonalne w sumach po i, k. Są one w zasadzie spełnione w dwóch przypadkach: 1° jeżeli współczynniki tłumienia są bardzo małe (następuje wtedy zwiększenie zdolności filtracyjnej układu); 2° jeżeli układ nie posiada wielokrotnych lub bardzo bliskich sobie częstości własnych [2]. Biorąc pod uwagę powyższe oraz wykorzystując równość (44), otrzymuje się dla małych współczynników tłumienia zależności, w których pominięto korelację pomiędzy poszczególnymi formami drgań [2]:

$$K_{f_k f_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{K_j}{2\bar{\omega}_k^2} \exp(-2 n_k t) \Big\{ \frac{1}{n_k} \Big[I^{+}_{(1)} \exp(2n_k t) - I^{-}_{(1)} \Big] -$$

$$- \frac{1}{\bar{\omega}_k^2} \Big[(-\bar{\omega}_k I^{+}_{(2)} + n_k I^{+}_{(1)}) \exp(2n_k t) - (n_k I^{-}_{(1)} + \bar{\omega}_k I^{-}_{(2)}) \cos 2\bar{\omega}_k t +$$

$$+ (\bar{\omega}_k I^{-}_{(1)} - n_k I^{-}_{(2)}) \sin 2\bar{\omega}_k t \Big] \Big\} \tag{57}$$

gdzie

$$I^{\pm}_{(1)} = \frac{1}{(\alpha_j \pm n_k)^2 + (\beta_j + \bar{\omega}_k)^2} \Big\{ e^{-(\alpha_j \pm n_k)t} \Big[-(\alpha_j \pm n_k) \cdot$$

$$\cos(\beta_j + \bar{\omega}_k)t + (\beta_j + \bar{\omega}_k) \sin(\beta_j + \bar{\omega}_k)t \Big] + (\alpha_j \pm n_k) \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{(\alpha_j \pm n_k)^2 + (\beta_j - \bar{\omega}_k)^2} \Big\{ e^{-(\alpha_j \pm n_k)t} \Big[-(\alpha_j \pm n_k) \cos(\beta_j - \bar{\omega}_k)t$$

$$+ (\beta_j - \bar{\omega}_k) \sin(\beta_j - \bar{\omega}_k)t \Big] + (\alpha_j \pm n_k) \Big\} \tag{57a}$$

$$I^{\pm}_{(2)} = \frac{1}{(\alpha_j \pm n_k)^2 + (\beta_j + \bar{\omega}_k)^2} \Big\{ e^{-(\alpha_j \pm n_k)t}$$

$$\Big[-(\alpha_j \pm n_k) \sin(\beta_j + \bar{\omega}_k)t - (\beta_j + \bar{\omega}_k) \cos(\beta_j + \bar{\omega}_k)t \Big] +$$

$$+ (\beta_j + \bar{\omega}_k) \Big\} + \frac{1}{(\alpha_j \pm n_k)^2 + (\beta_j - \bar{\omega}_k)^2} \Big\{ e^{-(\alpha_j \pm n_k)t} \cdot$$

$$- \Big[(\alpha_j \pm n_k) \sin(\beta_j - \bar{\omega}_k)t - (\beta_j - \bar{\omega}_k) \cos(\beta_j - \bar{\omega}_k)t \Big] + (\beta_j - \bar{\omega}_k) \Big\} \tag{57b}$$

Wskaźnik znakowy oznacza znak sumy lub różnicy w wyrażeniu $\alpha_j \pm n_k$. Wyrażenie (57) można jeszcze przybliżyć [2] dla $n_k \ll \bar{\omega}_k$

$$K_{f_k f_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{K_j}{2\bar{\omega}_k^2 n_k} \left[I^{+}_{(1)} - I^{-}_{(1)} \exp(-2n_k t) \right] \tag{58}$$

Oczywiście wariancja przyjmuje postać

$$\sigma^2_{ww}(\bar{x},t) = \sum_k c_k^2 w_k^2(\bar{x}) K_{f_k f_k}(t,t) \tag{59}$$

Ilustracją powyższych rozważań są również badania powłok cylindrycznych [10], [28], pobudzanych polem losowym o funkcji korelacyjnej w postaci

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\tau_1,\bar{x}_2,\tau_2) = \sum_{j=1}^{K} K_j \exp(-\alpha_j|\tau_2-\tau_1|)\cos \beta_j(\tau_2-\tau_1) \tag{60}$$

Analogicznie jak poprzednio założono, że powłoka zamknięta cylindryczna jest zamocowana przegubowo-przesuwnie na brzegach oraz przyjęto, że obciążenie promieniowe działa na całej powierzchni powłoki (stan kołowo-symetryczny). Wariancje przemieszczeń dla $n_{mn} < \omega_{mn}$ wyrażają się

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{uu}(\xi,t) \\ \sigma^2_{vv}(\xi,t) \\ \sigma^2_{ww}(\xi,t) \end{bmatrix} = \frac{R^4\, 4\pi^2}{(\pi L R \varrho_p h)^2} \sum_{j=1}^{K} K_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} \frac{1}{r\pi}$$

$$\left[1-(-1)^m\right]\left[1-(-1)^r\right]\begin{bmatrix} \dfrac{\Phi_u(m,0)\,\Phi_u(r,0)}{G_w(m,0)\,G_w(r,0)}\cos\dfrac{m\pi\xi}{l}\cos\dfrac{r\pi\xi}{l} & 0 \\ 0 & \sin\dfrac{m\pi\xi}{l}\sin\dfrac{r\pi\xi}{l} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}_{m0}\,\bar{\omega}_{r0}}\Big[A_{m0r0}(t) + B_{m0r0}(t) + C_{m0r0}(t) + D_{m0r0}(t) +$$

$$+ A_{r0m0}(t) + B_{r0m0}(t) + C_{r0m0}(t) + D_{r0m0}(t)\Big] \tag{61}$$

gdzie

$$A_{m0r0}(t) = A_{mnrs}(t)\Big|_{\substack{n=0\\ s=0}}$$

$$B_{m0r0}(t) = B_{mnrs}(t)\Big|_{\substack{n=0\\ s=0}}$$

$$C_{m0r0}(t) = C_{mnrs}(t)\Big|_{\substack{n=0\\ s=0}} \tag{62}$$

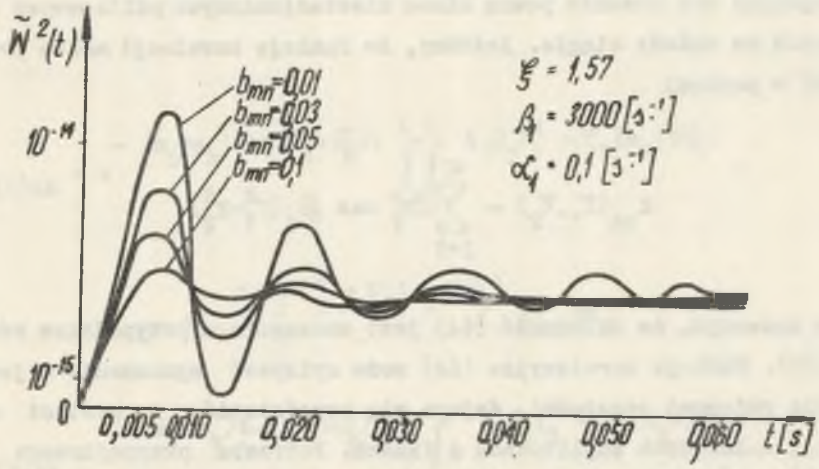
$$D_{m0r0}(t) = D_{mnrs}(t)\Big|_{\substack{n=0\\ s=0}}$$

Wyrażenia (62) są analogiczne do (54a), (54b), (54c), (54d) przy przejściu z pojedynczych wskaźników na podwójne tzn. $i \to mn$, $k \to rs$.

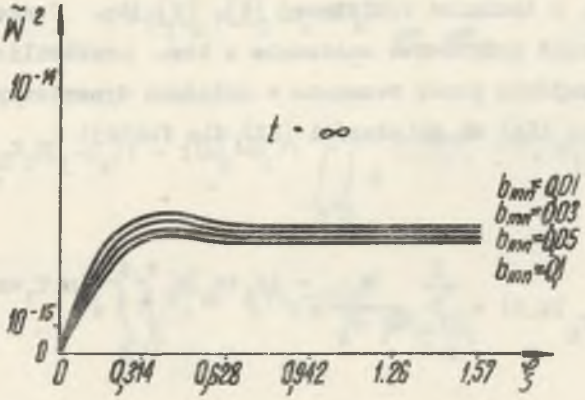
Numerycznie badano wielkość bezwymiarową, proporcjonalną do wariancji przemieszczenia promieniowego, przyjmując $j = 1$

$$\hat{\sigma}^2_{ww}(\xi,t) = \sigma^2_{ww}(\xi,t)\,\frac{(\pi L R \varrho_p h)^2}{(K_1 R^4 4\pi)^2} \tag{63}$$

W obliczeniach przyjęto $\alpha_1 \ll \beta_1$ ($\alpha_1 = 0{,}1\ s^{-1}$, $\beta_1 = 3000\ s^{-1}$). Pozostałe parametry przyjęto takie same jak w poprzednim przykładzie. Wykres wariancji zredukowanej przemieszczenia promieniowego w funkcji czasu przedstawia rys. 11, a wykres wielkości ustalonej w funkcji współrzędnej dla zredukowanych współczynników tłumienia $b_{mn} = n_{mn}/\omega_{mn}$ pokazano na rys. 12. Wzrost współczynnika tłumienia powoduje również



Rys. 11



Rys. 12

tutaj obniżanie się poziomu wariancji. Na rys. 11 widoczne są zanikające oscylacje wariancji z czasem. Zjawisko to można wyjaśnić tym, że dla małych czasów układ ciągły zachowuje się jak deterministyczny pod wpływem stałego obciążenia. Wtedy zachodzi $\exp(-\alpha_1|\tau|)\cos\beta_1\tau \to 1$ a to jest właśnie powodem oscylacji w pobliżu czasu $t \to 0$.

Reakcja ciągłego układu dynamicznego na niestacjonarne wymuszenie

Zajmijmy się obecnie pewną klasą niestacjonarnych pól losowych działających na układy ciągłe. Załóżmy, że funkcję korelacji można przedstawić w postaci

$$K_{qq}(\tau_1,\tau_2) = \sum_{j=1}^{K} B_j \cos\beta_j(\tau_1^2-\tau_2^2) \tag{64}$$

Można zauważyć, że zależność (64) jest szczególnym przypadkiem równości (23). Funkcja korelacyjna (64) może opisywać wymuszenie o jednostajnie zmiennej częstości, dające się przedstawić w postaci sumy funkcji o losowych amplitudach i fazach. Potrzeba przypadkowego potraktowania drgań wymuszonych polami o jednostajnie zmiennej częstości wynika z natury pobudzeń występujących np. przy rozruchach silników lotniczych, w technice rakietowej [6], [7] itp. Procesy tego rodzaju mają również podstawowe znaczenie w tzw. probabilistycznym potraktowaniu przejścia przez rezonans w układach dynamicznych. Podstawiając wyrażenie (64) do zależności (42), dla funkcji $K_{f_if_k}(t,t)$ otrzymuje się

$$K_{f_if_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{B_j}{\bar{\omega}_i\,\bar{\omega}_k} e^{-(n_i+n_k)t} \int_0^t\int_0^t e^{(n_i\tau_1+n_k\tau_2)}$$

$$\sin\bar{\omega}_i(t-\tau_1)\sin\bar{\omega}_k(t-\tau_2)\cos\beta_j(\tau_1^2-\tau_2^2)d\tau_1\, d\tau_2 \tag{65}$$

Wykorzystując tożsamości $\mathrm{Re}\, e^{ix} = \cos x$, $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, wyrażenie (65) można zapisać

$$K_{f_i f_k}(t,t) = -\sum_{j=1}^{K} \frac{B_j}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}_k} \mathrm{Re}\left(I_{(1)ik} + I_{(2)ik} - I_{(3)ik} - I_{(4)ik}\right) \qquad (66)$$

gdzie

$$I_{(1)ik} = e^{-(n_i+n_k)t+i(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)t} \int_0^t\int_0^t e^{i\beta_j\tau_1^2 + \tau_1(n_i-i\bar{\omega}_i)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-i\beta_j\tau_2^2 + \tau_2(n_k-i\bar{\omega}_k)}\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$I_{(2)ik} = e^{-(n_i+n_k)t-i(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_k)t} \int_0^t\int_0^t e^{i\beta_j\tau_1^2 + \tau_1(n_i+i\bar{\omega}_i)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-i\beta_j\tau_2^2 + \tau_2(n_k+i\bar{\omega}_k)}\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$I_{(3)ik} = e^{-(n_i+n_k)t + i(\bar{\omega}_k-\bar{\omega}_i)t} \int_0^t\int_0^t e^{i\beta_j\tau_1^2 + \tau_1(n_i+i\bar{\omega}_i)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-i\beta_j\tau_2^2 + {}_2(n_k-i\bar{\omega}_k)}\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$I_{(4)ik} = e^{-(n_i+n_k)t+i(\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_k)t} \int_0^t\int_0^t e^{i\beta_j\tau_1^2+\tau_1(n_i-i\bar{\omega}_i)}$$

$$e^{-i\beta_j\tau_2^2+\tau_2(n_k+i\bar{\omega}_k)}\, d\tau_1\, d\tau_2 \tag{67}$$

Wykonując zmianę zmiennych w ostatnich całkach za pomocą podstawień

$$z_{(1)i} = \frac{1}{2\sqrt{i\beta_j}}\left[n_i + i(2\beta_j\tau_1 - \bar{\omega}_i)\right], \quad z_{(1)0i} = \frac{1}{2\sqrt{i\beta_j}}(n_i - i\bar{\omega}_i)$$

$$z_{(2)k} = \frac{1}{2\sqrt{-i\beta_j}}\left[n_k - i(2\beta_j\tau_2 + \bar{\omega}_k)\right], \quad z_{(2)0k} = \frac{1}{2\sqrt{-i\beta_j}}(n_k - i\bar{\omega}_k)$$

$$z_{(3)i} = \frac{1}{2\sqrt{i\beta_j}}\left[n_i + i(2\beta_j\tau_1 + \bar{\omega}_i)\right], \quad z_{(3)0i} = \frac{1}{2\sqrt{i\beta_j}}(n_i + i\bar{\omega}_i) \tag{68}$$

$$z_{(4)k} = \frac{1}{2\sqrt{-i\beta_j}}\left[n_k - i(2\beta_j\tau_2 - \bar{\omega}_k)\right], \quad z_{(4)0k} = \frac{1}{2\sqrt{-i\beta_j}}(n_k + i\bar{\omega}_k)$$

otrzymuje się

$$I_{(1)ik} = \frac{1}{\beta_j}\left[W(z_{(1)i}) - e^{-z_{(1)i}^2 + z_{(1)0i}^2}\, W(z_{(1)0i})\right] \cdot$$

$$\cdot \left[W(z_{(2)k}) - e^{-z_{(2)k}^2 + z_{(2)0k}^2}\, W(z_{(2)0k})\right],$$

$$I_{(2)ik} = \frac{1}{\beta_j}\left[W(z_{(3)i}) - e^{-z_{(3)i}^2 + z_{(3)0i}^2}\, W(z_{(3)0i})\right] \cdot$$

$$\cdot \left[W(z_{(4)k}) - e^{-z_{(4)k}^2 + z_{(4)0k}^2}\, W(z_{(4)0k})\right],$$

$$I_{(3)ik} = \frac{1}{\beta_j}\left[W(z_{(3)i}) - e^{-z^2_{(3)i} + z^2_{(3)0i}} W(z_{(3)0i})\right] \cdot$$

$$\cdot \left[W(z_{(2)k}) - e^{-z^2_{(2)k} + z^2_{(2)0k}} W(z_{(2)0k})\right],$$

$$I_{(4)ik} = \frac{1}{\beta_j}\left[W(z_{(1)i}) - e^{-z^2_{(1)i} + z^2_{(1)0i}} W(z_{(1)0i})\right] \cdot$$

$$\cdot \left[W(z_{(4)k}) - e^{-z^2_{(4)k} + z_{(4)0k}} W(z_{(4)0k})\right]. \tag{69}$$

W zależnościach (69) $W(z)$ jest całką zespolonego argumentu o postaci

$$W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2}\, dx . \tag{70}$$

Całka ta jest stabelaryzowana, przy czym w tablicach [19] funkcji $W(z)$, przyjęto układ biegunowy ϱ, Θ. Część rzeczywistą funkcji $W(z)$ oznaczono $U(z)$ a urojoną $V(z)$ [19]. Wykorzystuje się następujące własności funkcji $U(z)$ i $V(z)$ [19]:

$$\begin{aligned} U(\varrho,-\Theta) &= U(\varrho,\Theta), \quad U(\varrho,\Theta+\pi) = -U(\varrho,\Theta), \\ V(\varrho,-\Theta) &= -V(\varrho,\Theta), \quad V(\varrho,\Theta+\pi) = -V(\varrho,\Theta). \end{aligned} \tag{71}$$

Podstawienia (68) wyrażają się poprzez ϱ, Θ w następujący sposób

$$\begin{aligned} z_{(1)i} &= \varrho_{(2)i}\, e^{i\Theta_{(2)i}}, \quad z_{(2)k} = \varrho_{(1)k}\, e^{-i\Theta_{(1)k}} \\ z_{(3)i} &= \varrho_{(1)i}\, e^{i\Theta_{(1)i}}, \quad z_{(4)k} = \varrho_{(2)k}\, e^{-i\Theta_{(2)k}} \end{aligned} \tag{72}$$

gdzie

$$\varrho_{(1)i,k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2\,\beta_j\,t + \bar{\omega}_{i,k})^2 + n_{i,k}^2}{\beta_j}}; \qquad \varrho_{(1)0i,k} = \frac{\bar{\omega}_{i,k}}{2\sqrt{\beta_j}}$$

$$\varrho_{(2)i,k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2\,\beta_j\,t - \bar{\omega}_{i,k})^2 + n_{i,k}^2}{\beta_j}}; \qquad \varrho_{(2)0i,k} = \frac{\bar{\omega}_{i,k}}{2\sqrt{\beta_j}} \tag{73}$$

$$\Theta_{(1)i,k} = \arctan\frac{2\beta_j\,t + \bar{\omega}_{i,k}}{n_{i,k}} - \frac{\pi}{4}; \qquad \Theta_{(1)0i,k} = \arctan\left(\frac{\bar{\omega}_{i,k}}{n_{i,k}}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$\Theta_{(2)i,k} = \arctan\frac{2\,\beta_j\,t - \bar{\omega}_{i,k}}{n_{i,k}} - \frac{\pi}{4}; \qquad \Theta_{(2)0i,k} = \arctan\left(-\frac{\bar{\omega}_{i,k}}{n_{i,k}}\right) - \frac{\pi}{4}$$

Można zauważyć, że

$$\varrho_{(1)0i,k} = \varrho_{(2)0i,k} = \varrho_{0i,k} = \frac{\bar{\omega}_{i,k}}{2\sqrt{\beta_j}}$$

Biorąc pod uwagę zależności (67), (68), (69), (71), (72), (73), równość (66) wyraża się

$$K_{f_i f_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{B_j}{4\,\bar{\omega}_i\bar{\omega}_k\beta_j}\Big[\left(S^+_{(1)k} - S^-_{(2)k}\right)\left(S^+_{(1)i} - S^-_{(2)i}\right) + \\ + \left(T^+_{(1)k} - T^-_{(2)k}\right)\left(T^+_{(1)i} - T^-_{(2)i}\right)\Big] \tag{74}$$

gdzie

$$S^{\pm}_{(\alpha)i,k} = U(\varrho_{(\alpha)i,k}, \Theta_{(\alpha)i,k}) - e^{-n_{i,k}t}\Big[U(\varrho_{0i,k}, \Theta_{(\alpha)0i,k})$$

$$\cos(\beta_j t^2 \pm \bar{\omega}_{i,k} t) + V(\varrho_{0i,k}, \Theta_{(\alpha)0i,k}) \sin(\beta_j t^2 \pm \bar{\omega}_{i,k} t)\Big] \tag{75}$$

$$T^{\pm}_{(\alpha)i,k} = V(\varrho_{(\alpha)i,k}, \Theta_{(\alpha)i,k}) + e^{-n_{i,k}t}\Big[U(\varrho_{0i,k}, \Theta_{(\alpha)0i,k}) \cdot$$

$$\sin(\beta_j t^2 \pm \bar{\omega}_{i,k} \cdot t) - V(\varrho_{0i,k}, \Theta_{(\alpha)0i,k}) \cos(\beta_j t^2 \pm \bar{\omega}_{i,k} t)\Big] \tag{76}$$

przy czym $\alpha = 1,2$.

Zauważmy, że w przypadku pominięcia korelacji wzajemnej $i=k$, zależność (74) upraszcza się do postaci

$$K_{f_i f_i}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{B_j}{4\bar{\omega}_i^2 \beta_j} \Big[(S^{+}_{(1)i} - S^{-}_{(2)i})^2 + (T^{+}_{(1)i} - T^{-}_{(2)i})^2\Big] \tag{74a}$$

W celu obliczenia funkcji $W(z)$ można wykorzystać znane rozwinięcia tej funkcji w szeregi i na ułamki nieskończone lub wykorzystać odpowiednie równania różniczkowe [19]. Wyniki na maszynie cyfrowej uzyskuje się wtedy szybciej i są dokładniejsze. Za pracą [19] przytoczono rozwinięcie funkcji $W(z)$ w szereg Taylora dla małych $|z|$ oraz w szereg asymptotyczny dla dużych wartości $|z|$. Szeregi te mają postać

dla $\varrho < 2$

$$U(\varrho,\Theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \varrho^{2k+1}}{(2k+1)} \cos(2k+1)\Theta,$$

$$V(\varrho,\Theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \varrho^{2k+1}}{(2k+1)} \sin(2k+1)\Theta, \tag{77}$$

dla $\varrho > 2$

$$U(\varrho,\Theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\varrho^2 \cos 2\Theta} \sin(\varrho^2 \sin 2\Theta) + \frac{1}{2\varrho} \cos\Theta +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \varrho^{2k-1}} \cos (2k-1)\Theta , \tag{78}$$

$$V(\varrho,\Theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\varrho^2 \cos 2\Theta} \cos(\varrho^2 \sin 2\Theta) - \frac{1}{2\varrho} \sin\Theta -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \varrho^{2k-1}} \sin(2k-1)\Theta .$$

Należy tu zaznaczyć, że szeregi asymptotyczne (78) zachowują ważność w górnej półpłaszczyźnie zespolonej tj. $0<\Theta<\pi$, natomiast wzory redukcyjne (71) pozwalają wyznaczyć wartości funkcji $W(z)$ w pozostałym sektorze.

Analogicznie można rozpatrzyć pewną klasę wymuszeń lokalnie stacjonarnych o funkcji korelacyjnej

$$K_{Q_iQ_k}(\tau_1,\tau_2) = \sum_{j=1}^{K} B_j e^{-\alpha_j(\tau_1^2+\tau_2^2)} \tag{79}$$

Wymuszenia tego rodzaju mają zastosowania przy badaniu drgań rozruchowych korpusów rakiet, wywołane aerodynamicznym polem zewnętrznym podczas fazy maksymalnych dynamicznych ciśnień [6], [7]. Biorąc pod uwagę zależność (79) dla funkcji $K_{f_if_k}(t,t)$, otrzymuje się

$$K_{f_if_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{B_j}{\bar{\omega}_i\bar{\omega}_k} e^{-(n_i+n_k)t} \int_0^t\int_0^t e^{-\alpha_j(\tau_1^2+\tau_2^2) + n_i\tau_1 + n_k\tau_2}$$

$$\sin\bar{\omega}_i(t-\tau_1)\sin\bar{\omega}_k(t-\tau_2)d\tau_1\, d\tau_2 \tag{80}$$

Postępując analogicznie jak przy wyprowadzaniu wyrażeń (74), (74a) wartość $K_{f_i f_k}(t,t)$ przedstawia się wzorem

$$K_{f_i f_k}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{B_j}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}_k \alpha_j} \Bigg\{ U\Big(\varrho_i, \Big|\arctan \frac{n_i - 2\alpha_j t}{\bar{\omega}_i}\Big|\Big) e^{-\alpha_j t^2} +$$

$$+ e^{-n_i t} \Big[V\Big(\frac{\omega_i}{2\alpha_j}, \arctan \frac{n_i}{\bar{\omega}_i}\Big) \sin \bar{\omega}_i t -$$

$$- U\Big(\frac{\omega_i}{2\alpha_j}, \arctan \frac{n_i}{\bar{\omega}_i}\Big) \cos \bar{\omega}_i t \Big] \Bigg\} \cdot$$

$$\Bigg\{ U\Big(\varrho_k, \Big|\arctan \frac{n_k - 2\alpha_j t}{\bar{\omega}_k}\Big|\Big) e^{-\alpha_j t^2} +$$

$$+ e^{-n_k t} \Big[V\Big(\frac{\omega_k}{2\alpha_j}, \arctan \frac{n_k}{\bar{\omega}_k}\Big) \sin \bar{\omega}_k t - U\Big(\frac{\omega_k}{2\alpha_j}, \arctan \frac{n_k}{\bar{\omega}_k}\Big) \cdot$$

$$\cdot \cos \bar{\omega}_k t \Big] \Bigg\} \tag{81}$$

gdzie

$$\varrho_{i,k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\alpha_j t - n_{i,k})^2 + \bar{\omega}_{i,k}^2}{\alpha_j}}$$

Pomijając korelację wzajemną między poszczególnymi formami drgań, wyrażenie (81) przyjmuje formę

$$K_{f_i f_i}(t,t) = \sum_{j=1}^{K} \frac{B_i}{\bar{\omega}_i^2 \alpha_j} \left\{ U(\varrho_i, \left| \arctan \frac{n_i - 2\alpha_j t}{\bar{\omega}_i} \right|) e^{-\alpha_j \cdot t^2} + \right.$$

$$\left. + e^{-n_i t} \left[V\left(\frac{\omega_i}{2\alpha_j}, \arctan \frac{n_i}{\bar{\omega}_i}\right) \sin \bar{\omega}_i t - U\left(\frac{\omega_i}{2\sqrt{\alpha_j}}, \arctan \frac{n_i}{\bar{\omega}_i}\right) \cos \bar{\omega}_i \cdot t \right] \right\}^2 \tag{81a}$$

Wariancje wyjściowego pola losowego wyrażają się znanymi zależnościami (55) lub w przypadku pominięcia korelacji pomiędzy formami drgań, zależnością (59).

Przykład 3

Reakcja ciągłego układu dynamicznego na wymuszenia falowe

Posługując się podanym w p. 1.1.3 wyrażeniem przedstawiającym funkcję korelacyjną wymuszenia falowego (23) można wyznaczyć reakcję ciągłego układu dynamicznego na podstawie wzorów (38), (41). W zależności od tego, czy funkcja $\tilde{f}_j(\tau)$ jest funkcją liniową, czy też nie, mówimy o stacjonarnym, jednorodnym polu losowym lub niestacjonarnym, jednorodnym wejściowym polu losowym. Dalej będziemy się zajmować wymuszeniem falowym o jednostajnie zmiennej częstości, którego funkcja korelacyjna wyraża się

$$K_{qq}(\bar{x}_1, \tau_1, \bar{x}_2, \tau_2) = \sum_{j=1}^{K} B_j \cos\left[\beta_j(\tau_1^2 - \tau_2^2) - \right.$$

$$\left. - \gamma_j\left(\frac{x_1 - x_2}{c_x} + \frac{y_1 - y_2}{c_y} + \frac{z_1 - z_2}{c_z}\right)\right] \tag{82}$$

gdzie

$$\bar{x} = [x, y, z].$$

Z fizykalnego punktu widzenia, wymuszenie takie występuje w analizie niestacjonarnych zjawisk w technice (rozruch, niestacjonarne zmiany pulsacji ciśnienia itp.). W dalszym ciągu zajmiemy się reakcją zamkniętej powłoki cylindrycznej, zamocowanej przegubowo-przesuwnie na wymuszenie falowe, którego funkcja korelacji (82) upraszcza się do postaci

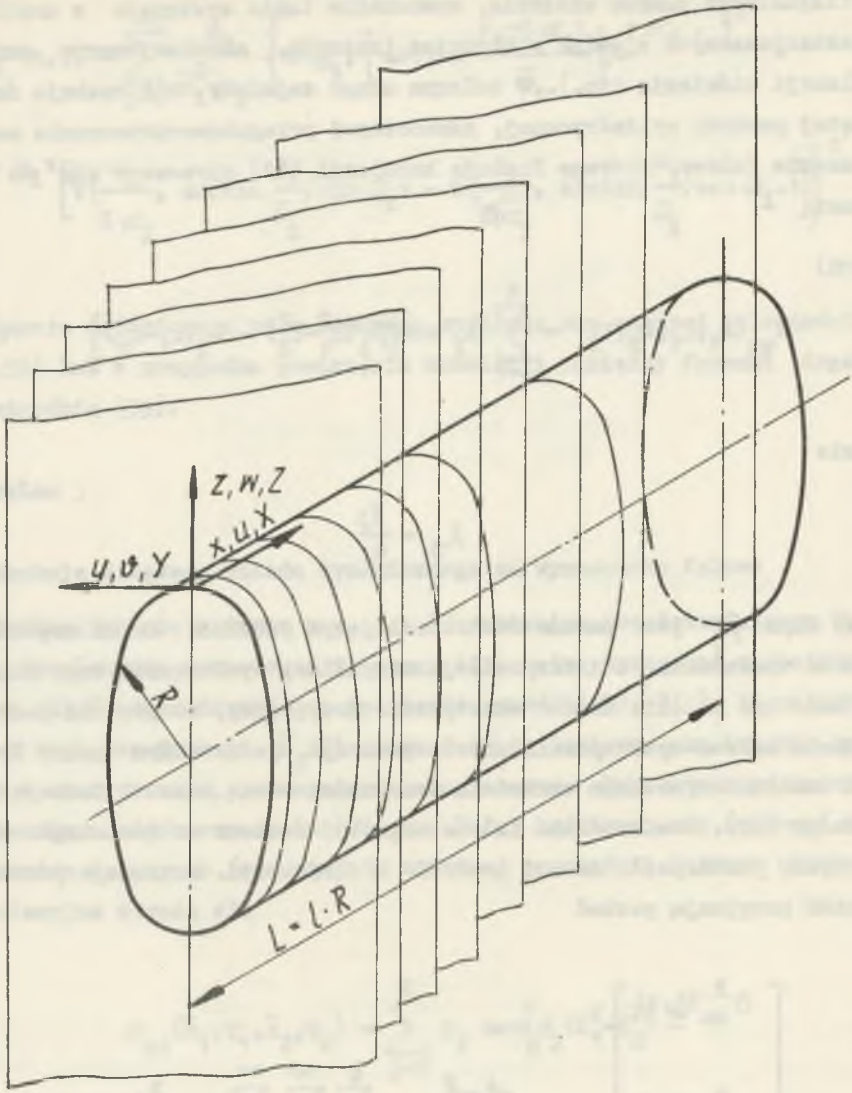
$$K_{qq}(x_1,\tau_1,x_2,\tau_2) = \sum_{j=1}^{K} B_j \cos\left[\beta_j(\tau_1^2-\tau_2^2) - \lambda_j(x_1-x_2)\right] \tag{83}$$

gdzie

$$\lambda_j = \frac{\gamma_j}{c_x}$$

przy czym β_j jest parametrem określającym prędkość zmian częstości źródła wymuszenia. W interpretacji fizykalnej wymuszeniem tego rodzaju może być dalekie źródło akustyczne. Przyjmijmy, że powłoka jest obciążona kołowo-symetrycznie niestacjonarnym, jednorodnym polem losowym scharakteryzowanym wartością oczekiwaną równą zeru i funkcją korelacji (83). Powierzchnie falowe mogą być uważane za równoległe płaszczyzny prostopadłe do osi powłoki x (rys. 13). Wariancje przemieszczeń przyjmują postać

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{uu}(\xi,t) \\ \sigma^2_{vv}(\xi,t) \\ \sigma^2_{ww}(\xi,t) \end{bmatrix} = \frac{R^4\pi^2}{(\pi L R \varrho_p h)^2} \sum_{j=1}^{K}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_j}{\beta_j \bar{\omega}_{m0}\bar{\omega}_{r0}}$$



Rys. 13

$$\begin{bmatrix} \frac{\Phi_u(m,0)\Phi_u(r,0)}{G_w(m,0)G_w(r,0)} \cos\frac{m\pi\xi}{l}\cos\frac{r\pi\xi}{l} \\ 0 \\ \sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin\frac{r\pi\xi}{l} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot\left\{ C_{m0\ r0}(t)\left[K_m K_r - L_m L_r\right] + D_{m0\ r0}(t)\left[L_m K_r - K_m L_r\right]\right\} \tag{84}$$

gdzie

$$C_{m0\ r0}(t) = C_{mn\ rs}(t)\Big|_{\substack{n=0\\s=0}} \qquad D_{m0\ r0}(t) = D_{mn\ rs}(t)\Big|_{\substack{n=0\\s=0}}$$

przy czym

$$C_{mn\ rs}(t) = \left[S^{+}_{(1)mn} - S^{-}_{(2)mn}\right]\left[S^{+}_{(1)rs} - S^{-}_{(2)rs}\right] +$$

$$+\left[T^{+}_{(1)rs} - T^{-}_{(2)rs}\right]\left[T^{+}_{(1)mn} - T^{-}_{(2)mn}\right],$$

$$D_{mn\ rs}(t) = \left[S^{+}_{(1)mn} - S^{-}_{(2)mn}\right]\left[T^{+}_{(1)rs} - T^{-}_{(2)rs}\right] +$$

$$-\left[S^{+}_{(1)rs} - S^{-}_{(2)rs}\right]\left[T^{+}_{(1)mn} - T^{-}_{(2)mn}\right].$$

Wyrażenia $S^{\pm}_{(\alpha)mn,rs}$, $T^{\pm}_{(\alpha)mn,rs}$ otrzymuje się z zależności (75), (76) po zmianie pojedynczych indeksów i,k na podwójne mn,rs tzn.

$$S^{\pm}_{(\alpha)i,k} \longrightarrow S^{\pm}_{(\alpha)mn,rs}$$

$$T^{\pm}_{(\alpha)i,k} \longrightarrow T^{\pm}_{(\alpha)mn,rs}$$

gdzie

$$\alpha = 1;2$$

Wyrażenia $L_{m,r}$ i $K_{m,r}$ mają postać

$$L_{\varkappa} = \frac{\frac{\varkappa\pi}{l}(-1)^{\varkappa}\sin\lambda_j l}{\left(\frac{\varkappa\pi}{l}\right)^2 - \lambda_j^2}$$

$$K_{\varkappa} = \frac{\frac{\varkappa\pi}{l}\left[1 - (-1)^{\varkappa}\cos\lambda_j l\right]}{\left(\frac{\varkappa\pi}{l}\right)^2 - \lambda_j^2}$$

przy $\varkappa = m,r$.

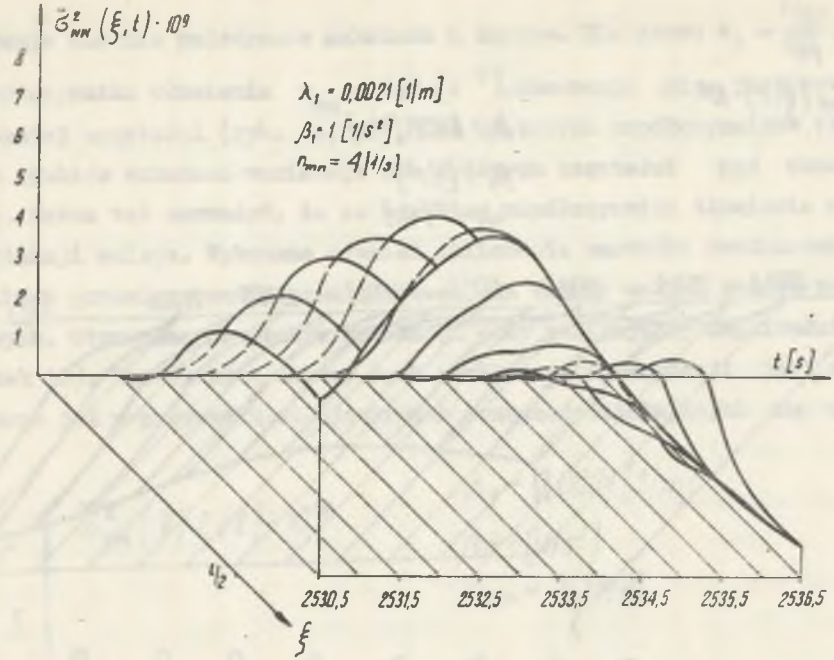
Dla identycznych parametrów powłoki jak poprzednio dokonano obliczeń numerycznych zredukowanej wariancji przemieszczenia promieniowego przyjmując $j = 1$

$$\tilde{\sigma}^2_{ww}(\xi,t) = \sigma^2_{ww}(\xi,t)(\varrho_p^2 h^2 L R/B_1) \tag{85}$$

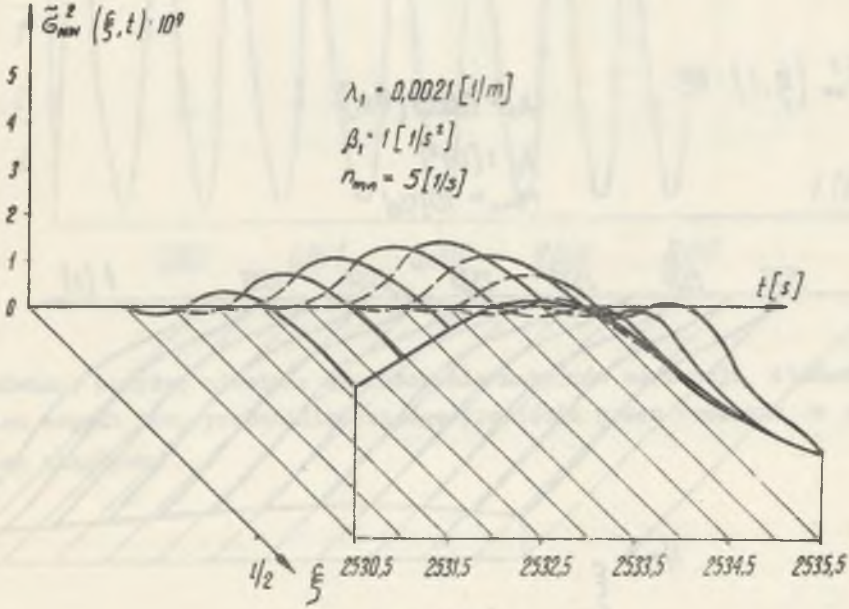
Przyjęto $\beta_1 = 1\left[1/s^2\right]$, $\lambda_1 = 0{,}0021\ \left[1/m\right]$ oraz zmienną wartość współczynnika tłumienia $n_{mn} = 4;\ 5;\ 7;\ 10\ \left[1/s\right]$. Wariancję zredukowaną przemieszczenia promieniowego w czasie t i współrzędnej ξ ilustrują wykresy na rys. 14, 15, 16, 17. Na wykresach tych obserwuje się interesujące maksima wariancji dla czasów

$$t_m \approx \frac{\bar{\omega}_{m0}}{2\beta_1} \approx \frac{\omega_{m0}}{2\beta_1}$$

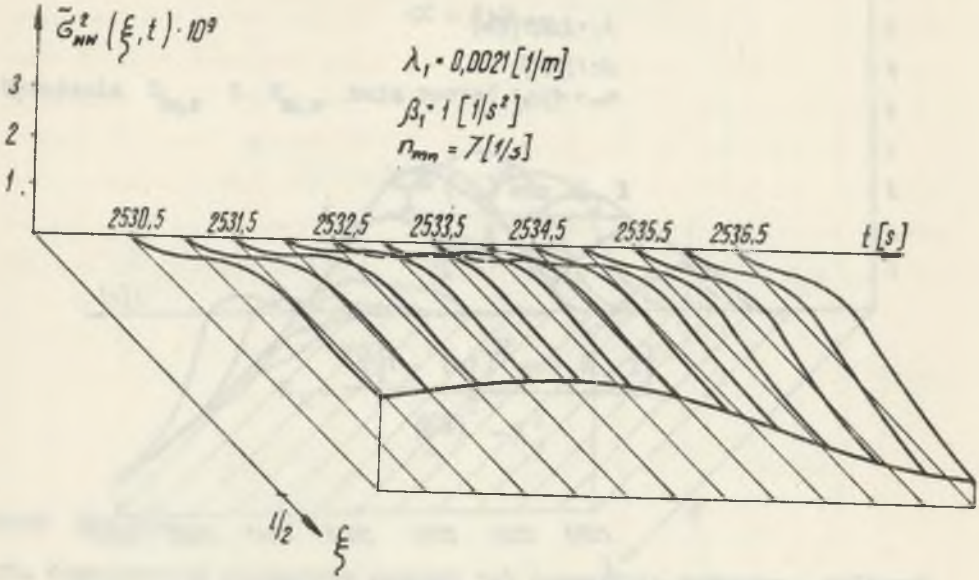
Maksima te są wynikiem rezonansu między chwilową częstością pobudzenia a częstościami własnymi układu ciągłego jakim jest powłoka. Z uwagi na fakt, że dwie pierwsze częstości własne powłoki są prawie równe $\omega_{10} = 5063{,}8\ \left[s^{-1}\right]$, $\omega_{20} = 5064{,}44\ \left[s^{-1}\right]$, dla czasów $t_{1,2} = \frac{\omega_{10}, \omega_{20}}{2\beta_1}$ ob-


$\tilde{\sigma}^2_{mn}(\xi,t)\cdot 10^9$
$\lambda_1 = 0{,}0021\,[1/m]$
$\beta_1 = 1\,[1/s^2]$
$n_{mn} = 4\,[1/s]$
t [s]
1/2
ξ
2530,5
2531,5
2532,5
2533,5
2534,5
2535,5
2536,5

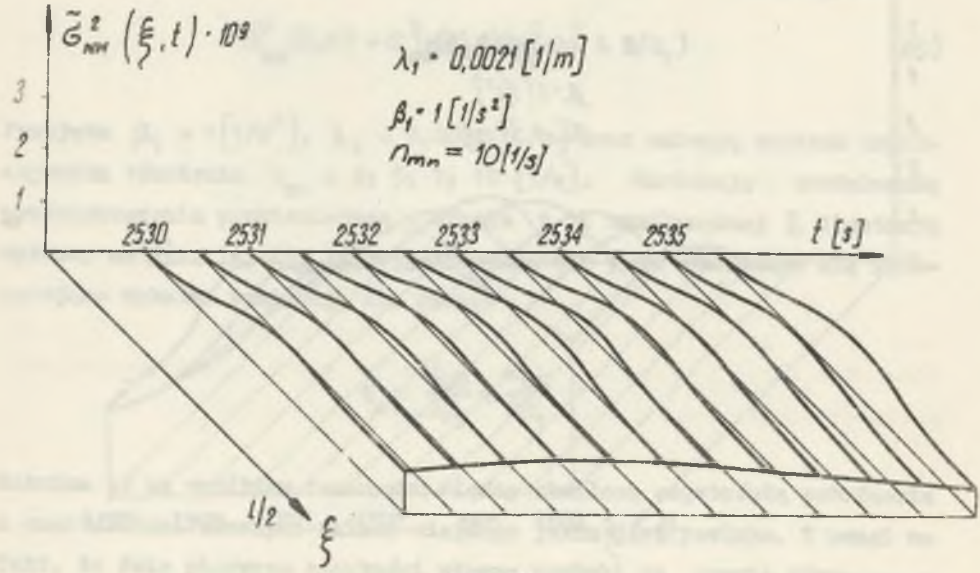
Rys. 14


$\tilde{\sigma}^2_{mn}(\xi,t)\cdot 10^9$
$\lambda_1 = 0{,}0021\,[1/m]$
$\beta_1 = 1\,[1/s^2]$
$n_{mn} = 5\,[1/s]$
t [s]
1/2
ξ
2530,5
2531,5
2532,5
2533,5
2534,5
2535,5

Rys. 15

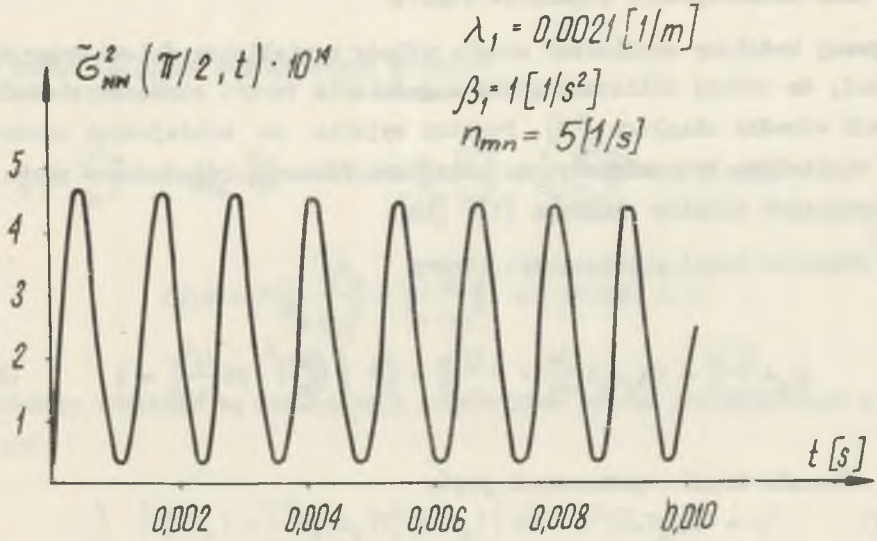

$\tilde{\sigma}^2_{nn}(\xi,t)\cdot 10^9$
$\lambda_1 = 0{,}0021\,[1/m]$
$\beta_1 = 1\,[1/s^2]$
$n_{mn} = 7\,[1/s]$
3
2
1
2530,5
2531,5
2532,5
2533,5
2534,5
2535,5
2536,5
t [s]
l/2
ξ

Rys. 16


$\tilde{\sigma}^2_{nn}(\xi,t)\cdot 10^9$
$\lambda_1 = 0{,}0021\,[1/m]$
$\beta_1 = 1\,[1/s^2]$
$n_{mn} = 10\,[1/s]$
3
2
1
2530
2531
2532
2533
2534
2535
t [s]
l/2
ξ

Rys. 17

serwuje się nie pojedyncze maksimum a łączne. Dla czasu $t_3 = \frac{\omega_{30}}{2\beta_1}$, przy współczynniku tłumienia $n_{mn} = 4{,}5\ [s^{-1}]$, obserwuje się jeszcze wpływ trzeciej częstości (rys. 14, 15). Dla większych współczynników tłumienia efektów wzbudzeń wariancji dla wyższych częstości nie obserwuje się. Można też zauważyć, że ze wzrostem współczynnika tłumienia poziom wariancji maleje. Wykonano również obliczenia wartości zredukowanej wariancji przemieszczenia promieniowego dla bardzo małych czasów początkowych. Otrzymano oscylacje wariancji przy zanikającej amplitudzie (rysunek 18). Wyjaśnienie natury tych zanikających oscylacji jest analogiczne jak w przypadku stacjonarnych wymuszeń działających na układ.



Rys. 18

Omówione powyżej zjawisko występowania maksimów wariancji stanowi pewien aspekt tzw. probabilistycznego przejścia przez rezonans w układach ciągłych.

1.2. Metody korelacyjne i spektralne badania reakcji nieliniowych układów ciągłych

1.2.1. Nieliniowe równania wyjściowe opisujące modele układów ciągłych

Nieliniowości występujące w ciągłych układach mechanicznych można podzielić zasadniczo na trzy rodzaje [18]:

a) natury geometrycznej

b) natury fizycznej (materiałowej)

c) natury pozamechanicznej (sprzężenie z układami elektrycznymi, układami automatycznej regulacji itp.).

W pracy będziemy analizować ciągłe układy z nieliniowościami grupy pierwszej, do której zaliczamy pewne zagadnienia teorii skończonych deformacji ośrodka ciągłego [18]. Punktem wyjścia do niniejszych rozważań są nieliniowe deterministyczne cząstkowe równania różniczkowe ruchu następujących układów ciągłych [1], [18]:

a) równanie drgań poprzecznych struny

$$\varrho_p A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p A \frac{\partial w}{\partial t} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{AE}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q, \tag{86}$$

b) równanie drgań poprzecznych pręta

$$\varrho_p A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p A \frac{\partial w}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{AE}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q, \tag{87}$$

c) równania drgań poprzecznych membrany

$$\varrho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w}{\partial t} - h\, N(w,\Phi) = q,$$

$$\Delta\Delta \Phi + \frac{E}{2} N(w,w) = 0, \tag{88}$$

gdzie $N(w,\Phi)$ jest tzw. operatorem KARMANa o postaci

$$N(w,\Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \tag{89}$$

d) równania drgań poprzecznych płyty

$$\begin{gathered} \varrho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta\Delta w - h\, N(w,\Phi) = q, \\ \Delta\Delta\Phi + \frac{E}{2} N(w,w) = 0 \quad , \end{gathered} \tag{90}$$

e) równania drgań poprzecznych powłok

$$\begin{gathered} \varrho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta\Delta w - h\left(\frac{1}{R_x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) - h\, N(w,\Phi) = q, \\ \Delta\Delta\Phi + E\left(\frac{1}{R_x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{2} N(w,w) = 0. \end{gathered} \tag{91}$$

Powyższe równania są szczególnym przypadkiem równań różniczkowych o postaci

$$\sum_i \left[P_i^n(D_t) + \sum_s Q_s^n(D_t) L_i^s(\bar{x},D_x)\right] u^i + N^n(\bar{x},D_x,\bar{u}) = q^n \tag{92}$$

gdzie $N^n(\bar{x},D_x,u)$ jest macierzą nieliniowych operatorów.
Warunki początkowe i brzegowe przyjmijmy identyczne jak dla układu (11), tzn. (12) i (13).

1.2.2. Linearyzacja równań opisujących układy ciągłe

Ścisłe rozwiązanie deterministyczne problemów nieliniowych drgań wymuszonych ciągłych układów na ogół nie jest możliwe. Najbardziej efektywnymi i najczęściej stosowanymi metodami przybliżonymi są metody GA-

LERKINa i metoda małego parametru [18]. Można też wykorzystać inne metody, którymi również posłużymy się w pracy. Zakładając istnienie rozwiązania równań różniczkowych (92) dla przemieszczenia poprzecznego w postaci

$$w(\bar{x},t) = \sum_k f_k(t)\, w_k(\bar{x}) \tag{93}$$

gdzie $w_k(\bar{x})$ jest ortogonalnym układem funkcji, spełniającym warunki brzegowe (13), można otrzymać układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na $f_k(t)$

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + 2n_k \frac{df_k}{dt} + \omega^2_{k(1)} f_k + F_k(f_1, f_2 \ldots) = Q_k \tag{94}$$

gdzie

F_k nieliniowe funkcje f_k,

$\omega_{k(1)}$ częstości własne liniowego przybliżenia,

Q_k siły uogólnione.

Na ogół nie jest znane również rozwiązanie układu (94) z uwagi na nieliniową postać funkcji $F_k(f_1, f_2 \ldots)$. Można szukać przybliżonego rozwiązania układu (94), wykorzystując metodę aproksymacji funkcji. Stosując aproksymację należy podać kryterium, które umożliwi znalezienie funkcji aproksymującej najlepszej. Charakter kryteriów jest różny w zależności od przyjętych założeń.

Załóżmy, że funkcja aproksymująca ma postać

$$\Gamma(K_1, K_2, \ldots, f_1, f_2) = \sum_i K_i f_i \tag{95}$$

gdzie $K_1, K_2, \ldots$ jest zbiorem współczynników, które można dobrać w zależności od przyjętego kryterium. W dalszych rozważaniach przyjmiemy jako kryterium średni błąd kwadratowy.

Błąd ten można zapisać

$$\varepsilon(K_1,K_2,\ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_k(f_1,f_2,\ldots) - \sum_i K_i f_i\right]^2 \cdot$$

$$\cdot\, p(f_1,f_2,\ldots)df_1 df_2\ldots \tag{96}$$

Z ostatniej zależności widać, że zagadnienie znajdywania najlepszej funkcji aproksymującej sprowadza się do szukania minimum funkcji $\varepsilon(K_1, K_2,\ldots)$. W celu uproszczenia dalszych rozważań załóżmy, że z wyjątkiem $i = k$, $K_i = 0$ tj. średni błąd kwadratowy przyjmuje wtedy formę

$$\epsilon(K_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_k(f_1,f_2,\ldots) - K_k f_k\right]^2 p(f_1,f_2,\ldots)df_1 df_2\ldots \tag{96a}$$

skąd

$$K_k = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_k^2\, p(f_1,f_2,\ldots)df_1 df_2\ldots\right]^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} F_k(f_1,f_2,\ldots)f_k\, p(f_1,f_2,\ldots)df_1 df_2\ldots \tag{96b}$$

gdzie $p(f_1,f_2,\ldots)$ oznacza łączną gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wielkości f_k. W ten sposób układ (94) można sprowadzić do postaci

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + 2n_k \frac{df_k(t)}{dt} + \left[\omega_{k(1)}^2 + K_k(t)\right] f_k(t) = Q_k(t) \tag{97}$$

Omówiony wyżej sposób linearyzacji równań (94) nosi też nazwę linearyzacji stochastycznej. Przyjmując tłumienie podkrytyczne $n_k < \sqrt{\omega^2_{k(1)} + K_k(t)}$ oraz zakładając, że $K_k(t)$ dla każdego czasu t jest znacznie mniejsze w porównaniu z $\omega^2_{k(1)}$, można do równań (97) stosować aparat analizy korelacyjnej i spektralnej pól losowych omówiony w p. 1.1.

Inną metodą analizy układów opisanych równaniami (92) jest metoda małego parametru [15] w której poszukuje się rozwiązania w postaci

$$u^i(\bar{x},t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\psi^i(k)} u^i_k(\bar{x},t) \tag{98}$$

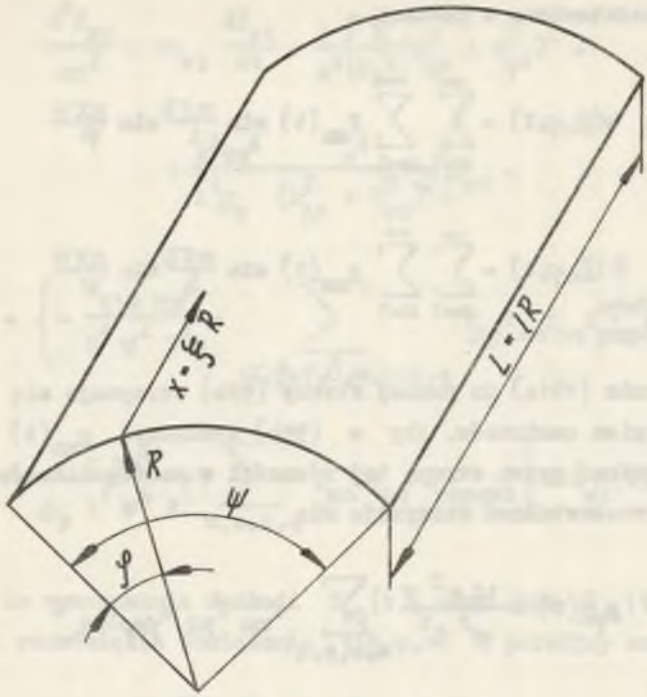
gdzie ε jest małym parametrem. Funkcje $\psi^i(k)$ w zależności (98) są dobierane zależnie od budowy układu (92), często jest to ciąg liczb parzystych lub nieparzystych. Można zauważyć, że przedstawione tu metody przybliżone pozwalają analogicznie jak w p. 1.1, na analizę niestacjonarności wyjściowych pól losowych.

1.2.3. Metody wyznaczania reakcji nieliniowych powłok na przestrzenno-czasowe pola losowe

W celu ilustracji poprzednich rozważań, rozpatrzono nieliniowe drgania poprzeczne cienkiej powłoki cylindrycznej, której równania otrzymano z układu (91) przy przyjęciu $R_x \to \infty$, $R_y = R$. Założono, że powłoka (rys. 19) jest wykonana z jednorodnego materiału o gęstości ϱ_p oraz ugięcie jest porównywalne z grubością powłoki h, lecz małe w stosunku do pozostałych wymiarów $L = l \cdot R$, $a = \psi \cdot R$.
Równania dynamiki powłoki (91) przyjmują postać

$$\varrho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{D}{R^4}\Delta\Delta w - \frac{h}{R^3}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - h\, N(w,\Phi) = q\,, \tag{99a}$$

$$\frac{1}{ER^4}\Delta\Delta\Phi + \frac{1}{R^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} N(w,w) = 0\,, \tag{99b}$$



Rys. 19

gdzie

$$N(w,\Phi)=\frac{1}{R^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\varphi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\varphi}\right)$$

przy czym ξ, φ są bezwymiarowymi współrzędnymi w kierunkach wzdłużnym i stycznym odpowiednio. Przyjmijmy następujące warunki brzegowe

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}=0 \quad \text{dla} \quad \xi=0,1$$

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0 \quad \text{dla} \quad \varphi=0,\psi \tag{100}$$

Warunki te w interpretacji fizycznej oznaczają zerowanie się ugięcia, momentu gnącego i normalnych naprężeń w płaszczyźnie środkowej na brze-

gach powłoki. Biorąc pod uwagę warunki brzegowe (100) wielkości w i Φ mogą być przedstawione w postaci

$$w(\xi,\varphi,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\varphi}{\psi} \tag{101a}$$

$$\Phi(\xi,\varphi,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t)\sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\varphi}{\psi} \tag{101b}$$

Po podstawieniu (101a) do prawej strony (99b) otrzymuje się składniki będące szeregiem cosinusów. Aby z (99b) wyznaczyć $g_{mn}(t)$ należy uprzednio rozwinąć prawą stronę tej równości w szereg sinusów. Po wykonaniu tych przekształceń otrzymuje się

$$g_{\gamma\delta}(t) = \frac{16\pi^2 E}{\psi^2 l^2}\sum_{m,n,p,q} f_{mn} f_{pq} B_{\gamma mp\delta nq} + \frac{RE\pi^2}{l^2} f_{\gamma\delta}\frac{\gamma^2}{(k^2_{\xi\gamma}+k^2_{\varphi\delta})^2} \tag{102}$$

gdzie

$$B_{\gamma mp\delta nq} = \frac{\gamma mp\delta nq\, A_{\gamma mp\delta nq}}{(k^2_{\xi\gamma}+k^2_{\varphi\delta})^2\, A_{\gamma mp\gamma mp}\, A_{\delta nq\delta nq}} \tag{102a}$$

$$A_{\gamma mp\delta nq} = (\gamma^2 - m^2 - p^2)(\delta^2 - n^2 - q^2) - 4m^2q^2, \tag{102b}$$

$$k_{\xi\gamma} = \frac{\gamma\pi}{l}, \quad k_{\varphi\delta} = \frac{\delta\pi}{\psi}$$

przy czym sumowanie w (102) jest wykonywane tylko wtedy, gdy $\gamma + m + p$ i $\delta + n + q$ są nieparzyste. Podstawienie (102) i (101a) do (99a) pozwala otrzymać układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2 f_{st}}{dt^2} + 2n_{st}\frac{df_{st}}{dt} + \frac{1}{R^4}\left[\frac{D}{\varrho_p h}(k_{\xi s}^2 + k_{\varphi t}^2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2 E\pi^4}{l^4 \varrho_p}\frac{s^4}{(k_{\xi s}^2 + k_{\varphi t}^2)^2}\right] f_{st} +$$

$$+ \left\{ - \frac{512\, E\pi^4}{R^4 \psi^4 l^4 \varrho_p} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,m,n,p,q} f_{\alpha\beta} f_{mn} f_{pq} C^{s\gamma\alpha t\delta\beta}_{\gamma mp\delta nq} \right.$$

$$\left. + \frac{8\, E\pi^4}{\varrho_p l^4 \psi^4 R^3} \sum_{m,n,p,q} f_{mn} f_{pq} D_{mpqst} \right\} = Q_{st}(t) \qquad (103)$$

służących do wyznaczania funkcji $f_{st}(t)$, przy czym $Q_{st}(t)$ są współczynnikami rozwinięcia obciążenia $q(\xi,\varphi,t)$ w podwójny szereg sinusów

$$Q_{st} = \frac{4}{\varrho_p h \psi l}\int_0^{\psi}\int_0^{l} q(\xi,\varphi,t)\sin\frac{s\pi\xi}{l}\sin\frac{t\pi\varphi}{\psi}\, d\xi\, d\varphi \qquad (104)$$

przy czym

$$C^{s\gamma\alpha t\delta\beta}_{\gamma mp\delta nq} = \frac{s\gamma\alpha t\delta\beta\left[2(\delta^2\alpha^2 - \gamma^2\beta^2) - A_{s\gamma\alpha t\delta\beta}\right] B_{\gamma mp\delta nq}}{A_{s\gamma\alpha s\gamma\alpha} A_{t\delta\beta t\delta\beta}} \qquad (105)$$

$$D_{mpqst} = \frac{stmpq}{A_{smpsmp}\, A_{tnqtnq}}$$

$$\left\{ \frac{2\, A_{smptnq}\, s^2}{(k_{\xi s}^2 + k_{\varphi t}^2)^2} - \frac{4\, p^2\left[2(n^2 p^2 - m^2 q^2) - A_{smptnq}\right]}{(k_{\xi p}^2 + k_{\varphi q}^2)^2} \right\} \qquad (106)$$

Minimalizując średni błąd kwadratowy (96a), można wyznaczyć współczynniki K_{st} dla zadanej łącznej gęstości prawdopodobieństwa $p(f_{11}, f_{12}\ldots)$

$$K_{st} = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{st}^2\, p(f_{11}, f_{12}, \ldots) df_{11}\, df_{12}\ldots\right]^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{512\, E\pi^4}{\psi^4\, l^4\, \varrho_p} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,m,n,p,q} f_{\alpha\beta} f_{mn} f_{pq} c^{s\gamma\delta t\delta\beta}_{\gamma mp\delta nq} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\, R\, E\pi^4}{\psi^4\, l^4\, \varrho_p} \sum_{m,n,p,q} f_{mn} f_{pq} D_{mnpqst}\right) f_{st}\, p(f_{11}, f_{12}, \ldots) df_{12} df_{12}\ldots \tag{107}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\omega_{st}^2 = \frac{1}{R^4}\left[\frac{D}{\varrho_p h}(k_{\xi s}^2 + k_{\varphi t}^2)^2 + \frac{R^2 E\pi^4}{\varrho_p l^4}\frac{s^4}{(k_{\xi s}^2 + k_{\varphi t}^2)^2} + K_{st}\right] \tag{108}$$

uzyskuje się zlinearyzowany układ równań drugiego rzędu

$$\frac{d^2 f_{st}}{dt^2} + 2\, n_{st}\frac{df_{st}}{dt} + \omega_{st}^2 f_{st} = Q_{st}(t) \tag{109}$$

Wykorzystując podane w p. 1.2.2 założenia, że dla każdego czasu t współczynniki K_{st} są małe w porównaniu do $\omega_{st(1)}$ oraz przyjmując istnienie tłumienia podkrytycznego $n_{st} < \omega_{st}$, funkcja przejścia ma postać podaną zależnością (37). Funkcja korelacyjna sił uogólnionych (104) wyznaczana zależnością (40) wyraża się

$$K_{Q_{st}Q_{\alpha\beta}}(\tau_1,\tau_2) = \left(\frac{4}{\varrho_p h\psi l}\right)^2 \int_0^{\psi}\int_0^{l}\int_0^{\psi}\int_0^{l} K_{qq}(\xi_1,\varphi_1,\tau_1,\xi_2,\varphi_2,\tau_2)$$

$$\sin\frac{s\pi\xi_1}{l}\sin\frac{t\pi\varphi_1}{\psi}\sin\frac{\alpha\pi\xi_2}{l}\sin\frac{t\pi\varphi_2}{\psi}\,d\xi_1 d\varphi_1 d\xi_2 d\varphi_2 \tag{110}$$

gdzie $K_{qq}(\xi_1,\varphi_1,\tau_1,\xi_2,\varphi_2,\tau_2)$ jest funkcją korelacyjną wejściowego pola losowego obciążenia. Zauważmy, że w zależności od postaci funkcji korelacyjnej obciążenia, a tym samym funkcji korelacyjnej sił uogólnionych, można wyznaczyć funkcję korelacyjną wyjściowego pola losowego, a następnie wariancję w sposób analogiczny jak w liniowych układach ciągłych.

Przykłady konkretnych obliczeń

W dalszym ciągu wykorzystamy omówione w p. 1.1.3 rodzaje pobudzeń i omówimy wyznaczanie reakcji na niektóre z nich. Jak wiadomo funkcje korelacyjne typowych wymuszeń wyrażają się

a) przestrzennie nieskorelowane wymuszenia

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\tau_1,\bar{x}_2,\tau_2) = K_{qq}^{(1)}(\tau_1,\tau_2)\,\delta(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \tag{111}$$

b) przestrzennie całkowicie skorelowane wymuszenia

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\tau_1,\bar{x}_2,\tau_2) = K_{qq}^{(1)}(\tau_1,\tau_2) \tag{112}$$

c) wymuszenia falowe

$$K_{qq}(\bar{x}_1,\tau_1,\bar{x}_2,\tau_2) = K_{qq}^{(1)}\Big\{\tilde{f}(\tau_1) - \tilde{f}(\tau_2) -$$

$$-\gamma\left(\frac{x_1-x_2}{c_x}+\frac{y_1-y_2}{c_y}+\frac{z_1-z_2}{c_z}\right)\Big\} \tag{113}$$

Przykład 4

Reakcja powłoki cylindrycznej na niestacjonarne przestrzennie nieskorelowane obciążenie

Ilustrując powyższe rozważania, przyjmijmy funkcję korelacji (111) przestrzennie nieskorelowanego obciążenia w postaci

$$K_{qq}(\xi_1,\varphi_1,\tau_1,\xi_2,\varphi_2,\tau_2) = B\cos\beta(\tau_1^2-\tau_2^2)\,\delta(\xi_1-\xi_2)\,\delta(\varphi_1-\varphi_2). \tag{114}$$

Funkcja korelacyjna sił uogólnionych (104) wyraża się zależnością (40) i przyjmuje postać

$$K_{Q_{st}Q_{mn}}(\tau_1,\tau_2) = \frac{4}{\rho_p^2 h^2 \varphi l} B\cos\beta(\tau_1^2-\tau_2^2)\,\delta_{sm}\,\delta_{tn} \tag{115}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem KRONECKERa. Załóżmy ponadto, że obciążenie promieniowe q jest normalnym polem losowym o średniej równej zero. Wskutek założenia, że dla każdego czasu $K_{st} < \omega_{st(1)}$ można przyjąć, że rozkład gęstości f_{st} jest również normalny.
A zatem

$$p(f_{11},f_{12},\ldots) = \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty} p(f_{ij}) \tag{116}$$

gdzie

$$p(f_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{f_{ij}f_{ij}}}}\exp\left(-\frac{f_{ij}^2}{2\sigma_{f_{ij}f_{ij}}^2}\right) \tag{117}$$

Parametry rozkładu pozostają na razie nieokreślone. Wykorzystanie kryterium minimalizacji średniego błędu kwadratowego (96a) pozwala wyznaczyć K_{st} w postaci

$$K_{st} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{st}^2 \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} p(f_{ij}) df_{ij} \right\}^{-1} \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Big(- \frac{512\, E \pi^4}{\varphi^4\, l^4\, \varrho_p} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,m,n,p,q} f_{\alpha\beta} f_{sm} f_{pq} C^{s\gamma\alpha t\delta\beta}_{\gamma mp\delta nq} +$$

$$\frac{8\, R\, E \pi^4}{\varphi^4 l^4 \varrho_p} \sum_{m,n,p,q} f_{mn} f_{pq} D_{mnpqst} \Big) f_{st} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} p(f_{ij}) df_{ij} \qquad (118)$$

Korzystając z zależności

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i\, a_j\, a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^3 + 3 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_i\, a_j^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{\infty} a_i\, a_j\, a_k\,, \qquad (119)$$

wyrażenie (118) można przekształcić do postaci

$$K_{st} = \frac{8\, E \pi^4}{\varphi^4 l^4 \varrho_p \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{st}^2 \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} p(f_{ij}) df_{ij}}$$

$$\Big\{ \sum_{\gamma,\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} - 64 \Big[\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}^3\, f_{st}\, C^{s\gamma\alpha t\delta\beta}_{\gamma\alpha\alpha\delta\beta\beta} +$$

$$+ 3 \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{m,n \\ m\neq\alpha \\ n\neq\beta}} f_{\alpha\beta} f_{mn}^2 f_{st} C_{\gamma m\alpha\delta n n}^{s\gamma\alpha t\delta\beta} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{m,n \\ m\neq\alpha \\ n\neq\beta}} \sum_{\substack{p,q \\ p\neq\alpha \\ p\neq m}} \sum_{\substack{q\neq\beta \\ q\neq n}} f_{\alpha\beta} f_{mn} f_{pq} f_{st} C_{\gamma mp\delta nq}^{s\gamma\alpha t\delta\beta} +$$

$$+ R \sum_{m,n} \sum_{p,q} f_{mn} f_{pq} f_{st} D_{mnpqst} \Bigg\} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} p(f_{ij})\, df_{ij} \qquad (120)$$

Biorąc pod uwagę

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \begin{cases} 0 & n \text{ nieparzyste} \\ (n-1)!!\,\sigma^n & n \text{ parzyste} \end{cases}$$

otrzymujemy ostateczne wyrażenia dla współczynników K_{st}

$$K_{st} = \frac{-1536\, E\pi^4}{\psi^4\, l^4\, \varrho_p} \sum_{\gamma,\delta,m,n} \sigma_{f_{mn} f_{mn}}^2 s^2 t^2 m^2 n^2$$

$$\frac{\left[2(\delta^2 s^2 - \gamma^2 t^2) - \gamma^2(\delta^2 - 4t^2)\right](\gamma^2\delta^2 - 2m^2\delta^2 - 2n^2\gamma^2)}{\gamma^2\delta^2(k_{\xi\gamma}^2 + k_{\varphi\delta}^2)^2(\gamma^2 - 4s^2)(\delta^2 - 4t^2)(\gamma^2 - 4m^2)(\delta^2 - 4n^2)} \qquad (122)$$

przy czym sumowanie przeprowadza się po wskaźnikach spełniających warunek nieparzystości wyrażeń $2s+\gamma$, $2t+\delta$, $\gamma+2m$, $\delta+2n$ lub co jest równoważne sumowaniu po wszystkich m i n lecz nieparzystych γ i δ. Jeżeli uwzględnimy zależność (115), (37) i (41), to otrzymamy następujące wyrażenie dla wariancji f_{st}

$$\sigma^2_{f_{st}f_{st}}(t) = \frac{4\,B}{\varrho_p^2\, h^2 \psi\, l} \int_0^t \int_0^t h_{st}(t-\tau_1)\, h_{st}(t-\tau_2) \cos\beta(\tau_1^2-\tau_2^2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \quad (123)$$

gdzie $h_{st}(t)$ jest impulsową funkcją przejścia podaną w zależności (37). Po przekształceniach otrzymuje się

$$\sigma^2_{f_{st}f_{st}}(t) = \frac{B}{\varrho_p^2\, h^2 \psi\, l \beta \bar{\omega}^2_{st}} \left\{ \left[S^+_{(1)st} - S^-_{(2)st} \right]^2 + \left[T^+_{(1)st} - T^-_{(2)st} \right]^2 \right\} \quad (124)$$

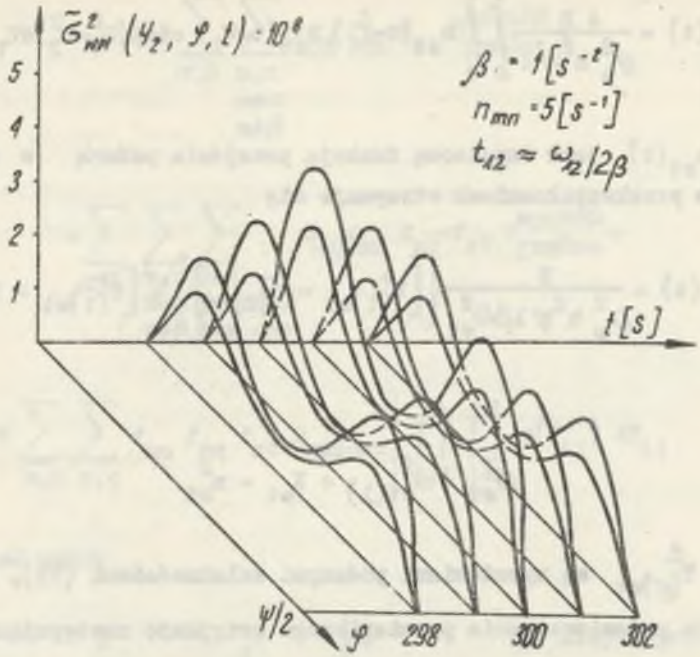
gdzie

$$\bar{\omega}^2_{st} = \omega^2_{st(1)} + K_{st} - n^2_{st}$$

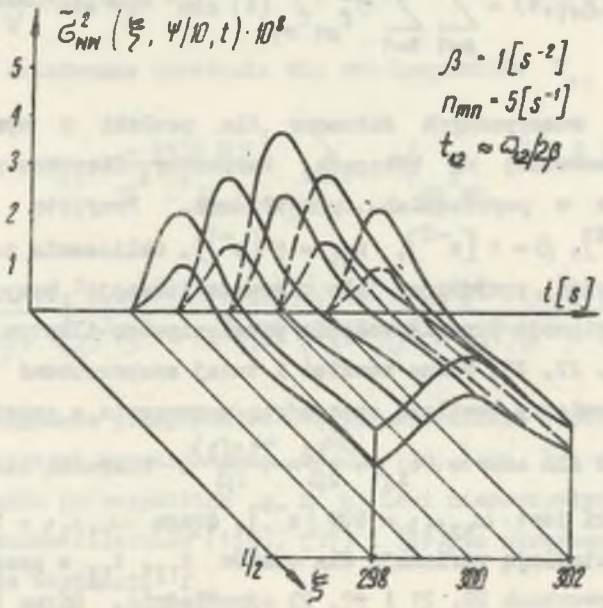
$S^{\pm}_{(\alpha)st}$, $T^{\pm}_{(\alpha)st}$ są wyrażeniami podanymi zależnościami (75), (76). Wariancja przemieszczenia promieniowego przyjmuje następującą postać

$$\sigma^2_{ww}(\xi,\varphi,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sigma^2_{f_{st}f_{st}}(t) \sin^2 \frac{s\pi\xi}{l} \sin^2 \frac{t\pi\varphi}{\psi} \quad (125)$$

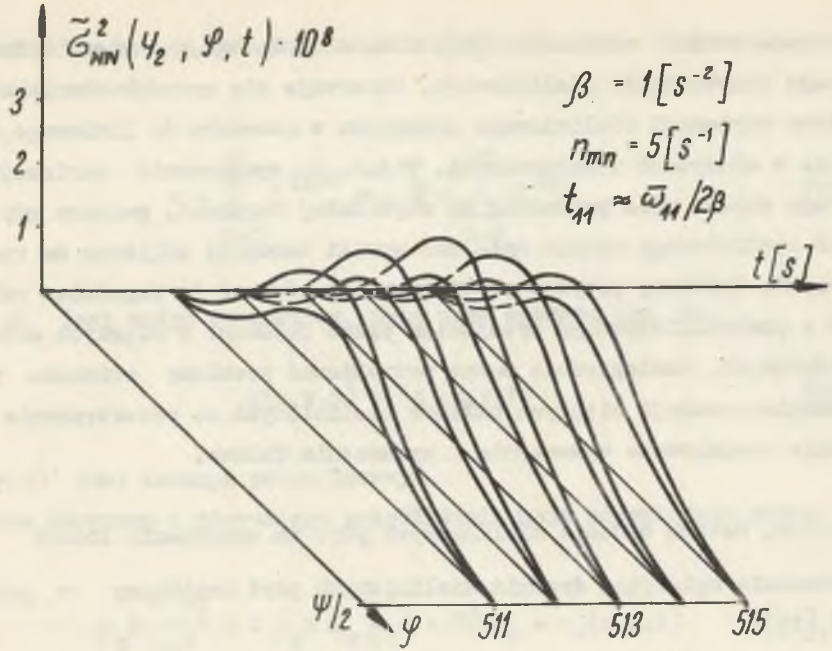
Obliczeń numerycznych dokonano dla powłoki o wymiarach $l = \pi$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, zamocowanej na brzegach. Parametry fizyczne przyjęto identycznie jak w poprzednich przykładach. Przyjęto również $B = 10^5\ [N^2/m^4]$, $\beta = 1\ [s^{-2}]$, $n_{st} = 5\ [s^{-1}]$. Obliczenia te wykonano metodą iteracyjną, przyjmując jako pierwszą iterację przypadek liniowy powłoki. Wariancję przemieszczenia promieniowego ilustrują wykresy na rys. 20, 21, 22, 23. Można również i tutaj zaobserwować występowanie rezonansu pomiędzy chwilową częstością wymuszenia a częstościami własnymi powłoki dla czasów $t_{ij} = \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2\beta} \approx \frac{\omega_{ij(1)}}{2\beta}$. Pierwszą częstością wzbudzoną powłoki jest $\omega_{12(1)} = 600\ [s^{-1}]$, drugą $\omega_{11(1)} = 1026\ [s^{-1}]$. Wykresy przedstawiają wariancję dla czasów t_{12}, t_{11} w przekrojach pokazanych na rysunkach 20, 21 i 22, 23 odpowiednio. Górna krzywa każdego


$\tilde{\sigma}^2_{nn}(\psi_2, \varphi, t)\cdot 10^8$
$\beta = 1[s^{-2}]$
$n_{mn} = 5[s^{-1}]$
$t_{12} \approx \omega_2/2\beta$
5
4
3
2
1
t[s]
ψ/2
φ
298
300
302

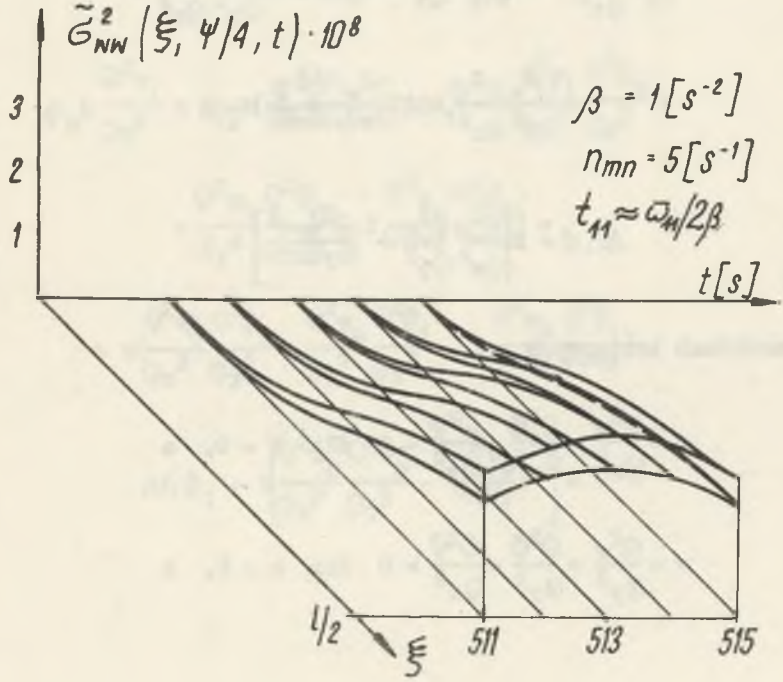
Rys. 20


$\tilde{\sigma}^2_{nn}(\xi, \psi/10, t)\cdot 10^8$
$\beta = 1[s^{-2}]$
$n_{mn} = 5[s^{-1}]$
$t_{12} \approx \omega_2/2\beta$
5
4
3
2
1
t[s]
ψ/2
ξ
298
300
302

Rys. 21


$\tilde{\sigma}^2_{NN}(\psi_2, \varphi, t)\cdot 10^8$
$\beta = 1[s^{-2}]$
$n_{mn} = 5[s^{-1}]$
$t_{11} \approx \bar{\omega}_{11}/2\beta$
3
2
1
t[s]
$\psi/2$
φ
511
513
515

Rys. 22


$\tilde{\sigma}^2_{NW}(\xi, \psi/4, t)\cdot 10^8$
$\beta = 1[s^{-2}]$
$n_{mn} = 5[s^{-1}]$
$t_{11} \approx \bar{\omega}_{11}/2\beta$
3
2
1
t[s]
$l/2$
ξ
511
513
515

Rys. 23

przekroju oznacza wariancję przybliżenia liniowego, natomiast dolna wariancję przybliżenia nieliniowego. Obserwuje się wyraźne zmniejszenie poziomu wariancji nieliniowego przypadku w stosunku do liniowego, szczególnie w szczytach rezonansowych. Widać, że wyznaczanie wariancji liniowego układu może prowadzić do zbyt dużej wartości, podczas gdy przyjęcie nieliniowego modelu może dać wyniki bardziej zbliżone do rzeczywistości. Omówiony powyżej problem należy również do zagadnień związanych z probabilistycznym przejściem przez rezonans w ciągłych układach nieliniowych. Analogicznie można potraktować problemy związane z wyznaczaniem reakcji ciągłych układów nieliniowych na przestrzennie całkowicie skorelowane wymuszenia i wymuszenia falowe.

1.2.4. Metoda badania nieliniowych płyt na wymuszenia losowe

Równania opisujące drgania nieliniowych płyt napiszemy w postaci (90), [15]:

$$\varrho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w \varrho_p h \frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta\Delta w - h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right) = q \tag{126a}$$

$$\Delta\Delta \Phi + E\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)^2\right] = 0 \tag{126b}$$

przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad a \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad b \end{aligned} \tag{127}$$

Wykorzystując metodę małego parametru [15] funkcje w i Φ można przedstawić w postaci

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} w_k \quad \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \Phi_k \tag{128}$$

gdzie ε jest małym parametrem, przy czym zakłada się, że

$$q(x,y,t) = \varepsilon q_*(x,y,t) \tag{129}$$

$q_*(x,y,t)$ jest zadanym polem losowym.

Równania zerowego i pierwszego przybliżenia mają odpowiednio budowę

$$\begin{gathered} \varrho_p h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + 2\varrho_p h\, n_w \frac{\partial w_0}{\partial t} + D\Delta\Delta w_0 = q_*(x,y,t) \\ \Delta\Delta \Phi_0 = 0 \end{gathered} \tag{130}$$

$$\begin{gathered} \varrho_p h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2\varrho_p h\, n_w \frac{\partial w_1}{\partial t} + D\Delta\Delta w_1 - h\Big(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y}\Big) = \\ = h\Big(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}\Big) \\ \Delta\Delta \Phi_1 + E\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\Big)^2\right] = 0 \end{gathered} \tag{131}$$

Rozwiązanie równania zerowego przybliżenia dla warunków brzegowych (127) przyjmuje postać

$$w_0 = \sum_{m=1} \sum_{n=1} f_{mn0}(t)\, \varphi_{mn}(x,y) \tag{132}$$

gdzie

$$\varphi_{mn}(x,y) = \sin k_{xm}\, x \sin k_{yn}\, y, \tag{133}$$

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{b} \tag{134}$$

Wielkość $f_{mn0}(t)$ wyraża się wzorem

$$f_{mn0}(t) = \int_0^{t_0} h_{mn}(t - \Theta)\, Q_{mn0}(\Theta)\, d\Theta \tag{135}$$

Wyrażenia pierwszego przybliżenia mają postać

$$\Phi_1 = \frac{16\, E\, \pi^2}{a^2\, b^2} \sum_{p=1} \sum_{q=1} \sum_{j,k} \sum_{\mu,\nu} f_{jk0}(t)\, f_{\mu\nu 0}(t)\, \cdot$$

$$\cdot\, B_{pj\mu qk\nu}\, \varphi_{pq}(x,y) \tag{136}$$

gdzie

$$B_{pj\mu qk\nu} = \frac{pqjk\mu\nu\, A_{pj\mu qk\nu}}{(k_{xp}^2 + k_{yq}^2)^2\, A_{pj\mu pj\mu}\, A_{qk\nu qk\nu}} \tag{137}$$

$$A_{pj\mu qk\nu} = (p^2 - j^2 - \mu^2)(q^2 - k^2 - \nu^2) - 4j^2\nu^2, \tag{138}$$

$$f_{mn1}(t) = \int_0^t h_{mn}(t-\Theta)\, Q_{mn1}(\Theta)\, d\Theta, \tag{139}$$

$$Q_{mn1}(\Theta) = \frac{512}{a^4 b^4 \varrho_p} \sum_{p,q,j,k,\mu,\nu,\alpha,\beta} f_{jk0}(\Theta)\, f_{\mu\nu0}(\Theta)\, f_{\alpha\beta0}(\Theta) \cdot$$

$$\cdot\, C^{mp\alpha nq\beta}_{pj\mu qk\nu} \tag{140}$$

$$C^{mp\alpha nq\beta}_{pj\mu qk\nu} = \frac{mnpq\alpha\beta\left[2(q^2\alpha^2 - p^2\beta^2) - A_{mp\alpha nq\beta}\right]}{A_{mp\alpha mp\alpha}\, A_{nq\beta nq\beta}} B_{pj\mu qk\nu} \tag{141}$$

Sumowanie w równościach (135), (139) przeprowadza się po indeksach dla których kombinacje $p+j+\mu$, $q+k+\nu$, $m+p+\alpha$, $n+q+\beta$ są liczbami nieparzystymi [15].

W dalszym ciągu ograniczono się do następującego przybliżenia przemieszczenia w

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{mn0}(t)\varepsilon + f_{mn1}(t)\varepsilon^3\right) \varphi_{mn}(x,y) \tag{142}$$

Wariancja przemieszczenia wyraża się wzorem

$$\sigma^2_{ww}(x,y,t) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2} \Big\{ K_{f_{\gamma_1 0} f_{\gamma_2 0}}(t,t)\varepsilon^2 + \Big[K_{f_{\gamma_1 0} f_{\gamma_2 1}}(t,t) +$$

$$+ K_{f_{\gamma_1 1} f_{\gamma_2 0}}(t,t) \Big] \varepsilon^4 + K_{f_{\gamma_1 1} f_{\gamma_2 1}}(t,t)\varepsilon^6 \Big\} \varphi_{\gamma_1}(x,y)\varphi_{\gamma_2}(x,y) \tag{143}$$

gdzie γ_α oznacza parę indeksów m_α, n_α.

Funkcje

$$K_{f_{\gamma_1 0} f_{\gamma_2 0}}(t,t), \quad K_{f_{\gamma_1 0} f_{\gamma_2 1}}(t,t),$$

$$K_{f_{\gamma_1 1} f_{\gamma_2 0}}(t,t), \quad K_{f_{\gamma_1 1} f_{\gamma_2 1}}(t,t)$$

można znaleźć w oparciu o relacje (135) i (139).

Z budowy wyrażenia (143) widać, że wskutek skończonego czasu działania wejściowego pola na układ, wyjściowe pole losowe jest niestacjonarne zarówno dla stacjonarnych, jak i niestacjonarnych wejściowych pól losowych.

2. METODY RÓWNAŃ KINETYCZNYCH FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa

2.1. Analiza drgań nieliniowych ciągłych układów dynamicznych metodą równań FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa

Równaniami wyjściowymi obecnych rozważań są nieliniowe równania układów ciągłych podane w p. 1.2.1. Równania te, jak wiadomo (p. 1.2.2), pozwalają się sprowadzić do nieliniowych układów równań o postaci

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} + 2n_j \frac{df_j}{dt} + \omega^2_{j(1)} f_j + F_j(f_1, f_2, \ldots, f_N) = Q_j \qquad (144)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N$$

Załóżmy, że siły uogólnione można ująć w postaci sumy

$$Q_j = \sum_{l=0}^{s_j} a_{jl}\, g_j^{(l)} \qquad (145)$$

gdzie $g_j^{(l)}$ są pobudzeniami otrzymanymi drogą przepuszczania wymuszeń stanowiących "biały szum" [30] ψ_j, przez liniowe filtry o operatorowych funkcjach przejścia

$$\frac{g_j(s)}{\psi_j(s)} = \frac{a_{j0} + a_{j1}\, s + \ldots + a_{js_j} \cdot s^{s_j}}{b_{j0} + b_{j1}\, s + \ldots + b_{jk_j} \cdot s^{k_j}} \qquad (146)$$

$$\text{dla} \qquad k_j > s_j$$

Równania (144), (146) można sprowadzić do układów równań pierwszego rzędu o budowie

$$\dot{f}_j = f_j^{(1)},$$

$$\dot{f}_j^{(1)} = f_j^{(2)},$$

$$\dot{f}_j^{(2)} = -2\,n_j f_j^{(2)} - \omega_{j(1)}^2 f_j^{(1)} - \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial f_q} f_q^{(1)} + \sum_{l=0}^{s_j} a_{jl} g_j^{(l+1)},$$

$$\dot{g}_j^{(1)} = g_j^{(2)},$$

$$\vdots$$

$$\dot{g}_j^{(k_j-2)} = g_j^{(k_j-1)},$$

$$\dot{g}_j^{k_j-1} = -\frac{b_{j0}}{a_{j0} b_{jk_j}} \left[f_j^{(2)} + 2n_j f_j^{(1)} + \omega_{j(1)}^2 f_j + F_j - \sum_{l=1}^{s_j} a_{jl} g_j^{(l)} \right] -$$

$$- \sum_{l=1}^{k_j-1} \frac{b_{jl}}{b_{jk_j}} g_j^{(l)} + \frac{1}{b_{jk_j}} \psi_j . \qquad (146)$$

$$j = 1,2,\ldots,N$$

Oznaczmy gęstość widmową "białych szumów" $\underset{\sim}{\psi}_j$ przez c_{ij}. Łączna gęstość prawdopodobieństwa

$$p(f_j, f_j^{(1)}, f_j^{(2)}, g_j^{(1)}, \ldots, g_j^{(k_j-1)}, t)$$

spełnia równania FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa w postaci

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial f_j}\left[f_j^{(1)} p\right] + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial f_j^{(1)}}\left[f_j^{(2)} p\right] + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial f_j^{(2)}}$$

$$\left\{\left[-2 n_j f_j^{(2)} - \omega_{j(1)}^2 f_j^{(1)} - \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial f_q} f_q^{(1)} + \sum_{l=0}^{s_j} a_{jl} g_j^{(l+1)}\right] p\right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial g_j^{(1)}}\left[g_j^{(2)} p\right] + \ldots + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial g_j^{(k_j-2)}}\left[g_j^{(k_j-1)} p\right]$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial g_j^{(k_j-1)}} \left\{- p \frac{b_{j0}}{a_{j0} b_{jk_j}}\left[f_j^{(2)} + 2n_j f_j^{(1)} + \omega_{j(1)}^2 f_j + F_j -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{l=1}^{s_j} a_{jl} g_j^{(l)}\right] - p \sum_{l=1}^{k_j-1} \frac{b_{jl}}{b_{jk_j}} g_j^{(l)}\right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{c_{ij}}{b_{ik_i} b_{jk_j}}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial g_i^{(k_i-1)} \partial g_j^{(k_j-1)}} \tag{147}$$

2.2. Badanie drgań nieliniowych powłok metodą równań kinetycznych FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa [2], [12]

W celu ilustracji rozważań p. 2.1 posłużymy się przykładem analizy drgań nieliniowych powłok opartym na pracy [12]. Równaniami wyjściowymi są równania (91), przy czym funkcje naprężeń $\Phi(x,y,t)$ środkowej powierzchni powłoki spełniają relacje

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \tau_{yy}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \tau_{xx}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\tau_{xy} \tag{148}$$

gdzie $\tau_{\alpha\beta}$ są naprężeniami. Przedstawiając przemieszczenie $w(x,y,t)$ w postaci

$$w(x,y,t) = \sum_{j=1}^{N} f_j(t)\,\varphi_j(x,y) \tag{149}$$

i wstawiając go do drugiego równania układu (91), po znalezieniu rozwiązania szczególnego $\Phi_1(x,y,t)$, można napisać

$$\Phi(x,y,t) = \Phi_1(x,y,t) + \frac{1}{2}(\tau^o_{xx}\,y^2 + \tau^o_{yy}\,x^2 - 2\,\tau^o_{xy}\,xy) \tag{149a}$$

gdzie $\tau^o_{xx}, \tau^o_{yy}, \tau^o_{xy}$ są stałymi określonymi z granicznych warunków dla Φ. Biorąc pod uwagę wyrażenie (149) i posługując się metodą GALERKINa otrzymuje się równanie:

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} + 2\,n_j\,\frac{df_j}{dt} + \omega_j^2\,f_j + F_j(f_1,\ldots,f_N) = Q_j(t) \tag{150}$$

przy czym

$$n_j = b_j\,\omega_j$$

Dla uproszczenia rozpatrzmy drgania swobodne podpartego panelu [12] cylindrycznej powłoki $(R_x \to \infty,\ R_y = R)$.
Warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad &\text{dla} \quad x = 0,\ x = a \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad &\text{dla} \quad y = 0,\ y = b \end{aligned} \tag{151}$$

Ograniczono się do badania podstawowej formy drgań określonej wzorem

$$w = f \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} . \tag{152}$$

Bezwymiarowe ugięcie powłoki $f = f/h$ spełnia równanie

$$\frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + 2\, b\omega_o \frac{d\tilde{f}}{dt} + \omega_o^2(\tilde{f} + \beta\tilde{f}^2 + \alpha\tilde{f}^3) = Q(t) \tag{153}$$

gdzie

$$\omega_o^2 = \frac{D\pi^4}{\varrho_p\, h\, a^4}\, G(m,K), \quad m = \frac{a}{b}, \quad K = \frac{a^2}{Rh}, \quad n = b\omega_o$$

$$G(m,K) = (1 + m^2)^2 + \frac{12(1 - \nu^2)K^2}{\pi^4(1 + m^2)^2} + \frac{768\, K^2(\nu^2 + 2m^2 + m^4)}{\pi^8(1 + m^2)^2}$$

$$\alpha = \frac{3\left[(3 - \nu^2)(m^4 + 1) + 4\nu m^2\right]}{4\, G(m,K)}$$

$$\beta = \frac{16\, K}{\pi^4\, G(m,K)}\left\{ m^2(1 - \nu^2)\left[\frac{1}{2} + \frac{8}{(1 + m^2)^2}\right] + \frac{3}{2}\left[3(m^2 + \nu) - \frac{4\, m^2(1 - \nu^2)}{(1 + m^2)^2}\right]\right\}$$

Załóżmy że

1° $a_{jl} = 0$ dla $l \neq 0$ (w zależności 145) tzn. $Q(t) = g(t)$

2° $g(t) = \psi(t)$

3° gęstość widmowa $\underset{\sim}{\psi}$ wynosi c.

Równanie FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa przyjmie postać

$$\dot{p}(\tilde{f},\dot{\tilde{f}}) = -\dot{\tilde{f}}\frac{\partial p}{\partial \tilde{f}} + 2b\omega_o\left(p + \dot{\tilde{f}}\frac{\partial p}{\partial \dot{\tilde{f}}}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{f}}}\left(p\frac{\partial U}{\partial \tilde{f}}\right) + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial \dot{\tilde{f}}^2} \tag{154}$$

przy czym

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{f}} = \omega_o^2(\tilde{f} + \beta\tilde{f}^2 + \alpha\tilde{f}^3)$$

Stacjonarne rozwiązanie ma budowę [2]

$$p(\tilde{f},\dot{\tilde{f}}) = C_1 \exp\left[-\frac{4\,b\omega_o}{c}\left(\frac{\dot{\tilde{f}}^2}{2} + U\right)\right] \tag{155}$$

Niestacjonarnego rozwiązania należy poszukiwać na drodze numerycznej.

Przejdźmy do ogólniejszego przypadku układu w którym istnieje nietrywialny filtr formujący tj. są spełnione relacje

$$g(t) = Q(t) \quad \text{oraz} \quad g(s)/\psi(s) = 1/(\tau_o s + 1) \tag{156}$$

Różniczkując (153) i wykorzystując (156), otrzymuje się

$$\tau_o\frac{d^3\tilde{f}}{dt^3} + (1 + 2b\omega_o\tau_o)\frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \left[2b\omega_o + \omega_o^2\tau_o(1 + 2\beta\tilde{f} + 3\alpha\tilde{f}^2)\right]\frac{d\tilde{f}}{dt} +$$

$$+ \omega_o^2(\tilde{f} + \beta\tilde{f}^2 + \alpha\tilde{f}^3) = \psi(t) \tag{157}$$

Zakładając $\omega_o\,\tau_o \ll 1$, $b < 1$ można napisać

$$\tau_o\frac{d^3\tilde{f}}{dt^3} + \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \left[2b\omega_o + \omega_o^2\tau_o(1 + 2\beta\tilde{f} + 3\alpha\tilde{f}^2)\right]\cdot\frac{d\tilde{f}}{dt} +$$

$$+ \omega_o^2(\tilde{f} + \beta\tilde{f}^2 + \alpha\tilde{f}^3) = \psi(t) \tag{158}$$

Równanie FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa przyjmie postać

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{(1)}}\left[\tilde{x}^{(1)} p\right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{(1)}}\left[\tilde{x}^{(2)} p\right] - \frac{1}{\tau_o}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{(2)}}\left[p\tilde{x}^{(2)}\right] -$$

$$-\omega_o^2\left[\tilde{x}^{(1)}\left(1 + \frac{2b}{\omega_o \tau_o} + 2\beta\tilde{x} + 3\alpha\tilde{x}^2\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tau_o}\left(\tilde{x} + \beta\tilde{x}^2 + \alpha\tilde{x}^3\right)\right]\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}^{(2)}} = \frac{c}{2\tau_o^2}\frac{\partial^2 p}{(\partial \tilde{x}^{(2)})^2} \qquad (159)$$

Równanie powyższe w ogólnym przypadku można rozwiązywać numerycznie, zakładając stan stacjonarny $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = 0\right)$ jak i niestacjonarny.

3. METODY QUASISTATYCZNE W ANALIZIE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

Metody quasistatyczne opierają się na elementarnej teorii prawdopodobieństwa i zasadniczo nie wymagają znajomości struktury przestrzennej pola losowego. Metody te występują jednak często w połączeniu z innymi grupami metod, dlatego podstawowe pojęcia teorii pól losowych mogą być użyteczne. Załóżmy, że wejściowe parametry układu mogą być opisane za pomocą skończonej liczby przypadkowych wielkości $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $q_1, q_2, \ldots, q_r$ przy znanej łącznej gęstości prawdopodobieństwa $p(c_1, c_2, \ldots, c_m, q_1, q_2, \ldots, q_r)$, gdzie c_α parametry charakteryzujące formę i właściwości układu, q_α parametry charakteryzujące obciążenie. Oznaczmy skończoną liczbę wyjściowych parametrów charakteryzujących zachowanie się układu (np. przemieszczenia, naprężenia itp.) przez $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Powyższe dwie grupy parametrów mogą być związane deterministycznymi zależnościami typu

$$u_\alpha = U_\alpha(c_1, c_2, \ldots, c_m, q_1, \ldots, q_r) \tag{160}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n$$

Podstawowym celem metod quasistatycznych jest wyznaczenie gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $p(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ wyrażonej przez znaną gęstość $p(c_1, c_2, \ldots, c_m, q_1, \ldots, q_r)$.

Przyjmując, że $n \leqslant m$ oraz możliwość wyznaczenia parametrów c_α poprzez zależności

$$c_\alpha = C_\alpha(u_1,\ldots,u_n,\ c_{n+1},\ldots,c_m,\ q_1,\ldots,q_r) \tag{161}$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,n$$

gdzie C_α są jednoznacznymi i ciągłymi funkcjami zmiennych $u_1,\ldots,u_n$, $c_{n+1},\ldots,c_m$, $q_1,\ldots,q_r$, szukana gęstość rozkładu wyrazi się

$$p(u_1,\ldots,u_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} p(C_1,\ldots,C_n,\ c_{n+1},\ldots,c_m,\ q_1,\ldots,q_r)\ \cdot$$

$$\left|\frac{\partial(C_1,\ldots,C_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}\right| dc_{n+1}\ \ldots\ dc_m\ dq_1\ \ldots\ dq_r \tag{162}$$

gdzie

$$\left|\frac{\partial(C_1,\ldots,C_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial u_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial C_n}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial C_1}{\partial u_n}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial C_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \tag{163}$$

Wzór (162) może być uogólniony na przypadek, kiedy funkcje $C_1,\ldots,C_n$ nie są jednoznaczne oraz na przypadek, kiedy te funkcje są przedziałami ciągłe. Można też łatwo rozszerzyć powyższe rozumowanie na przypadek $m < n \leqslant m + r$ oraz $n > m + r$. Obecnie przejdziemy do ilustracji zastosowań metod quasistatycznych do układów ciągłych.

3.1. Drgania belki sprężystej o losowej sztywności zginania

Przyjmijmy równanie drgań poprzecznych belki o postaci

$$A\varrho_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2n_w A\varrho_p \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{164}$$

Załóżmy swobodne podparcie belki oraz losową sztywność zginania o znanej wartości średniej i znanej funkcji korelacyjnej różniczkowalnej czterokrotnie. Stosując metodę GALERKINa dla podstawowej formy drgań, po wykonaniu odpowiednich działań uzyskuje się równanie różniczkowe zwyczajne o postaci

$$\frac{d^2f}{dt^2} + 2n_w \frac{df}{dt} + \frac{2}{A\varrho_p} \frac{1}{l} f\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} EJ(x)\, dx - \right.$$

$$- 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^3 \int_0^l \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{EJ(x)}{\partial x}\, dx -$$

$$\left. - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} \frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2}\, dx\right] = 0 \qquad (165)$$

Wielkość w nawiasie kwadratowym reprezentuje kwadrat podstawowej częstości drgań swobodnych układu ω_o^2. Przyjmując, że wartość średnia $E[EJ(x)] = (EJ)_o$, można obliczyć średnią wartość podstawowej częstości drgań swobodnych

$$E[\underset{\sim}{\omega}_o^2] = \frac{(EJ)_o}{A\varrho_p} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \qquad (166)$$

Następnie dla zadanej funkcji korelacyjnej $K_{\underset{\sim}{EJ}\,\underset{\sim}{EJ}}(x_1,x_2)$, różniczkowalnej czterokrotnie można znaleźć wariancję $\hat{\sigma}^2_{\underset{\sim}{\omega}_o^2}$.

Przykład 5

Podamy teraz przykład zakładając, że 1° pole losowe $\underset{\sim}{EJ}(x)$ jest statystycznie jednorodne, 2° funkcja korelacyjna ma postać

$$K_{\underset{\sim}{EJ}\,\underset{\sim}{EJ}}(x_1,x_2) = \sum_{j=1}^{K} B_j \cos \omega_j(x_1-x_2) \qquad (167)$$

Warianoja $\sigma^2_{\tilde{\omega}_o^2}$ wyraża się wzorem

$$\sigma^2_{\tilde{\omega}_o^2} = \left(\frac{2}{\lambda\varrho_p l}\right)^2 \sum_{j=1}^{K} B_j \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^8 + \omega_j^4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^6 \omega_j^2 \right] I_1 + \right.$$

$$\left. + 2\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^5 \omega_j^3 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^7 \omega_j \right] I_2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^6 \omega_j^2 I_3 \right\} - E[\tilde{\omega}_o^2] \tag{168}$$

gdzie I_1, I_2, I_3 są całkami odpowiednich funkcji trygonometrycznych, które można obliczyć w sposób elementarny.

Zakładając, że zmienna losowa jest normalna o średniej $E[\tilde{\omega}_o^2]$ i warianoji $\sigma^2_{\tilde{\omega}_o^2}$, można obliczyć np. gęstość rozkładu okresu drgań podstawowej formy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\omega_o^2}} \tag{169}$$

Posługując się wzorem (162), otrzymano szukaną gęstość rozkładu

$$p_{\tilde{T}}(T) = p_{\tilde{\omega}_o^2}\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) \left| -\frac{8\pi^2}{T^2} \right| \tag{170}$$

UWAGI KOŃCOWE

Niniejsza praca przedstawia metody wyznaczania i badania reakcji ciągłych mechanicznych układów dynamicznych na pobudzenia losowe. Równania opisujące modele fizycznych i technicznych układów ciągłych są równaniami różniczkowymi cząstkowymi z deterministycznymi warunkami brzegowymi. Rozważania dotyczą metod badania liniowych układów ciągłych jak i nieliniowych, z uwzględnieniem nieliniowości natury geometrycznej. Ze względu na złożoność problemów było uczynionych szereg założeń upraszczających. Znaczenie i ich charakter jest różny. Niektóre z nich mają charakter podstawowy i decydują o możliwości otrzymania rozwiązania. Inne zostały przyjęte w celu uproszczenia i skrócenia ostatecznych wyników. Istotnym uproszczeniem jest np. pominięcie korelacji wzajemnej między poszczególnymi formami drgań. Uproszczenie to pozwala otrzymać rezultaty w dość krótkiej postaci zamkniętej co w dalszej kolejności daje możliwości przejrzystej interpretacji fizycznej. Praca traktuje głównie o metodach pozwalających na rozwiązanie problemów pobudzeń układów ciągłych w formie zamkniętej. Ze względu jednak na złożoność końcowych postaci rozwiązań, w celu otrzymania wyników liczbowych, konieczne jest użycie maszyn cyfrowych.

Metodyka pracy opiera się na trzech zasadniczych grupach dynamiki statystycznej

1° metody korelacyjne i spektralne

2° równania kinetyczne FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa

3° metody quasistatyczne.

Grupom tym odpowiadają trzy części pracy.

Rozważania rozpoczęto od scharakteryzowania modeli pobudzeń losowych i podaniu podstawowych zależności pomiędzy charakterystykami wejściowych pól losowych i wyjściowych. Przyjęto trzy rodzaje pobudzeń losowych:

a) przestrzennie nieskorelowane pola losowe,

b) przestrzennie całkowicie skorelowane pola losowe,

c) pobudzenia typu falowego.

Rozpatrzono ogólny model pobudzenia niestacjonarnego. W szczególności może to być wycinek pobudzenia stacjonarnego jak i niestacjonarnego. Następnie dokonano analizy niestacjonarnej reakcji ciągłych układów na podstawowe klasy przestrzenno-czasowych pól losowych. Badanie tego rodzaju niestacjonarności reakcji ciągłych układów dynamicznych jest podstawowym celem niniejszej pracy.

Otrzymano interesujące wyniki numeryczne badania reakcji powłok cylindrycznych na pobudzenia losowe, będące polem przestrzennie nieskorelowanym, polem całkowicie przestrzennie skorelowanym, stacjonarnym jak i niestacjonarnym. Wyniki te zilustrowano wykresami, na których w przypadku pola całkowicie przestrzennie skorelowanego można zauważyć interesujące oscylacje wariancji dla małych czasów początkowych. Zjawisko to można tłumaczyć deterministycznym zachowaniem się układu dla tych czasów początkowych.

Następnym problemem poruszonym w pracy jest tzw. probabilistyczne przejście przez rezonans w układach ciągłych przy założeniu istnienia pobudzenia falowego o jednostajnie zmiennej częstości. Wyniki numeryczne dla powłok cylindrycznych wskazują interesujące maksima wariancji w okolicach czasu $t_m \approx \bar{\omega}_{m0}/2\beta_1$, będące wynikiem rezonansu między chwilową częstością pobudzenia a częstościami własnymi powłoki. Również i dla tego rodzaju pobudzenia, dla małych czasów początkowych, zaobserwowano oscylacje spowodowane deterministycznym zachowaniem się układu. Obserwuje się również zmniejszanie poziomu wariancji ze wzrostem współczynnika tłumienia.

Analogiczne badania niestacjonarnych stanów wykonano dla nieliniowych układów. Badano również problem probabilistycznego przejścia przez rezonans w nieliniowych układach ciągłych. Zaobserwowano i tutaj wy-

stępowanie maksimów w pewnych chwilach czasu. Z otrzymanych wykresów widać wyraźnie zmniejszenie poziomu wariancji nieliniowego układu w stosunku do liniowego, co szczególnie uwidacznia się w szczytach rezonansowych. Poziom wariancji liniowego modelu może się okazać zbyt wysoki, podczas gdy przyjęcie nieliniowego modelu pozwala otrzymać wyniki bardziej zbliżone do rzeczywistości.

Grupę metod wykorzystujących równania kinetyczne FOKKERa - PLANCKa-KOŁMOGOROWa oparto na rozważaniach dotyczących nieliniowych układów ciągłych pobudzanych "białym szumem", przepuszczanym przez filtr formujący. Rozważania te ilustrowano badaniami dotyczącymi drgań nieliniowych powłok.

Zastosowaniu metod quasistatycznych w ciągłych układach poświęcona jest trzecia część pracy. Po krótkiej charakterystyce teoretycznej tych metod, podano przykład analizy układu sprężystego o losowych parametrach strukturalnych.

Reasumując należy stwierdzić, że mimo iż rozważania niniejszej pracy dotyczą dynamiki mechanicznych układów ciągłych, mogą one też być wykorzystane do rozwiązania podobnych zagadnień w innych gałęziach techniki jak np. inżynieria chemiczna i reaktorowa, wymiana ciepła itp.

LITERATURA CYTOWANA W PRACY

1. Биргер И.А., Пановко Я.Г., ред. Прочность-Устоичивость-Колебания, Машиностроение, Москва 1968.
2. Bołotin W.W., Metody statystyczne w mechanice budowli, Arkady, Warszawa 1968.
3. Болотин В.В., Применение методов теории вероятностеи в теории пластин и оболочек, IV В.К.П.Т.О.И П. Ереван 1964.
4. Болотин В.В., Стохастические краевые задачи в теории пластин и оболочек, VI В.К.П.Т.О.И П. Баку 1966.
5. Caughey T.K., Response of a Nonlinear String to Random Loading. J. Appl. Mech. Vol. 26 No 3, 1959.
6. Caughey T.K., Stumpf H.J., Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation, J. Appl. Mech. No 28, 1961.
7. Crandall S.H. ed.., Random Vibrations, Volume 1 MIT Press Cambridge Mass. 1959.
8. Crandall S.H. ed., Random Vibrations, Volume 2 MIT Press Cambridge Mass. 1963.
9. Czogała E., O pewnym problemie drgań pręta kołowego przy wymuszeniu stochastycznym. ZN Pol. Śl. Mechanika z. 36 Gliwice, 1968.
10. Czogała E., O reakcji pewnych układów mechanicznych o stałych rozłożonych na wymuszenie przypadkowe, praca doktorska, maszynopis Pol. Sl., Gliwice 1969.
11. Диментберг М.Ф., Вынуждённые колебания пластин при нагрузке представляющем собой пространственно-временной случайны процес, И.Ж. т.I., вып. 2, 1961.
12. Диментберг М.Ф., О нелинейных колебаниях упругих оболочек при случайных нагрузках, IV В.К.П.Т.О.И П., Ереван 1964.
13. Диментберг М.Ф., Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках, И.А.Н. СССР ОТН, Мех. и машиностр. № 5, Москва 1962.

14. Eringen A.C. Lafayette IND, Response of Beams and Plates to Random Loads, J. of Appl. Mech., March 1957.

15. Федоров Ю.А., О нелинейных колебаниях прямоуголной пластинки под действием случайных сил, И.Ж. т.I, вып. 3 1964.

16. Gichman I.I., Skorochod A.W., Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN Warszawa, 1968.

17. Gopalsamy K., Aggarwala B.D., Propagation of Disturbances from Randomly Moving Sources, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd 52, Nr 1, Berlin, Januar 1972.

18. Kaliski S., red., Drgania i fale, PWN Warszawa 1966.

19. Карпов К.А., Таблицы функции $W(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{x^2}dx$ от комплексного аргумента, АН СССР, Москва 1954.

20. Knowles J.K., On the Dynamic Response of a Beam to a Randomly Moving Load, J. of Appl. Mech., ASME, Vol. 35 SE No 1, March 1968.

21. Lyon R.H., Response of a Nonlinear String to Random Excitation, J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 32 No 8, 1960.

22. Marcinkowska H., Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych, PWN Warszawa 1972.

23. Николаенко Н.А., Вероятностные методы динамического разчета машиностроительных конструкции, Машиностроение Москва 1967.

24. Peterson H.C., Pullen C.L., Response of a Dynamic System to a Separable Nonstationery Random Excitation, J. Spececraft Rockets, Vol. 3, No 8, 1966.

25. Пальмов В.А., Тонкие оболочки под воздействием широкополосной случайной нагрузки, П.М.М., № 29, вып. 4, 1965.

26. Пальмов В.А., Тонкая пластина под воздействием случайной нагрузки, П.М.М., № 26, вып. 3, 1962.

27. Pugaczew W.S., Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego, MON, Warszawa 1960.

28. Skalmierski B., Czogała E., O pewnym problemie niestacjonarnych drgań powłoki pod wpływem obciążeń przypadkowych. Rozpr. Inż. t. 17 Nr 2 1969.

29. Skalmierski B., Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych użebrowanych, ZN Pol. Śl. Mechanika z. 18, Gliwice, 1963.

30. Sobczyk K., Metody dynamiki statystycznej w mechanice. PWN Warszawa 1973.

31. Stansic M.M., Response of Plates to Random Load, J. of the Acoust Soc. of Amer. Vol. 43 No 6, June 1968.

32. Tylikowski A., O drganiach przypadkowych powłoki cylindrycznej pod wpływem wymuszenia losowego, ZN Pol. Śl., Mechanika z. 36, 1968.

33. Tylikowski A., Nonlinear Random Vibration of Cylindrical Shell, "Zagadnienia Drgań Nieliniowych", IPPT PAN Warszawa. 12, 1971.

34. Tylikowski A., Chmielniak T., Przypadkowy rozkład temperatur w płycie o niejednorodnych stałych materiałowych, Sympozjum PTMTiS, Gliwice 1970.

35. Tylikowski A., Chmielniak T., Niestacjonarne przypadkowe pole temperatur i naprężeń w nieskończonym pręcie. Rozpr. Inż. t. 17 Nr 1 1969.

36. Tylikowski A., Niestacjonarne procesy w układach mechanicznych wywołane pewnymi zaburzeniami losowymi, praca doktorska, maszynopis Pol. Śl., Gliwice 1969.

37. Warmus M., Wykłady z probabilistyki, PWN Warszawa 1973.

S t r e s z c z e n i e

W pracy przeanalizowano podstawowe metody dynamiki statystycznej badania reakcji ciągłych (o stałych rozłożonych) układów dynamicznych, opisanych cząstkowymi równaniami różniczkowymi, na pobudzenia przypadkowe. Pobudzenia te potraktowano jako przestrzenno-czasowe pola losowe. Problematyka pracy składa się z trzech zasadniczych grup metod:

1° metody korelacyjne i spektralne

2° równania kinetyczne FOKKERa-PLANCKa-KOŁMOGOROWa

3° metody quasistatyczne.

Tym grupom odpowiadają trzy części pracy. Każda z tych części zawiera rozważania teoretyczne ilustrowane numerycznymi przykładami zawierającymi ważne z praktycznego punktu widzenia problemy. Podane w pracy rozważania dotyczą liniowych układów ciągłych jak i nieliniowych po dokonaniu linearyzacji tych ostatnich. Znaczenie omówionych metod wynika z faktu, że jakkolwiek dotyczą one mechanicznych układów ciągłych, to mogą być stosowane do rozwiązywania podobnych problemów innych układach opisanych analogicznymi równaniami różniczkowymi.

РЕАКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Р е з ю м е

В работе проанализированы основные методы статистической динамики исследования реакции распределенных динамических систем определенных частными дифференциальными уравнениями на действия случайных возбуждений. Эти возбуждения рассматриваются как пространственно-временные случайные поля. Проблематика этой работы состоит из трех основных групп:

1° корреляционные и спектральные методы

2° кинетические уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

3° квазистатические методы.

Этим трем группам соответствуют три главы этой работы. Каждая из этих глав имеет теоретическую часть, иллюстрированную численными примерами, заключающими в себе вопросы важные с практической точки зрения. Проблемы, изложенные в работе, касаются как линейных распределенных систем, так и нелинейных после линеаризации. Значение приведенных методов заключается в том, что они могут применяться для решения подобных вопросов в других системах, описанных аналогическими дифференциальными уравнениями, хотя эти методы относятся к механическим распределенным систетам.

REACTION OF THE CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS
TO SPACE-TIME RANDOM FIELDS

S u m m a r y

This work presents the essential methods of statistical dynamics for analysis of the reaction of the continuous (distributed parameters) dy namical systems, described by partial differential equations, under the random excitations. The random excitations are treated as the space-time random fields. The work consists of three groups of methods

1° correlation and spectral analysis
2° kinetic equations of FOKKER-PLANCK-KOŁMOGOROW
3° quasistatical methods.

To these three groups are related three parts of this work. Every part presents the general considerations, which are illustrated by numerous examples, concerning the important practical problems. The presented considerations are valid both for linear continuous systems and for non-linear systems after the linearization. The meaning of presented methods results from the fact, that notwithstanding they are presented for mechanical continuous systems, they are valid for other physical problems too, described by analogical partial differential equations.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
H. HUTNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
JO. JĘZYKI OBCE
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE
O. ORGANIZACJA

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty serii A.:

Automatyka z. 1, 1961 r., s. 200, zł 13,85
Automatyka z. 2, 1962 r., s. 138, zł 10,70
Automatyka z. 3, 1963 r., s. 90, zł 9,—
Automatyka z. 4, 1963 r., s. 108, zł 5,70
Automatyka z. 5, 1964 r, s. 114, zł 6,85
Automatyka z. 6, 1965 r., s. 184, zł 9,40
Automatyka z. 7, 1966 r., s. 224, zł 12,—
Automatyka z. 8, 1967 r., s. 154, zł 9,—
Automatyka z. 9, 1968 r., s. 257, zł 9,—
Automatyka z. 10, 1968 r., s. 92, zł 6,—
Automatyka z. 11, 1969 r., s. 61, zł 4,—
Automatyka z. 12. 1969 r. s. 122, zł 7,—
Automatyka z. 13. 1969 r., s. 91, zł 5,—
Automatyka z. 14, 1969 r., s. 380, zł 24,—
Automatyka z. 15, 1970 r., s. 133, zł 9,50
Automatyka z. 16, 1970 r., s. 123, zł 8,50
Automatyka z. 17, 1971 r., s. 89, zł 6,—
Automatyka z. 18, 1971 r., s. 96, zł 6,—
Automatyka z. 19, 1972 r., s. 122, zł 8,—
Automatyka z. 20, 1972 r., s. 52, zł 4,—
Autematyka z. 21, 1972 r., s. 123, zł 8,—
Automatyka z. 22, 1973 r., s. 103, zł 6,—
Automatyka z. 23, 1973 r., s. 106, zł 7,—
Automatyka z. 24, 1974 r., s. 68, zł 5,—

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
3341/74/29
Druk. Pol. Śl. 1684-60 60000