

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki B

WPLYW NIELINIOWOŚCI UKŁADU NA ZMIANY TEMPERATURY  
W PROCESIE OGRZEWANIA I OSTYGANIA W UKŁADZIE  
JEDNOSKŁADNIKOWYM, WYMIENIAJĄCYM CIEPŁO Z OTOCZENIEM

Streszczenie: Praca niniejsza, będąca częścią drugiego rozdziału pracy doktorskiej autora:

"Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego" ma za zadanie sprawdzenie wpływu nieliniowości układu, objawiającej się w wpływie temperatury na takie wielkości, jak pojemność cieplna układu, współczynnik wymiany ciepła, zmienność oporu grzejnika, w układzie jednoskładnikowym wymieniającym ciepło z otoczeniem, gdy źródło ciepła jest załączone względnie wyłączane.

Najsilniejszy jest wpływ temperatury na wartość współczynnika wymiany ciepła. Jako podstawowe wzięto więc rozwiązanie odnoszące się do przypadku, gdy współczynnik ten zmienia się liniowo z temperaturą (a). Następnie ponadto uwzględniono zmienność pojemności cieplnej (b), oporu elektrycznego (c) i wreszcie kwadratową zmienność współczynnika wymiany ciepła (d). Kolejne nieliniowości dodawano do poprzednich, otrzymując różne rozwiązania, przy czym dla celów porównawczych używano rozwiązania przypadku (a), inne efekty traktowano jako poprawkowe. Przedyskutowano na wykresie wzajemne położenie miejsc zerowych mianownika równania różniczkowego (jednym z nich jest temperatura stanu ustalonego) dla ogrzewania i ostygnięcia, stałe w funkcjach wykładniczych i inne wielkości, charakteryzujące rozwiązanie.

Rozwiązanie, odnoszące się do przypadku (a), posiada duże znaczenie praktyczne, ponieważ przy jego pomocy możemy otrzymać formuły do badania zdjętych doświadczalnie krzywych ogrzewania i ostygnięcia.

## 1. Ciele pracy

W pracy doktorskiej autora: "Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego"<sup>\*)</sup>, której część II rozdziału jest przedstawiona w niniejszej pracy, rozpatrzono problem oscylacji temperaturowych w układzie  $n$  ciał wymieniających ciepło między sobą i z otoczeniem. Jedno z tych ciał posiada źródło ciepła, w określonych chwilach załączane i wyłączane.

Jako pierwszego przybliżenia użyto do opisu zjawisk równań różniczkowych liniowych, uzyskując jako rozwiązanie dla przebiegów czasowych zmienności temperatur składników układu, wyrażenia typu

$$v_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} e^{\alpha_k t} + \theta_i, \quad i = 1 \dots n \quad (1)$$

gdzie:

- $\alpha_k$  - stałe ujemne rzeczywiste,
- $A_{ik}, \theta_i$  stałe, wyznaczone z warunków początkowych oraz dla  $t \rightarrow -\infty$ ,
- $t$  - czas.

Jeżeli chodzi o problem porównania tego rodzaju przebiegów z krzywymi, otrzymanymi doświadczalnie nasuwa się pytanie, w jaki sposób można na podstawie przebiegów doświadczalnych przekonać się, czy użyte założenia co do liniowości układu są słuszne. Gdyby układ był jednoskładnikowy, wtedy przebieg opisany pojedynczą funkcją wykładniczą daje się dokładnie sprawdzić. Fakt, że w rozwiązaniu (1) występuje suma funkcji wykładniczych, komplikuje sprawę powodując, że przynajmniej jak długo nie zanikną człony szybko zanikające i nie pozostanie tylko jeden, użycie krzywej wykładniczej do sprawdzenia wyniku nie jest właściwe.

Dlatego nasuwa się zagadnienie zbadania wpływu wszelkich możliwych nieliniowości, a to pochodzącej od wpływu temperatury na takie parametry układu, jak: pojemność

<sup>\*)</sup> Obrona pracy odbyła się na Wydziale Mechaniczno-Energetycznym Politechniki Śląskiej w dniu 28.11.1959 r. Promotorem był prof. dr Z. Klemensiewicz.

cieplna składników układu, współczynniki w prawie wymiany ciepła, wreszcie zmienność oporu elektrycznego źródła grzejnika elektrycznego, który był źródłem ciepła. (Ostatni fakt powoduje, że krzywa opisująca proces załączania i wyłączania źródła ciepła, nie jest odcinkami stała, lecz posiada w początkowej części każdego odcinka przejście ciągłe od jednej wartości do drugiej).

Ogólne równania nieliniowe problemu dają wyniki dość nieprzejrzyste. Dlatego szczegółowo przedyskutowano przypadek układu jednoskładnikowego, posiadającego źródło ciepła, w pewnych chwilach załączane i wyłączane, ponieważ w tym przypadku można wysnuć dość daleko idące wnioski dotyczące charakteru krzywych ogrzewania i ostygnięcia i ponieważ otrzymane formuły nadają się bardzo dobrze do opisu przeważnej części otrzymanych krzywych doświadczalnych.

## 2. Sformułowanie problemu w przypadku układu jednoskładnikowego liniowego

Przyjmując do opisu omawianych poprzednio zjawisk jako pierwsze przybliżenie teorię liniową, otrzymujemy następujące równanie jako wyraz bilansu energetycznego układu

$$K d v_1^s / dt + S h (v_1^s - v_0^s) = N \quad (2)$$

gdzie:

- K - pojemność cieplna ciała,
- S - powierzchnia ciała,
- h - współczynnik wymiany ciepła,
- $v_1^s$  i  $v_0^s$  - temperatura ciała i otoczenia,
- N - moc źródła ciepła (w przypadku ostygnięcia  $N=0$ ).

W przypadku ogrzewania przyjmujemy następujący warunek początkowy

$$t = 0, \quad v_1^s = v_0^s \quad (3)$$

w przypadku ostygnięcia

$$t = 0, \quad v_1^s = T_1 \quad (4)$$



przy czym  $T_1$  oznacza wartość końcową krzywej ogrzewania, przyjętą jako początkową.

Rozwiązania równania (2) mają następującą postać: w przypadku ogrzewania

$$v_1^{\delta} = \frac{N}{S h} \left( 1 - e^{-\frac{Sh}{K} t} \right) + v_0^{\delta} \quad (5)$$

w przypadku ostygnięcia

$$v_1^{\delta} = (T_1 - v_0^{\delta}) e^{-\frac{Sh}{K} t} + v_0^{\delta} \quad (6)$$

### 3. Ocena rzędu wielkości różnego rodzaju nieliniowości

Na podstawie danych z literatury oszacujemy wielkość wymienionych wyżej nieliniowości.

#### 3.1. Zależność współczynnika $h$ od różnicy temperatur

W [3,4,5] znajdujemy formuły dla współczynników wymiany ciepła w przypadku konwekcji swobodnej. Są one kształtu  $a (\Delta v)^b$  gdzie  $a$ ,  $b$  oznaczają stałe charakterystyczne dla danego układu,  $\Delta v$  różnicę temperatur.

W przypadku  $b = 1/4$  funkcję tę przedstawiamy w formie wielomianu interpolacyjnego

$$h = 2,57 \left[ 1 + 2,5 \cdot 10^{-3} \Delta v - 1,4 \cdot 10^{-6} (\Delta v)^2 \right] a \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{sec}} \quad (7)$$

Wielkość (7) nie pokrywa się z  $h$  z równania (2), ponieważ nie uwzględnia promieniowania.

### 3.2. Zależność ciepła właściwego ciał od temperatury

W [1] znajdujemy następujące wartości ciepła właściwego:

mosiądz 68	0,0929	+	0,0000217 $\nu^{\delta}$
miedź	0,104	+	0,0000024 $\nu^{\delta}$
glin	0,246	+	0,000078 $\nu^{\delta}$
dural	0,246	+	0,000078 $\nu^{\delta}$

Widzimy, że współczynniki temperaturowe mają tu ten sam rząd wielkości.

### 3.3. Zależność oporu właściwego od temperatury

W [2] znajdujemy następującą zależność oporu właściwego od temperatury:

Dla chromoniklu G(25 % Ni, 20 % Cr, 55 % Fe) wyniki możemy przedstawić za pomocą następującej formuły:

$$R = R_0 [1 + 3 \cdot 10^{-4} \Delta \nu^{\delta} - 1,32 \cdot 10^{-7} (\Delta \nu^{\delta})^2] \quad (8)$$

Dla megapyru II (stop Fe 75 %, Cr 20 %, Al 5 %) wyniki możemy przedstawić za pomocą formuły:

$$R = R_0 [1 + 9 \cdot 10^{-5} \Delta \nu^{\delta} - 3 \cdot 10^{-9} (\Delta \nu^{\delta})^2] \quad (9)$$

Porównanie tych kilku orientacyjnych wartości pokazuje, że najsilniejszą zależność od temperatury wykazują współczynniki wymiany ciepła.

## 4. Sformułowanie problemu nieliniowego

Najogólniejsze sformułowanie problemu nieliniowego, gdy występują wszystkie rodzaje nieliniowości ma następującą postać:

$$K \left[ 1 + b_{1,0} (\nu_1^{\delta} - \nu_0^{\delta}) \right] \frac{d\nu_1^{\delta}}{dt} + S h \left[ (\nu_1^{\delta} - \nu_0^{\delta}) + a_{1,0} (\nu_1^{\delta} - \nu_0^{\delta})^2 + a_{1,0} (\nu_1^{\delta} - \nu_0^{\delta})^3 \right] \\ = N \left[ 1 + r_{1,0} (\nu_1^{\delta} - \nu_0^{\delta}) + r'_{1,0} (\nu_1^{\delta} - \nu_0^{\delta})^2 \right] \quad (10)$$

Poza oznaczeniami wprowadzonymi w (2), występują tu współczynniki temperaturowe  $b_{1,0}$ ,  $a_{1,0}$ ,  $a'_{1,0}$ ,  $r_{1,0}$ ,  $r'_{1,0}$ ,

Jako warunki początkowe przyjęto (3) lub (4)

## 5. Sposób rozwiązania zagadnienia nieliniowego

Równanie (10) w swej ogólnej postaci ma bardzo złożone rozwiązanie. Dlatego obrano następującą metodę, która pozwala uwydatnić wpływ poszczególnych nieliniowości.

Spośród rozpatrzalnych przypadków najważniejszy jest przypadek a), w którym założono liniową zależność  $h$  od  $(4^v)$ , więc uwzględniono jedynie człon zawierający  $a_{1,0}$  z pominięciem wszelkich innych nieliniowości. Już takie proste założenie, jak pokazuje porównanie z doświadczeniem, oddaje dobrze przebieg temperatury, oczywiście w pewnej odległości od początku procesu, ponieważ użyty układ pomiarowy był wieloskładnikowy.

Z tego powodu przypadek ten przyjęto jako przypadek odniesienia przy porównywaniu własności otrzymanych rozwiązań.

W przypadku b) prócz zmienności przyjętej w przypadku a), przyjęto zmienność ciepła właściwego z temperaturą.

W przypadku c) uwzględniono ponadto nieliniowość oporu grzejnika.

W przypadku d) przedyskutowano dodatkowy wpływ drugiego członu we współczynniku wymiary cieplnej.

Główna trudność problemów bardziej złożonych polega na tym, że w miarę uwzględniania coraz większej liczby nieliniowości rośnie stopień mianownika (10), względnie komplikują się współczynniki w mianowniku. Wskutek tego otrzymujemy bardziej złożone wyrażenia na wartości miejsc zerowych mianownika  $\theta_1$ .

W dyskusji porównawczej rozwiązań dużą rolę odgrywa rysunek 3, na którym przedstawiono położenie miejsc zerowych mianownika przy ogrzewaniu i ostygnięciu dla wszystkich przypadków. Wśród tych wartości szczególną rolę odgrywają wartości  $\theta_1$  względnie  $\theta'_1$  jako wartości temperatur stanu ustalonego przy ogrzewaniu i ostygnięciu. Bogata treść rysunku 3 znajduje uzasadnienie w przypisach (P IV). Ponieważ dla krzywych ostygnięcia przyjęto we wszystkich przypadkach temperaturę stanu ustalonego,



przeło  $\theta_1' = v_0'$ . Dla krzywych ogrzewania najmniejszą wartość temperatury stanu ustalonego otrzymujemy w przypadku c), największą w przypadku d).

### Przypadek a)

Równanie różniczkowe dla ogrzewania:

$$\frac{K dv_1'}{N - \text{Sh} [v_1' - v_0' + a_{1,0} (v_1' - v_0')^2]} = dt \quad (11)$$

Rozwiązanie jego przy warunku (3) ma następującą postać

$$v_1' = \frac{\theta_1 - \theta_2 \frac{e^{-\alpha t}}{c}}{1 - \frac{e^{-\alpha t}}{c}} = \theta_1 + \frac{\frac{e^{-\alpha t}}{c} (\theta_1 - \theta_2)}{1 - \frac{e^{-\alpha t}}{c}} = \theta_2 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{1 - \frac{e^{-\alpha t}}{c}} \quad (12)$$

gdzie:

temperatura stanu ustalonego

$$\theta_1 = v_0' + \frac{-\text{Sh} + \sqrt{\text{Sh}^2 h^2 + 4 N \text{Sh} a_{1,0}}}{2 \text{Sh} a_{1,0}} \quad (\text{dodatnia})$$

i wielkość

$$\theta_2 = v_0' + \frac{-\text{Sh} - \sqrt{\text{Sh}^2 h^2 + 4 N \text{Sh} a_{1,0}}}{2 \text{Sh} a_{1,0}} \quad (\text{ujemna}) \quad (13)$$

oznaczają miejsca zerowe mianownika równania (11).

Inne stałe

$$\alpha = - \frac{\sqrt{\text{Sh}^2 h^2 + 4 N \text{Sh} a_{1,0}}}{K} = - \frac{(\theta_1 - \theta_2) \text{Sh} a_{1,0}}{K}$$

$$c = \frac{v_0' - \theta_2}{v_0' - \theta_1}$$

Dla ostygnięcia ( $N = 0$ ) równanie (11) ma rozwiązanie

$$\nu_1^s = \frac{\theta'_1 - \theta'_2 \frac{e^{-\frac{Sh}{K}t}}{1 - \frac{e^{-\frac{Sh}{K}t}}{B}}}{1 - \frac{e^{-\frac{Sh}{K}t}}{B}} = \theta'_1 + \frac{\frac{e^{-\frac{Sh}{K}t}}{B} (\theta'_1 - \theta'_2)}{1 - \frac{e^{-\frac{Sh}{K}t}}{B}} = \theta'_2 + \frac{\theta'_1 - \theta'_2}{1 - \frac{e^{-\frac{Sh}{K}t}}{B}} \quad (14)$$

gdzie:

temperatura stanu ustalonego

$$\theta'_1 = \nu_0^s$$

i wielkość

$$\theta'_2 = \nu_0^s - \frac{1}{a_{1,0}} < 0 \quad (15)$$

oznaczają miejsca zerowe mianownika równania (11),

$$B = 1 + \frac{1 - e^{-\alpha t_1}}{a_{1,0} (\theta_1 - \nu_0^s) (1 - e^{-\alpha t_1})}$$

$t_1$  - chwila końcowa ogrzewania.

Szczegółową dyskusję krzywych i ich porównanie z odpowiednim przypadkiem teorii liniowej podano w przypisach. Wyniki możemy streścić następująco:

1) Dla ogrzewania, wartości stanu ustalonego przy teorii liniowej są większe niż przy teorii nieliniowej. Ze wzrostem mocy odchylenie to rośnie, w funkcji  $(\theta_1 - \nu_0^s)$  Odchylenie ma postać paraboliczną.

2) Jeżeli porównamy współczynnik przy  $e^{-\alpha t}$  w rozwinięciu rozwiązania (12) teorii nieliniowej dla ogrzewania i w rozwiązaniu teorii liniowej, otrzymamy:

$$A^2 a_{2,0}^2 (\theta - \nu_0^s) + A [1 + 4(\theta - \nu_0^s) a_{1,0}] - (\theta - \nu_0^s) [1 + 4(\theta - \nu_0^s) a_{1,0}] = 0$$



gdzie:

$$A = (\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{1}{C} \quad \text{z teorii nieliniowej,}$$

$$\theta - v_0 = \frac{N}{Sh} \quad \text{z teorii liniowej,}$$

A w funkcji  $\theta - v_0$  posiada ekstremum, gdyż dla  $\theta - v_0 = 0$  i  $\theta - v_0 = \infty$  staje się nieskończenie duże. Warunek na ekstremum ma postać złożoną i dlatego go nie podaję.

3) Wykładnik  $-\frac{Sh}{K} \sqrt{1 + \frac{4N}{Sh}} = \alpha_{10}$  jest bezwzględnie większy od wykładnika teorii liniowej, przy czym rośnie bezwzględnie z mocą źródła. Opadanie funkcji wykładniczej jest więc silniejsze w przypadku nieliniowym.

Dla ostygnięcia stan ustalony i wykładnik funkcji wykładniczej są jednakowe w obu teoriach. Współczynnik przy funkcji wykładniczej posiada postać złożoną. W przypisach podane jest rozwinięcie jego w szereg.

Przeliczony w przypisach przykład liczbowy (rys.1) oddaje charakterystyczne własności krzywych, ich monotoniczny przebieg bez przegięcia oraz fakt, że krzywa

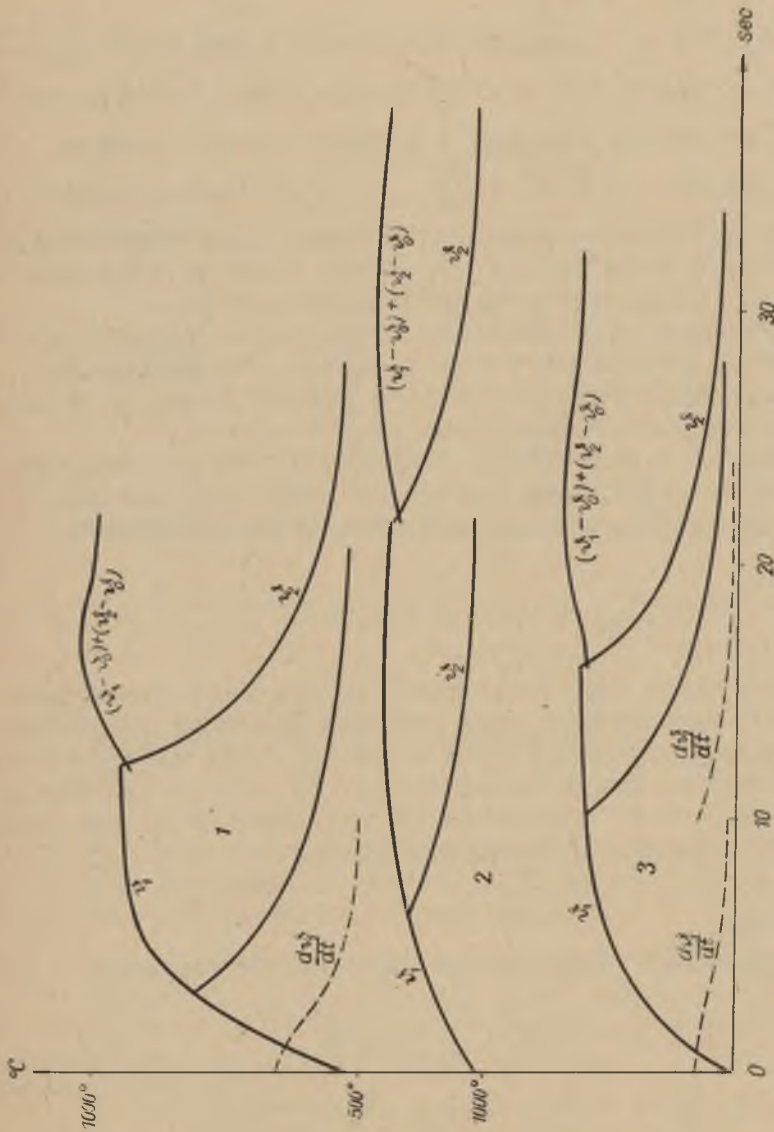
$$(v - v_0)_{og} + (v - v_0)_{ost} = f(t)$$

(og - ogrzewanie, ost - ostygnięcie), nie jest przedłużeniem krzywej ogrzewania, ale posiada charakterystyczny garb. Garb ten otrzymano doświadczalnie dla układów wieloskładnikowych. Przykład wykazuje, że proste założenie nieliniowości  $Sh$  wystarcza do wytłumaczenia tego efektu także dla układu jednoskładnikowego.

#### Przypadek b)

Dla ogrzewania otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{K [1 + b_{1,0} (v_1 - v_0)] d v_1}{N - Sh [(v_1 - v_0) + a_{1,0} (v_1 - v_0)^2]} = dt \quad (16)$$



Rys. 1. Zależność temperatury od czasu w przypadku a). Krzywe  $v_1$  odnoszą się do ogrzewania,  $v_2$  do ostygnięcia. Krzywa nr 1 odpowiada mocy 200 cal/sec, nr 2 mocy 50 cal/sec, nr 3 mocy 100 cal/sec. W przypadku krzywych nr 1 i 2 początek skali temperatur jest przesunięty

Rozwiązanie jego przy warunku  $t = 0, v_1^y = v_0^y$  ma postać

$$\left( \frac{v_1^y - \theta_1}{v_0^y - \theta_1} \right)^{1+b_{1,0}(\theta_1 - v_0^y)} \cdot \left( \frac{v_1^y - \theta_2}{v_0^y - \theta_2} \right)^{-[1+b_{1,0}(\theta_2 - v_0^y)]} = e^{\alpha t} \quad (17)$$

Oznaczenia stałych  $\alpha, \theta_1, \theta_2$ , jak w przypadku a)

Dla  $b_{1,0} \rightarrow 0$  równanie przechodzi w postać z a).

Dla ostygnięcia otrzymujemy przy warunku początkowym  $t = 0, v_1^y = T_1$

$$\frac{v_1^y - \theta_1'}{T_1 - \theta_1'} \cdot \left( \frac{v_1^y - \theta_2'}{T_1 - \theta_2'} \right)^{-\left[1 - \frac{b_{1,0}}{a_{1,0}}\right]} = e^{-\frac{Sh}{K}t}, \quad \frac{b_{1,0}}{a_{1,0}} < 1 \quad (18)$$

Stałe  $\theta_1', \theta_2'$  jak w przypadku a). Dla  $b_{1,0} \rightarrow 0$  wyrażenie dąży do wyrażenia otrzymanego w przypadku a),

Ze względu na bardziej złożoną postać, przeprowadzono porównanie otrzymanych rozwiązań z rozwiązaniami przypadku a). Według obliczeń przeprowadzonych w przypisach jeżeli rozwiązanie dla przypadku ogrzewania napiszemy w postaci

$$\frac{v_1^y - \theta_1}{v_0^y - \theta_1} \cdot \frac{v_0^y - \theta_2}{v_1^y - \theta_2} = \left( \frac{v_1^y - \theta_2}{v_0^y - \theta_2} \right)^{\frac{b_{1,0}(\theta_2 - \theta_1)}{1+b_{1,0}(\theta_1 - v_0^y)}} \cdot e^{\frac{\alpha t}{1+b_{1,0}(\theta_1 - v_0^y)}} \quad (19)$$

otrzymujemy dwójaki wpływ współczynnika  $b_{1,0}$ . Po pierwsze zmienia się wykładnik funkcji wykładniczej, która maleje



wolniej. Po drugie przy funkcji wykładniczej występuje współczynnik, który od wartości 1 dla  $t = 0$  maleje do

$$\left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{v_0 - \theta_2} \right)^{b_{1,0} (\theta_2 - \theta_1)} \frac{b_{1,0} (\theta_2 - \theta_1)}{1 + b_{1,0} (\theta_1 - v_0)} \quad \text{dla } t \rightarrow \infty$$

Jeżeli w prawej stronie równania (19) podstawimy w przybliżeniu za  $v_1$  wartość (12) z a), wtedy efekt wypadkowy polega na maleniu prawej strony z czasem.

Jeżeli wykonamy podobne przekształcenie dla ostygnięcia otrzymujemy tylko wpływ współczynnika przy funkcji wykładniczej, który rośnie od 1 do

$$\left( \frac{T - \theta_2}{v_0 - \theta_2} \right)^{\frac{b_{1,0}}{a_{1,0}}}. \quad \text{Postać wybra-$$

na do dyskusji jest najwygodniejsza. Aby otrzymać z niej zachowanie się temperatury  $v_1$ , oznaczamy dla skrócenia współczynnik przy funkcji wykładniczej przez  $D$  i po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$v_1^{\lambda} = \frac{\theta_1 - \frac{v_0 - \theta_1}{v_0 - \theta_2} \theta_2 \text{ De}^{\beta t}}{1 - \frac{v_0 - \theta_1}{v_0 - \theta_2} \text{ De}^{\beta t}} \quad (20)$$

gdzie:  $\beta$  oznacza zmieniony wykładnik potęgowy.

W mianowniku równania (20) występuje suma dwu wyrazów, z których zmienny maleje, w liczniku występuje różnica, przy czym odjemnik maleje. Stąd wynika wzrost funkcji  $v_1$ . W przypadku a)  $D = 1$  i  $\beta = \alpha$ , więc widoczny jest wpływ  $b_{1,0}$ . Podobnie możemy przedyskutować przypadek ostygnięcia.

#### Przypadek c)

Ze względu na małą wartość członów poprawkowych w wyrażeniu na opór, możemy człony te wprowadzić w liczniku

mocy za pomocą skróconego dzielenia. Równanie dla ogrzewania ma postać następującą:

$$\frac{K [1 + b_{1,0} (v_1^s - v_0^s)] d v_1}{N \{1 - r_{1,0} (v_1^s - v_0^s) - (r'_{1,0} - r_{1,0}^2) (v_1^s - v_0^s)^2\} - \text{Sh} \{v_1^s - v_0^s + a_{1,0} (v_1^s - v_0^s)^2\}} = \dots dt \quad (21)$$

Rozwiązanie przy warunku początkowym  $t = 0, v_1^s = v_0^s$  posiada postać następującą:

$$\left( \frac{v_1^s - \bar{\theta}_1}{v_0^s - \theta_1} \right)^{1+b_{1,0}(\bar{\theta}_1 - v_0^s)} \cdot \left( \frac{v_1^s - \bar{\theta}_2}{v_0^s - \theta_2} \right)^{-[1+b_{1,0}(\bar{\theta}_2 - v_0^s)]} = e^{\bar{\alpha} t} \quad (22)$$

przy czym

$$\bar{\alpha} = \frac{(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - \text{Sh} a_{1,0}]}{K} \quad (23)$$

$$\bar{\theta}_{2,1} = v_0^s + \frac{Nr_{1,0} + \text{Sh} \pm \sqrt{(Nr_{1,0} + \text{Sh})^2 - 4N[N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - \text{Sh} a_{1,0}]}}{2[N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - \text{Sh} a_{1,0}]}$$

$\bar{\theta}_{2,1}$  oznaczają miejsca zerowe mianownika równania (21).  $\bar{\theta}_1$  oznacza temperaturę stanu ustalonego. Ze względu na przeprowadzone dalej porównanie z przypadkiem a) wielkości  $\bar{\theta}_1$  oznaczono kreską u góry.

Równanie różniczkowe dla ostygnięcia oraz jego rozwiązanie mają w tym przypadku postać, jak w przypadku b).

W przypisach przeprowadzono dyskusję rozwiązania dla ogrzewania. Aby uzyskać przejrzystsze wyrażenie na  $\bar{\theta}_1$ , uwzględniono tylko liniową zależność oporu od temperatury. Pozwala to ocenić wpływ zmienności oporu grzejnika na te wielkości. Następnie opierając się na tej dyskusji, przedyskutowano przypadek ogólny. Rysunek 3 pokazuje położenie  $\bar{\theta}_1, \theta'_1$  oraz porównanie z innymi przypadkami.

Wyrażenie możemy również doprowadzić do przejrzystej postaci przy upraszczającym założeniu co do zmienności oporu z temperaturą. Porównanie wyrażen na temperaturę z przypadkiem a), przeprowadzono podobnie, jak w przypadku b). Analizę tę wykonano dwustopniowo. W pierwszej części przeprowadzono ją bez uwzględnienia zmienionej postaci  $\bar{\theta}_1$ . W drugiej części przeprowadzono dodatkowo dyskusję tego wpływu.

#### Przypadek d) (ogólny)

Ponieważ w tym przypadku  $\theta_1$  wyznacza się z równania trzeciego stopnia, co daje wyniki nieprzejrzyste, przeprowadzono najpierw dyskusję dla ostygnięcia. Przypadek ogrzewania rozpatrzono następnie zakładając moc stałą i następnie zakładając moc zależną od temperatury.

Równanie różniczkowe w przypadku ostygnięcia posiada postać następującą:

$$\frac{K [1 + b_{1,0} (\nu_1^s - \nu_0^s)] d \nu_1}{Sh [(\nu_1^s - \nu_0^s) + a_{1,0} (\nu_1^s - \nu_0^s)^2 + a'_{1,0} (\nu_1^s - \nu_0^s)^3]} = - dt \quad (24)$$

Miejsca zerowe mianownika:

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \nu_0^s \\ \theta'_2 &= \nu_0^s + \frac{-a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{2 a'_{1,0}} < 0 \\ \theta'_3 &= \nu_0^s + \frac{-a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{2 a'_{1,0}} > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Stanowi ustalonemu odpowiada  $\theta'_1$ .



Rozwiązanie przy warunkach  $t = 0$ ,  $v_1 = T$  oraz zależnościach

$$\begin{aligned}\theta'_1 - \theta'_2 &= \frac{a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{2 a_{1,0}} \\ \theta'_1 - \theta'_3 &= \frac{a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{2 a_{1,0}} \\ \theta'_2 - \theta'_3 &= \frac{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{a_{1,0}}\end{aligned}\quad (26)$$

możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned}e^{-\frac{Sh}{k}t} &= \left(\frac{v_1 - \theta'_1}{T - \theta'_1}\right) \cdot \left(\frac{v_1 - \theta'_2}{T - \theta'_2}\right) \frac{-2 a'_{1,0} [1 + b_{1,0}(\theta'_2 - v'_0)]}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a_{1,0}(a'_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{v_1 - \theta'_3}{T - \theta'_3}\right) \frac{2 a'_{1,0} [1 + b_{1,0}(\theta'_3 - v'_0)]}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a_{1,0}(a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a_{1,0}})}}\end{aligned}\quad (27)$$

Porównanie tego przypadku z analogicznym a) przeprowadzono w przypisach.

Dyskusję przypadku ogrzewania przeprowadzamy w pierwszym etapie, zakładając, że opór grzejnika nie zależy od temperatury.

Równanie różniczkowe ma postać następującą:

$$\begin{aligned}K \left[ 1 + b_{1,0} (v_1 - v'_0) \right] \frac{dv_1}{dt} + Sh \left[ (v_1 - v'_0) + \right. \\ \left. + a_{1,0} (v_1 - v'_0)^2 + a'_{1,0} (v_1 - v'_0)^3 \right] = N\end{aligned}\quad (28)$$

Jeżeli oznaczymy przez  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  pierwiastki równania

$$N - \text{Sh} [(\nu_1^i - \nu_0^i) + a_{1,0}(\nu_1^i - \nu_0^i)^2 + a'_{1,0}(\nu_1^i - \nu_0^i)^3] = 0 \quad (29)$$

wtedy otrzymujemy przy warunku początkowym  $t = 0$ ,  $\nu_1^i = \nu_0^i$  rozwiązanie

$$e^{\bar{\alpha}t} = \left(\frac{\nu_1 - \theta_1}{\nu_0 - \theta_1}\right)^A \cdot \left(\frac{\nu_1 - \theta_2}{\nu_1 - \theta_2}\right)^B \cdot \left(\frac{\nu_1 - \theta_3}{\nu_0 - \theta_3}\right)^C \quad (30)$$

przy czym

$$\bar{\alpha} = - \frac{\text{Sh } a'_{1,0}(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3)}{K}$$

$$A = \left[1 + b_{1,0}(\theta_1 - \nu_0^i)\right](\theta_2 - \theta_3)$$

$$B = \left[1 + b_{1,0}(\theta_2 - \nu_0^i)\right](\theta_1 - \theta_3)$$

$$C = \left[1 + b_{1,0}(\theta_3 - \nu_0^i)\right](\theta_1 - \theta_2)$$
(31)

W przypadku uwzględnienia zmienności oporu z temperaturą, ulegają zmianie niektóre współczynniki równania (29) i przybiera ono postać

$$N - \text{Sh} \left\{ \left(1 + \frac{Nr_{1,0}}{\text{Sh}}\right)(\nu_1^i - \nu_0^i) + \left(a_{1,0} + \frac{r'_{1,0} - r_{1,0}^2}{\text{Sh}} N\right)(\nu_1^i - \nu_0^i)^2 + a'_{1,0}(\nu_1^i - \nu_0^i)^3 \right\} = 0 \quad (29a)$$

W przypisach przeprowadzono porównanie tego przypadku z poprzednimi. Przede wszystkim przedyskutowano i przedstawiono na rysunku 3 wzajemne położenie punktów  $\theta_1$  i  $\theta'_1$  dla ogrzewania i ostygnięcia.

Ponieważ wyznaczenie położenia tych stałych dla ostygnięcia nie przedstawia w żadnym przypadku wątpliwości, wyznaczone przede wszystkim te wartości. Na tej podstawie przedyskutowano przebieg mianownika, potraktowanego jako wielomian w  $v_1 - v_0$ . Wreszcie, wychodząc z obserwacji, że równanie typu (29) powstaje z odpowiedniego równania dla ostygnięcia, przez dodanie  $N_0$  sprowadzono rozwiązanie równania typu (29) w przypadku stałej mocy do przecięcia krzywej zmienności mianownika równań dla ostygnięcia  $y = f(v_1 - v_0)$  z prostą  $y = -N_0$ .

W przypadku zmiennej mocy źródła, dyskusja równania typu (29a) wymaga wprowadzenia fikcyjnego równania dla ostygnięcia przez zerowanie wyrazu wolnego i podobnego od niej przejścia jak w przypadku (29).

Liczne przeliczenia w przypisach pozwoliły wyznaczyć wzajemne położenie punktów  $\theta_1$ , w szczególności temperatur stanu ustalonego  $\theta_1$  dla wszystkich przypadków.

Ponadto przeprowadzono w przypisach porównanie wyrażenia (30) dla temperatury z wyrażeniem przypadku a) metodą stosowaną w przypadku b) i c). Jak w przypadku c) mamy tu dwojaki wpływ:

1) współczynnika przy funkcji wykładniczej i ewentualnie wykładnika oraz

2) przesunięcia stałych  $\theta_1$ .

Otrzymane w tym przypadku złożone wyrażenia podano w przypisach

## PRZYPISY

### P-I. Własności krzywych w przypadku a)

Przebieg krzywych czasowych.

Najprostsza do dyskusji jest postać następująca:

$$v_1 = \theta_2 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{1 - \frac{e^{-\alpha t}}{C}} \quad v_1 = \theta'_2 + \frac{\theta'_1 - \theta'_2}{1 - \frac{Sh}{k} \frac{e^{-\frac{Sh}{k} t}}{B}} \quad (\text{PI-1})$$

Z powyższych równań jak też z badania zachowania się pochodnych tych funkcji, wynika monotoniczność krzywych.



Potwierdza to rysunek 1 i tabela II, odnosząca się do przykładu obliczonego dla orientacyjnie przyjętych wartości z tabeli I.

W tabeli II rozpatrzono dwa przypadki ostygnięcia, dla dwu początkowych wartości temperatury.

Tabela I

N cal/sec	$\theta_1$ °C	$\theta_2$ °C	$\alpha$ 1/sec
50	385,5	= 845,5	= 0,290
100	603,9	= 1064,0	= 0,3933
200	922,5	= 1283,0	= 0,5436

$$Sh = 79,10^{-3} \text{ cal/grd.sec}$$

$$\theta'_1 = 20^\circ\text{C}$$

$$a_{1,0} = 2,10^{-3} \text{ 1/grd}$$

$$\theta'_2 = -480^\circ\text{C}$$

$$K = 0,67 \frac{\text{cal}}{\text{grd sec}}$$

$$Sh/K = 0,1179 \text{ 1/sec}$$

Tabela II

N = 50 cal/sec

czas sec	Ogrzewanie		Ostygnięcie			$(v^i - v_0^i) + (v^i - v_0^i)_{\text{ost}}$		$\frac{(v^i - v_0^i)_{200}}{(v^i - v_0^i)_{50}}$
	$v$ °C	$\frac{dv}{dt}$ grd/sec	$v$ °C	$\frac{dv}{dt}$ grd/sec	$v$ °C	1	2	
	0	20,0	74,6	300,9	- 51,7	385,0	280,9	
2	150,8	55,1	218,5	- 32,7	270,1	329,1	380,9	3,746
4	241,1	37,8	164,7	- 22,0	198,7	365,8	399,8	3,372
6	300,7	22,9	127,8	- 15,5	151,3	388,5	412,0	3,086
8	336,6	14,1	119,2	- 11,2	118,3	415,8	414,9	2,790
10	357,7	7,9	85,0	- 8,2	97,9	402,7	415,6	2,621
12	369,7	4,5	67,9	- 6,2	77,1	397,6	406,8	
14	376,6	2,6	67,1	- 4,7	64,1	693,7	400,7	
16	380,6	1,4	48,8	- 3,6	54,2	389,4	394,8	
18	382,7	0,8	42,5	- 2,2	46,6	385,2	389,3	
20	383,9	0,5						
22	384,9	0,3						

N = 100 cal/sec

czas sec	Ogrzewanie		Ostygnięcie			$(v-v_0)_{og} + (v-v_0)_{ost}$		$\frac{(v-v_0)_{og}}{(v-v_0)_{50}}$
	$v$	$\frac{dv}{dt}$	$v$	$\frac{dv}{dt}$	$v$	1	2	
	°C	grd/sec	°C	grd/sec	°C			
0	19,9	149,3	586,9	- 142,6	601,4	566,9	581,4	
2	275,5	103,8	381,8	- 73,5	389,3	617,3	624,6	1,953
4	440,0	58,7	268,0	- 43,9	272,4	658,0	672,4	1,900
6	523,0	30,4	197,4	- 28,4	200,3	680,4	683,3	1,792
8	578,0	14,5	150,4	- 19,4	152,4	688,4	690,4	1,762
10	586,7	6,8	122,0	- 13,8	123,5	668,7	670,2	1,678
12	598,8	3,1	94,1	- 10,0	95,1	652,9	653,9	1,655
14	601,5	1,4	77,2	- 7,5	77,3	638,9	639,1	1,631
16	602,8	0,6	63,8	- 5,0	64,4	626,6	627,2	1,616
18			54,0	- 4,3	54,4			

N = 200 cal/sec

Czas sec	Ogrzewanie		Ostygnięcie			$(v-v_0)_{og} + (v-v_0)_{ost}$	$\frac{(v-v_0)_{20}}{(v-v_0)_{40}}$
	$v$	$\frac{dv}{dt}$	$v$	$\frac{dv}{dt}$	$v$		
	°C	grd/sec	°C	grd/sec	°C		
0	20,0	298,7	665,2	- 174,4	918,6	898,6	-
2	510,7	183,5	421,1	- 85,2	535,7	1005,7	1,918
4	765,5	79,6	291,1	- 47,1	343,9	1069,4	1,775
6	886,2	29,5	212,2	- 31,4	252,0	1098,2	1,722
8	903,5	10,2	160,5	- 21,2	180,9	1050,4	1,583
10	915,0	3,5	128,8	- 14,8	143,6	1023,6	1,565
12			105,8	- 10,8	112,5		
14			80,7	- 8,0	90,4		
16			66,7	- 6,0	74,0		
18			66,2	- 4,6	61,7		

Zależność występujących w rozwiązaniach wielkości od poszczególnych parametrów jest następująca: krzywa ogrzewania określona jest za pomocą temperatury  $\theta_1$ , stanu ustalonego oraz  $\theta_2, \alpha, C$ . Wielkości  $|\alpha|, \theta_1, |\theta_2|$  rosną ze wzrostem mocy N. Wielkość  $|\alpha|$  maleje przy K rosnącym, rośnie z Sh. W odróżnieniu od przypadku liniowego wielkość  $|\alpha|$  zależy od mocy N. Wielkości  $\theta_1, |\theta_2|$  maleją z Sh rosnącym. Wielkość C rośnie bezwzględnie z N rosnącym i Sh malejącym.

Krzywa ostygnięcia zależy od: temperatury  $\theta_1'$  stanu ustalonego równej temperaturze otoczenia, wykładnika  $= Sh/K$  (jak w teorii liniowej) oraz od  $\theta_2'$ , B. Stałe  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$  nie zależą od mocy źródła.

Rozpatrzmy związki między parametrami teorii liniowej i nieliniowej. Teoria liniowa daje dwie wielkości: wykładnik  $\alpha = -Sh/K$  i stan ustalony  $N/Sh = \theta - \nu_0$ .

W celu porównania stanów ustalonych ze wzoru liniowej teorii i z (13) wyprowadzamy zależność

$$(\theta_1 - \nu_0)^2 \cdot a_{1,0} = \theta - \nu_0 = (\theta_1 - \nu_0) \quad (\text{P I-2})$$

Różnica między obu temperaturami rośnie więc parabolicznie z  $\theta_1 - \nu_0$ .

Wykładnik  $= \frac{1}{K} \sqrt{S^2 h^2 + 4 N Sh a_{1,0}}$  jest bezwzględnie większy od  $|-Sh/K|$ .

Niżej podajemy rozwinięcie funkcji temperatury ogrzewania w szereg potęgowy.

Ponieważ  $\frac{1}{C} = \frac{\nu_0 - \theta_1}{\nu_0 - \theta_2}$  jest ułamkiem właściwym, możemy

$\nu_1$  rozwinąć w szereg

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (\theta_1 - \theta_2) \frac{\nu_0 - \theta_1}{\nu_0 - \theta_2} e^{\alpha t} (1 + \frac{1}{C} e^{\alpha t} + \frac{1}{C^2} e^{2\alpha t} + \dots) = \\ &= \theta_1 + (\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{1}{C} e^{\alpha t} + (\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{1}{C^2} e^{2\alpha t} + (\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{1}{C^3} e^{3\alpha t} + \dots \end{aligned}$$

(P I-3)

Oznaczając  $\Lambda$  współczynnik przy  $e^{\alpha t}$ , mamy między  $\Lambda$  i  $\theta - \nu_0$  związek

$$\Lambda^2 a_{1,0} (\theta - \nu_0) = [1 + 4(\theta - \nu_0) a_{1,0}] [\theta - \nu_0 - \Lambda] \quad (\text{P I-4})$$



Jeżeli to równanie rozwiążemy ze względu na  $A$ , otrzymana funkcja ma ekstremum, ponieważ dąży do nieskończoności dla  $\theta - \nu_0 = 0$  oraz  $\theta - \nu_0 = \infty$ . Warunek na ekstremum ma postać złożoną i dlatego nie podajemy go.

Wzory (P I-2) i (P I-4) możemy nieco skomplikować, uwzględniając fakt, że  $Sh$  teorii liniowej jest wartością początkową dla teorii nieliniowej. Słuszniejsze byłoby porównanie wartości z teorii nieliniowej z wartościami obliczonymi za pomocą teorii liniowej dla pewnej temperatury średniej  $T$ . Jest to równoważne podstawieniu za  $\theta_1 - \nu_0$  wyrażen  $(\theta - \nu_0) [1 + a_{1,0} (T - \nu_0)]$ . Nie zmienia to jednak zasadniczego charakteru zależności.

W końcu rozwijamy funkcję temperatury ostygnięcia w szereg potęgowy, Ze względu na  $B > 1$ , możemy napisać

$$\nu_1 = \left( \theta_1 - \theta_2 \frac{e}{B} - \frac{Sh}{k} t \right) \left[ 1 + \frac{e}{B} - \frac{Sh}{k} t + \left( \frac{e}{B} - \frac{Sh}{k} t \right)^2 + \dots \right] =$$

(P I-5)

$$= \theta_1 + (\theta_1 - \theta_2) \left( \frac{e}{B} - \frac{Sh}{k} t + \frac{e}{B^2} - \frac{2Sh}{k} t + \frac{e}{B^3} - \frac{3Sh}{k} t + \dots \right)$$

Rozwijając analogicznie współczynnik przy  $e^{-\frac{Sh}{K} t}$  [przy założeniu, że  $1/C$  oraz  $a_{1,0} (\theta_1 - \nu_0) (1 - e^{-\frac{Sh}{K} t})$  są małe wobec jedności] otrzymujemy:

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{B} = \frac{(\theta_1 - \nu_0)(1 - e^{-\alpha t_1})}{a_{1,0} (\theta_1 - \nu_0)(1 - e^{-\alpha t_1}) + 1 - \frac{e^{-\alpha t_1}}{C}} =$$

$$= (\theta_1 - \nu_0)(1 - e^{-\alpha t_1}) \left\{ 1 + \frac{e^{-\alpha t_1}}{C} - a_{1,0} (\theta_1 - \nu_0)(1 - e^{-\alpha t_1}) + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{e^{-\alpha t_1}}{C} - a_{1,0} (\theta_1 - \nu_0)(1 - e^{-\alpha t_1}) \right]^2 + \dots \right\} \quad (P I-6)$$

Jeżeli porównamy ten współczynnik ze współczynnikami teorii liniowej  $1 - e^{\alpha t}$ , widzimy wpływ dwojaki: współczynnika  $\theta_1 - \nu^{\lambda}$ , który różni się od stanu ustalonego teorii liniowej<sup>o</sup> (P I-2) oraz wpływ szeregu, stojącego nawiasie obok jedynki.

P-II. Własności krzywych temperatur przypadku b)

W celu porównania wyrażenia na zmianę temperatury przy ogrzewaniu, z wyrażeniem dla przypadku a), sprowadzamy równania (17) do postaci

$$\frac{\nu_1 - \theta_1}{\nu_0 - \theta_1} \cdot \frac{\nu_0 - \theta_2}{\nu_1 - \theta_2} = \left( \frac{\nu_1 - \theta_2}{\nu_0 - \theta_2} \right)^{b_{1,0}(\theta_2 - \theta_1) / (1 + b_{1,0}(\theta_1 - \nu_0))} \cdot e^{\frac{\alpha t}{1 + b_{1,0}(\theta_1 - \nu_0)}} \quad (\text{P II-1})$$

Lewa strona ostatniego wyrażenia pokrywa się z lewą stroną równania (12) rozwiązanego ze względu na funkcję wykładniczą, różnica więc w porównaniu z przypadkiem a) wyraża się we współczynniku przy funkcji wykładniczej [zmienny od 1 do  $t = 0$  do

$$\left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{\nu_0 - \theta_2} \right)^{\frac{b_{1,0}(\theta_2 - \theta_1)}{1 + b_{1,0}(\theta_1 - \nu_0)}}$$

dla  $t = \infty$ ] oraz w wykładniku, w którym wpływ  $b_{1,0}$  działa pomniejszająco, czyli zwalnia zanikanie funkcji wykładniczej. Wypadkowy wpływ otrzymamy, podstawiając w prawej stronie  $\nu_1$ , z równania (P I-1) czyli

$$\frac{\nu_1 - \theta_2}{\nu_0 - \theta_2} = \frac{c(\theta_1 - \theta_2)}{(\nu_0 - \theta_2)(c - e^{\alpha t})} \quad (\text{P II-2})$$

Wtedy prawa strona (P II-1) maleje ze wzrostem czasu silniej, niż  $e^{\alpha t}$ .

Podobnie otrzymujemy dla ostygnięcia:

$$\frac{v_1 - \theta'_1}{T - \theta'_1} \left( \frac{T - \theta'_2}{v_1 - \theta'_2} \right) = \left( \frac{T - \theta'_2}{v_1 - \theta'_2} \right)^{\frac{b_{1,0}}{a_{1,0}}} \cdot e^{-\frac{Sh}{K}t} \quad (\text{P II-3})$$

Lewa strona równania (P II-3) pokrywa się z lewą stroną równania (14), rozwiązanego ze względu na funkcję wykładniczą. Wykładnik prawej strony jest taki jak w przypadku a), współczynnik przy funkcji wykładniczej rośnie od

$$1 \text{ do } \left( \frac{T - \theta'_2}{v_1 - \theta'_2} \right)^{\frac{b_{1,0}}{a_{1,0}}}.$$

Rysunek 2 daje przebieg krzywych dla przykładu liczbowego, którego dane znajdują się w tabeli III i IV,

Tabela III

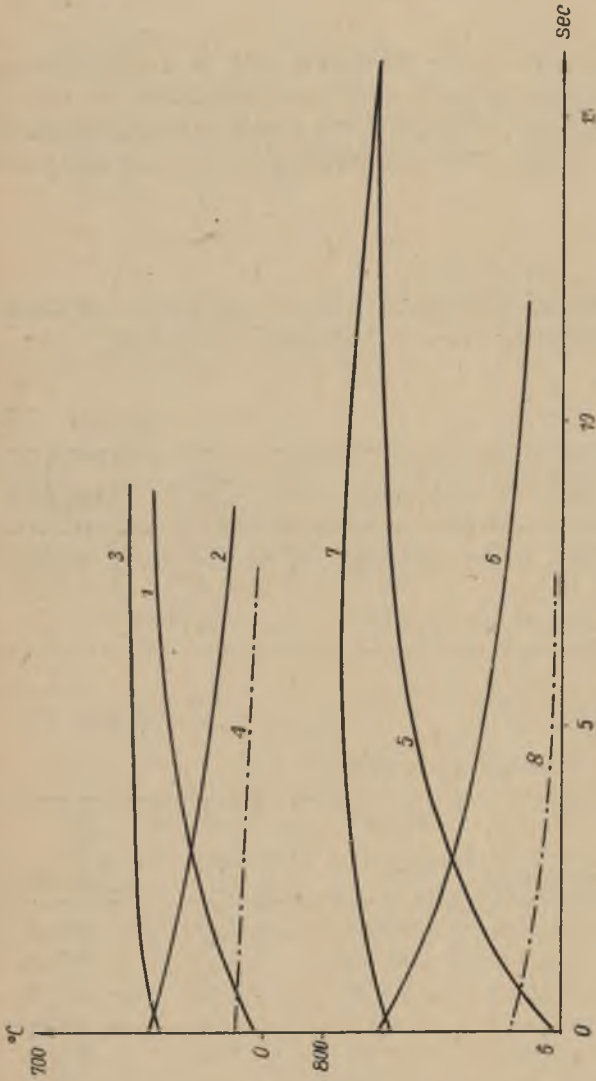
N cal/sec	$\theta_1$ °C	$\theta_2$ °C	1/A 1/sec	B/A	$b_{1,0}$ 1/grd
50	385,5	- 845,5	- 0,2705	- 0,7706	$2 \cdot 10^{-2}$
100	603,9	- 1064,0	- 0,3523	- 0,7016	

Tabela IV

N = 50 cal/sec

Czas sec	$v$ °C	$\frac{dv}{dt}$ grd/sec	Czas sec	$v$ °C	$\frac{dv}{dt}$ grd/sec
0,000	20	74,6	0,000	350	- 49,2
0,416	50	70,5	0,9191	300	- 37,9
1,165	100	62,7	2,082	250	- 27,9
2,024	150	54,0	3,620	200	- 18,6
3,039	200	44,2	5,796	150	- 10,6
4,799	250	33,5	8,503	100	
6,169	300	21,9			
8,713	350	9,4			





Rys. 2. Zależność temperatury od czasu w przypadku b) Krzywe nr 1 i 5 odnoszą się do ogrzewania, krzywe nr 2 i 6 do ostygnięcia, nr 3 i 7 przedstawiają  $(\psi_1 - \psi_0) + (\psi_2 - \psi_0)$  Krzywe nr 4 i 8 przedstawiają  $\frac{d\psi_1}{dt}$  Krzywe nr 1+4 odnoszą się do mocy 50 cal/sec, nr 5+8 do mocy 100 cal/sec

N = 100 cal/sec

Czas sec	$\omega$ °C	$\frac{d\omega}{dt}$ grd/sec	Czas sec	$\omega$ °C	$\frac{d\omega}{dt}$ grd/sec	Czas sec	$\frac{(\omega-\omega_0)_{0,1}}{(\omega-\omega_0)_{0,5}}$	$\frac{(\omega-\omega_0)_{100}}{(\omega-\omega_0)_{50}}$
0,000	20	149,3	0,000	600	- 101,2	0,000	58	
0,559	100	136,2	0,8637	500	- 73,3	0,5599	625	2,000
1,352	200	116,2	2,015	400	- 48,8	1,352	655	2,000
2,310	300	92,7	3,693	300	- 27,9	2,310	680	2,000
3,584	400	65,4	6,393	200	- 10,8	3,584	680	1,944
5,628	500	35,1	12,06	100		5,628	695	1,811
7,553	550	18,6				7,553	695	1,737
16,54	600	1,4				12,06	650	

P-III. Dyskusja przypadku c)

Tu jedynie analiza przypadku ogrzewania sprawia pewne trudności.

Przeprowadzimy dyskusję wyrażen

$$\bar{\theta}_{2,1} = \omega_0 + \frac{Nr_{1,0} + Sh \pm \sqrt{(Nr_{1,0} + Sh)^2 - 4N [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - Sha_{1,0}]}}{2 [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - Sha_{1,0}]}$$

(P III-1)

Dla uproszczenia dyskusji przyjmiemy  $r'_{1,0} = 0$  oraz pominie-  
niemy  $r_{1,0}^2$

$$\bar{\theta}_{2,1} = \omega_0 - \frac{Nr_{1,0} + Sh \pm \sqrt{(Nr_{1,0} + Sh)^2 + 4N Sh a_{1,0}}}{2 Sh a_{1,0}}$$

(P III-2)

Wpływ  $r_{1,0}$  uwidacznia się w członie  $-N r_{1,0} / 2 Sh a_{1,0}$ ,

o który została przesunięta średnia  $\bar{\theta}_1$ . Także oba pier-  
wiastki  $\bar{\theta}_1$  oddaliły się od tej średniej. W pełnym wy-  
rażeniu o oddaleniu obu pierwiastków decyduje wartość  
 $-4N [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - Sh a_{1,0}]$

Mamy tu zmniejszenie odległości. Wpływ członu  $N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0})$  możemy przedstawić w formie czynnika  $1 + N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) / \text{Sh } a_{1,0}$  przesuwającego obie wartości  $\bar{\theta}_1$  wobec  $\bar{\theta}_1$ ,

Z kolei przeprowadzimy dyskusję wielkości  $\bar{\alpha}$ .

$$\bar{\alpha} = \frac{(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - \text{Sh } a_{1,0}]}{K [1 + b_{1,0} (\bar{\theta}_1 - \nu_0^s)]} \quad (\text{P III-3})$$

Ponieważ wyrażenie to powinno być ujemne, otrzymujemy nierówność  $N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - \text{Sh } a_{1,0} < 0$ . Wyrażenie to przybiera prostą postać, jeżeli podstawimy w nim, przy założeniu  $Nr_{1,0}$  małego wobec pozostałych członów w (P III-2) i rozwinięcia pierwiastków według małej wielkości  $Nr_{1,0}$  wyrażenia przybliżone na  $\bar{\theta}_1$  i  $\bar{\theta}_2$ :

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 + \frac{(\theta_2 - \nu_0^s) N r_{1,0}}{\sqrt{S^2 h^2 + 4N \text{Sh } a_{1,0}}} \quad (\text{P III-4})$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \frac{(\theta_1 - \nu_0^s) N r_{1,0}}{\sqrt{S^2 h^2 + 4N \text{Sh } a_{1,0}}}$$

Wtedy

$$\bar{\alpha} = - \frac{(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \text{Sh } a_{1,0}}{K [1 + b_{1,0} (\bar{\theta}_1 - \nu_0^s)]} = \alpha \left[ 1 - \frac{N r_{1,0}}{a_{1,0} (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)} - b_{1,0} (\bar{\theta}_1 - \nu_0^s) \right] \quad (\text{P III-5})$$

W porównaniu z przypadkiem a), człony zawierające  $r_{1,0}$  i  $a_{1,0}$  powiększają wyrażenie, człon zawierający  $b_{1,0}$  pomniejsza. W pełnym wyrażeniu (P III-3) o wzroście de-



cyduje poza  $a_{1,0}$  jeszcze  $1-N(r_{1,0}^2-r'_{1,0})/Sh a_{1,0}$  nie uwzględnione w (P III-5). Wpływ  $b_{1,0}$  pozostaje nie zmieniony.

Porównanie wyrażenia na temperaturę w przypadku c) i a) przebiega następująco:  
Postępując analogicznie, jak w przypadku b) napiszemy

$$\frac{v_1^s - \bar{\theta}_1}{v_0^s - \bar{\theta}_1} \cdot \frac{v_0^s - \bar{\theta}_2}{v_1^s - \bar{\theta}_2} =$$

$$= \left( \frac{v_1^s - \bar{\theta}_2}{v_0^s - \bar{\theta}_2} \right) \cdot \frac{b_{1,0}(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)}{1 + b_{1,c}(\bar{\theta}_1 - v_0^s)} \cdot \frac{(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - Sh a_{1,0}]}{K [1 + b_{1,0}(\bar{\theta}_1 - v_0^s)]}$$

(P III-6)

Postać ostatniego równania jest analogiczna jak w przypadku b) tylko zmieniły się  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\theta}_1$ ,  $\bar{\theta}_2$ .

W porównaniu więc z przypadkiem a) mamy tu odchylenia tego rodzaju, jak w przypadku b). Do tego dochodzi efekt przesunięcia wielkości  $\theta_1$ . Jeżeli wielkości przypadku a) oznaczymy  $\theta_1$ , wtedy  $\bar{\theta}_1 = \theta_1 + \Delta\theta_1$ ,  $i = 1, 2$ .

Przekształcamy lewą stronę (P III-6), uwzględniając tylko pierwsze potęgi  $\Delta\theta_1$ .

$$\frac{v_1^s - \bar{\theta}_1}{v_0^s - \bar{\theta}_1} \cdot \frac{v_0^s - \bar{\theta}_2}{v_1^s - \bar{\theta}_2} =$$

$$= \frac{v_1^s - \theta_1}{v_0^s - \theta_1} \cdot \frac{v_0^s - \theta_2}{v_1^s - \theta_2} \left[ 1 + (v_1^s - v_0^s) \left[ \frac{\Delta\theta_1}{(v_0^s - \theta_1)(v_1^s - \theta_1)} - \frac{\Delta\theta_2}{(v_0^s - \theta_2)(v_1^s - \theta_2)} \right] \right]$$

(P III-7)

Wyrażenie poprawkowe posiada postać następującą:

$$\frac{(v_1^s - v_0^s)(v_0^s - \theta_2)}{v_0^s - \theta_1} \left[ \frac{\Delta\theta_1}{(v_0^s - \theta_1)(v_1^s - \theta_2)} - \frac{\Delta\theta_2 (v_1^s - \theta_1)}{(v_0^s - \theta_2)(v_1^s - \theta_2)^2} \right]$$

(P III-8)

Jeżeli podstawimy tu wielkości (P III-4) otrzymamy:

$$\frac{(\nu_1^s - \nu_0^s)(\nu_0^s - \theta_2) N r_{1,0}}{(\nu_0^s - \theta_1) \sqrt{s^2 h^2 + 4N Sh a_{1,0}}} \cdot \frac{\nu_1^s - \theta_2 + \nu_1^s - \theta_1}{(\nu_1^s - \theta_2)^2} \quad (\text{P III-9})$$

Jeżeli podstawimy tu przybliżenie  $\nu_1^s$  jak w przypadku a), otrzymamy

$$\frac{(\nu_1^s - \nu_0^s)(2\nu_1^s - \theta_1 - \theta_2)}{(\nu_1^s - \theta_2)^2} = \frac{(1 + \frac{e}{c} \alpha t) [(\theta_2 - \nu_0^s)(1 - \frac{e}{c} \alpha t) + \theta_1 - \theta_2]}{\theta_1 - \theta_2} \quad (\text{P III-10})$$

więc wzrost od 0 do  $\frac{\theta_1 - \nu_0^s}{\theta_1 - \theta_2}$ .

#### P.IV. Dyskusja przypadku d)

Podstawiając poniższe wielkości do rozwiązania, odnoszącego się do ostygania

$$\theta'_1 - \theta'_2 = \frac{a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{2 a'_{1,0}}$$

$$\theta'_1 - \theta'_3 = \frac{a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{2 a'_{1,0}} \quad (\text{P IV-1})$$

$$\theta'_2 - \theta'_3 = \frac{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}}}{a'_{1,0}}$$

możemy napisać

$$e^{-\frac{Sh}{K}t} = \frac{2 a'_{1,0} [1 + b_{1,0} (\theta'_2 - \nu'_0)]}{\left(\frac{\nu'_1 - \theta'_1}{T - \theta'_1}\right) \left(\frac{\nu'_1 - \theta'_2}{T - \theta'_2}\right) \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}} (a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})} \cdot \frac{2 a'_{1,0} [1 + b_{1,0} (\theta'_3 - \nu'_0)]}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}} (a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})} \quad \text{(P IV-2)}$$

$$\cdot \left(\frac{\nu'_1 - \theta'_3}{T - \theta'_3}\right)$$

Przejście do granicy  $a'_{1,0} \rightarrow 0$  daje

$$\theta'_2 \rightarrow -\frac{1}{a_{1,0}} + \nu'_0$$

$$\theta'_3 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\nu'_1 - \theta'_3}{T - \theta'_3} \rightarrow 1$$

$$\frac{\nu'_1 - \theta'_2}{T - \theta'_2} \rightarrow \frac{\nu'_0 - \nu'_0 + \frac{1}{a_{1,0}}}{T - \nu'_0 + \frac{1}{a_{1,0}}} \quad \text{(P IV-3)}$$

$$\frac{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}} (a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})}{2 a'_{1,0}} \rightarrow 1$$

$$\frac{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}} (a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})}{2 a'_{1,0}} \rightarrow \infty$$

$$\frac{[1 + b_{1,0} (\theta'_2 - \nu'_0)] 2 a'_{1,0}}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}} (a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})} \rightarrow 1 - \frac{b_{1,0}}{a_{1,0}}$$

$$\frac{[1 + b_{1,0} (\theta'_3 - \nu'_0)] 2 a'_{1,0}}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}} (a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})} \rightarrow 0$$

otrzymujemy więc rozwiązanie przypadku b).



Wielkości  $\theta'_1$  dla ostygnięcia i  $\theta_1$  dla ogrzewania zestawiono na rysunku 3. Oznaczono na nim przez  $y$  mianowniki poszczególnych równań różniczkowych. Są to w  $v_1 - v_0$  parabole drugiego i trzeciego stopnia. Dla przypadku a) i b) mamy dla ogrzewania i ostygnięcia takie same punkty  $\theta_1$ . Wyznacza je krzywa  $K_{ab}$ . Przypadkowi c) odpowiada krzywa  $K_c$ , wszystkie te krzywe są drugiego stopnia. Parabola  $K_d$  narysowana jest w dwu wariantach; ze stałym i zmiennym oporem grzejnika. Są one trzeciego stopnia. We wszystkich przypadkach miejsca zerowe dla ostygnięcia możemy podać i przedyskutować, one więc i położenia ekstremów wyznaczają krzywe. Zera dla ogrzewania otrzymujemy, jako punkty przecięcia tych krzywych z prostą  $y = -N$ . Wszystkie krzywe mają punkt  $\theta'_1$  wspólny. Odpowiada mu temperatura stanu ustalonego dla ostygnięcia, równa temperaturze otoczenia.

Miejsca zerowe parabol  $K_{ab}$  i  $K_d$  są znane. Dla  $a'_{1,0} \rightarrow 0$ , parabola trzeciego stopnia przechodzi w parabolę drugiego stopnia, jak to pokazują strzałki na rysunku. Maksimum funkcji  $K_{ab}$  otrzymujemy dla  $v_1 - v_0 = -\frac{1}{2 a'_{1,0}}$  i posiada wartość  $y_m = \frac{Sh}{4 a'_{1,0}}$ . Ekstrema funkcji  $K_d$  otrzymujemy dla

$$(v_1 - v_0)_{1,2} = \frac{-a_{1,0} \pm \sqrt{a_{1,0}^2 - 9 a'_{1,0}}}{3 a'_{1,0}}$$

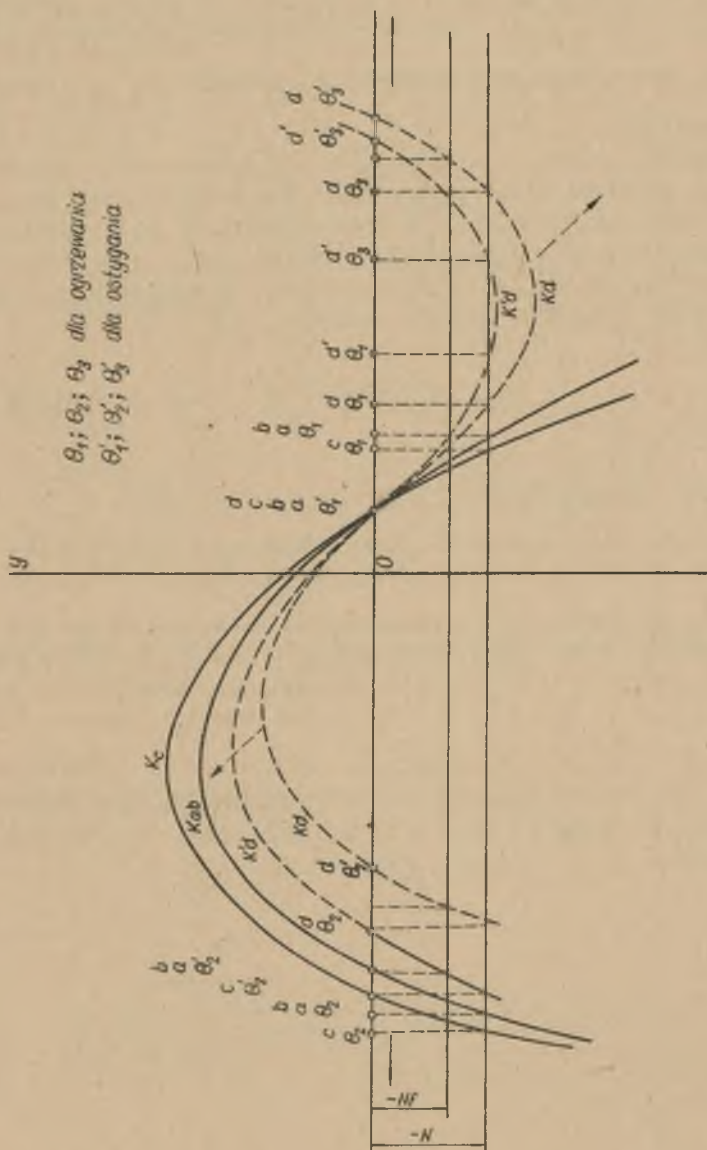
Dla  $a'_{1,0} \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$(v_1 - v_0)_1 \rightarrow -\frac{1}{2 a'_{1,0}} \quad y_m \rightarrow \frac{Sh}{4 a'_{1,0}}$$

$$(v_1 - v_0)_2 \rightarrow +\infty \quad y_m \rightarrow -\infty$$

Obliczając odchylenie maximum  $K_d$  od maximum  $K_{ab}$  dla  $a'_{1,0}$  małych otrzymujemy  $\frac{Sh a'_{1,0}}{8 a_{1,0}^3} < 0$ , więc maximum  $K_d$

leży niżej maximum  $K_{ab}$ .



Rys. 3. Rozkład miejsc zerowych mianownika równania różniczkowego w przypadkach a), b), c), d)

Położenie  $\theta_1$  dla ogrzewania otrzymujemy z równania  $y + N = 0$ , więc jako przecięcie krzywej z prostą równoległą do osi odciętych w odległości  $-N$ . Przecięcia są zawsze rzeczywiste dla  $K_{ab}$ , dla  $K_d$  zależą od minimum krzywej. Dla  $a'_{1,0} \rightarrow 0$  o wielkości minimum decyduje wyrażenie  $-4Sh a'_{1,0} / 27 a'^2_{1,0}$ , które dąży do nieskończoności, więc dla dostatecznie małych  $a'_{1,0}$  przecięcia są rzeczywiste.

Przypadki c) i d) wymagają osobnego omówienia. W wyrażeniach bowiem dla ogrzewania występuje moc przy pierwszych i drugich potęgach temperatury. W tym wypadku krzywa ostygnięcia nie pozwala więc rozwiązać, jak wyżej problemu miejsc zerowych, dla ogrzewania. W przypadku c) wprowadzamy fikcyjną krzywą ostygnięcia

$$y = [N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - Sha_{1,0}] (v_1 - v_0)^2 - [N r_{1,0} + Sh] (v_1 - v_0)$$

o punktach przecięcia z osią

$$\theta'_1 = v_0, \quad \theta'_2 = v_0 - \frac{1}{a_{1,0}} \frac{1 + \frac{N r_{1,0}}{Sh}}{1 - \frac{N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0})}{Sh a_{1,0}}} < v_0 - \frac{1}{a_{1,0}}$$

Wartości  $\theta_1$  dla ogrzewania otrzymujemy, jak wyżej przez przecięcie z prostą  $y + N = 0$ . Maximum  $K_c$  wyznaczone jest przez

$$v_1 - v_0 = - \frac{1}{2 a_{1,0}} \frac{1 + \frac{N r_{1,0}}{Sh}}{1 - N(r_{1,0}^2 - r'_{1,0})}$$

i wynosi

$$= \frac{(N r_{1,0} + Sh)^2}{4 [N (r_{1,0}^2 - r'_{1,0}) - Sh a_{1,0}]} > 0$$



Krzywa  $K_c$  dla ostygnięcia pokrywa się z  $K_{ab}$ . Dla ostygnięcia jest ona przesunięta w górę i na lewo.

Podobnie postępujemy w przypadku d).  $K_d$  przedstawia krzywą dla stałego  $N$ ,  $K'_d$  krzywą dla mocy zmiennej z temperaturą. Ostatni przypadek traktujemy jak c). Wprowadzamy fikcyjną krzywą ostygnięcia

$$y = - \text{Sh} \left\{ \left( 1 + \frac{Nr_{1,0}}{\text{Sh}} \right) (v'_1 - v'_0) + \left( a_{1,0} + \frac{(r'_{1,0} - r_{1,0})^2}{\text{Sh}} N \right) (v'_1 - v'_0)^2 + a'_{1,0} (v'_1 - v'_0)^3 \right\}$$

o miejscach zerowych

$$\theta'_1 = v'_0, \quad \theta'_{2,3} =$$

$$= \frac{-(a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0})^2}{\text{Sh}}) \pm \sqrt{\left( a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0})^2}{\text{Sh}} \right)^2 - ha'_{1,0} \left( 1 + \frac{Nr_{1,0}}{\text{Sh}} \right)}}{2 a'_{1,0}}$$

Ze względu na złożoną postać tych wyrażeń, obliczamy je dla  $a'_{1,0} \rightarrow 0$

$$\theta'_2 \approx - \frac{1 + \frac{Nr_{1,0}}{\text{Sh}}}{a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0})^2}{\text{Sh}}} < - \frac{1}{a_{1,0}}$$

$$\theta'_3 \approx - \frac{a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0})^2}{\text{Sh}}}{a'_{1,0}} < - \frac{1}{a'_{1,0}} > 0$$

Ekstrema krzywej leżą przy

$$v_1 = v_0 \approx \frac{-(a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0}^2)}{Sh}) \pm \sqrt{(a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0}^2)}{Sh})^2 - 3a'_{1,0}(1 + \frac{Nr_{1,0}}{Sh})}}{3 a'_{1,0}}$$

Dla  $a'_{1,0} \rightarrow 0$  otrzymuje się

$$(v_1 - v_0) \approx -\frac{1}{2} \frac{1 + \frac{Nr_{1,0}}{Sh}}{a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0}^2)}{Sh}} < -\frac{1}{2 a_{1,0}}$$

$$(v_1 - v_0) \approx -\frac{2(a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0}^2)}{Sh})}{3 a'_{1,0}} < -\frac{2 a_{1,0}}{3 a'_{1,0}}$$

Dla  $a'_{1,0} \rightarrow 0$  maximum przesunięte jest w stronę bezwzględnie mniejszych wartości o wielkość

$$-Sh \left\{ -\frac{1}{4} \frac{\left[1 + \frac{Nr_{1,0}}{Sh}\right]^2}{a_{1,0} \left[1 + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0}^2)}{Sh a_{1,0}}\right]} \right\}$$

Minimum przesunięte jest w stronę bezwzględnie mniejszych wartości o

$$-\frac{4}{27} Sh \frac{\left(a_{1,0} + \frac{N(r'_{1,0} - r_{1,0}^2)}{Sh}\right)^3}{a'_{1,0}{}^2}$$

Rozwiązanie dla ostygnięcia przekształcamy podobnie jak w przypadku b) dla porównania z przypadkiem a). Do członu poprawkowego zaliczamy czynnik, zawierający  $\theta'_3$ , ponieważ ze względu na dużą wartość  $\theta'_3$ , wyrażenie zmienia się stosunkowo nieznacznie od 1 do  $\frac{\nu'_1 - \theta'_3}{\nu'_0 - \theta'_3}$ . Więc dla krzywej ostygnięcia bez uwzględnienia przesunięcia otrzymujemy

$$= e^{-\frac{Sh}{K}t} \cdot \left( \frac{\nu'_1 - \theta'_3}{T - \theta'_3} \right) \cdot \frac{2 a_{1,0} [1 + b_{1,0}(\theta'_3 - \nu'_0)]}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}(a_{1,0} + \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})}} \cdot \left( \frac{\nu'_1 - \theta'_2}{T - \theta'_2} \right) \cdot \left[ -1 + \frac{2 a_{1,0} [1 + b_{1,0}(\theta'_2 - \nu'_0)]}{\sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}(a_{1,0} - \sqrt{a_{1,0}^2 - 4 a'_{1,0}})}} \right]$$

(P IV-4)

Wyrażenie  $\frac{\nu'_1 - \theta'_3}{T - \theta'_3}$  rośnie od 1 do  $\frac{\nu'_0 - \theta'_3}{T - \theta'_3}$

Wyrażenie  $\frac{\nu'_1 - \theta'_2}{T - \theta'_2}$  zmienia się od 1 do  $\frac{\nu'_0 - \theta'_2}{T - \theta'_2}$

więc drugi czynnik przy funkcji wykładniczej również rośnie, ze względu na ujemny znak w wykładniku potęgowym. Druga poprawka pochodzi od przesunięcia się zera  $\theta'_2$  w porównaniu z  $\theta'_2$  z a). Porównanie  $\theta'_2$  na rysunku 3 wykazuje przesunięcie dla krzywej  $K_d$  w kierunku dodat-



nich wartości o  $\Delta\theta_2$  w porównaniu z przypadkiem a).  $\theta_1$  pozostaje nie zmienione. Jeżeli lewą stronę przedstawimy jako

$$\frac{v_1 - \bar{\theta}'_1}{T - \theta'_1} \cdot \frac{T - \bar{\theta}'_2}{v_1 - \theta'_2} = \frac{v_1 - \theta'_1}{T - \theta'_1} \cdot \frac{T - \theta'_2}{v_1 - \theta'_2} \left[ 1 + \Delta\theta'_2 \cdot \frac{T - v_1}{(T - \theta'_2)(v_1 - \theta'_2)} \right] \quad (\text{P IV-5})$$

ułamek w nawiasie (P IV-5) jest zmienny od 0 dla  $t = 0$  do  $\frac{T - v_0}{(T - \theta'_2)(v_0 - \theta'_2)}$  dla  $t = \infty$ . Wyrażenie poprawkowe rośnie

więc z biegiem czasu, a ponieważ prawa strona (P IV-4) rośnie również, więc poprawki działają w stronę przeciwną.

Postępując jak w (P IV-4) otrzymujemy w przypadku krzywej ogrzewania

$$\left( \frac{v_1 - \bar{\theta}_1}{v_0 - \theta_1} \right) \left( \frac{v_0 - \bar{\theta}_2}{v_1 - \theta_2} \right) = e^{-\frac{\text{Sh } a'_{1,0}}{K} \frac{(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3) t}{[1 + b_{1,0}(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0)]}} \quad (\text{P IV-6})$$

$$\cdot \frac{[1 + b_{1,0}(\bar{\theta}_3 - v_0)] (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)}{[1 + b_{1,0}(\bar{\theta}_1 - v_0)] (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_3)} \cdot \left( \frac{v_0 - \bar{\theta}_2}{v_1 - \theta_2} \cdot \frac{v_1 - \bar{\theta}_3}{v_0 - \theta_3} \right)$$

Współczynnik przy funkcji wykładniczej rośnie od 1 dla  $t = 0$  do

$$\left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{v_0 - \theta_2} \cdot \frac{v_0 - \theta_3}{\theta_1 - \theta_3} \right) \frac{[1 + b_{1,0}(\theta_3 - v_0)] (\theta_2 - \theta_1)}{[1 + b_{1,0}(\theta_1 - v_0)] (\theta_2 - \theta_3)}$$

dla  $t = \infty$

Jeżeli oznaczymy  $\bar{\theta}_i = \theta_i + \Delta\theta_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\Delta\theta_i > 0$ , uwzględnienie przesunięcia miejsc zerowych daje dodatkowo człon:

$$- \frac{(v_1^s - v_0^s)(v_0^s - \theta_2)}{(v_0^s - \theta_1)(v_1^s - \theta_2)} \left| \frac{\Delta\theta_1}{v_0^s - \theta_1} - \frac{\Delta\theta_2 (v_1^s - \theta_1)}{(v_0^s - \theta_2)(v_1^s - \theta_2)} \right|$$

podobnie jak w przypadku c). W nawiasie pierwszy człon jest ujemny i stały, drugi dodatni i maleje od  $-\Delta\theta_2 \cdot \frac{v_0^s - \theta_1}{(v_0^s - \theta_2)^2}$

dla  $t = 0$  do 0 dla  $t = \infty$ . Czynniki przed nawiasem jest zmienny od 0 dla  $t = 0$  do  $\frac{v_0^s - \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}$  dla  $t = \infty$ , 0 zachowaniu się lewej strony (P IV-6) więc decyduje wyrażenie

$$e^{-\frac{\text{Sh } a'_{1,0}}{K} \frac{(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3)t}{[1 + b_{1,0}(\theta_1 - v_0^s)]}}$$

$$\left( \frac{v_0^s - \theta_2}{v_1^s - \theta_2} \frac{v_1^s - \theta_3}{v_0^s - \theta_3} \right) \frac{[1 + b_{1,0}(\theta_3 - v_0^s)](\theta_2 - \theta_1)}{[1 + b_{1,0}(\theta_1 - v_0^s)](\theta_2 - \theta_3)}$$

$$- \frac{(v_1^s - v_0^s)(v_0^s - \theta_2)}{(v_0^s - \theta_1)(v_1^s - \theta_2)} \left[ \frac{\Delta\theta_1}{v_0^s - \theta_1} - \frac{\Delta\theta_2 (v_1^s - \theta_1)}{(v_0^s - \theta_2)(v_1^s - \theta_2)} \right] \quad (\text{P IV-7})$$

Dyskusja wykładnika potęgowej funkcji wykładniczej. Dla ostygnięcia mamy wykładnik jak w przypadku a).

Dla ogrzewania, oznaczając przez  $\delta\theta_i$ ,  $i=1,2,3$ , przy czym  $\delta\theta_1 > 0$ ,  $\delta\theta_2 < 0$ ,  $\delta\theta_3 < 0$  przesunięcia wielkości  $\bar{\theta}_i$  względem wielkości  $\theta'_i$  dla ostygnięcia, mamy

$$-\frac{\text{Sh } a'_{10} (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3)}{K [1 + b_{10}(\theta_1 - v_0^*)]} =$$

$$-\frac{\text{Sh}}{K} \frac{(1 + \frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_2}{a_{10} \sqrt{a_{10}^2 - 4a'_{10}}} 2a'_{10}) (1 + \frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{a_{10} \sqrt{a_{10}^2 - 4a'_{10}}} 2a'_{10})}{[1 + b_{10}(\theta_1 - v_0^*)]}$$

Wyrażenia  $\delta\theta_1 - \delta\theta_2$  i  $\delta\theta_2 - \delta\theta_3$  są zgodnego znaku, ale funkcje, występujące w mianownikach ułamków, zawierających te wielkości, mają znaki przeciwne, oba więc nawiasy licznika działają w kierunku przeciwnym.

#### LITERATURA

- [1] J.J. BABAT, G.M.DERSZWARC, A.D.SWIENCZANSKI, M.J.SMIELENSKI - "Elektricheskie promyslennye peczy", Gosenergoizdat, Moskwa-Leningrad 1948, str.19-25.
- [2] J.DOMANUS - Grzejnictwo elektryczne, cz.I, Trzaska 1948.
- [3] T.HOBLER - Ruch ciepła i wymienniki, W-wa, PWT 1953.
- [4] M.O.KIRPICZEW, M.A.MICHIEJEW, L.S.EJGENSON - "Tieplo-pieriedacza" Gosenergoizdat, Moskwa-Leningrad 1950.
- [5] M.A.MICHIEJEW - "Zasady wymiany ciepła, PWT 1953.



**Влияние нелинейности системы на изменения температуры в процессе нагревания и охлаждения в однокомпонентной системе, обменивающей теплоту с окружающей средой**

**РЕЗЮМЕ**

Работа эта является сводкой II раздела докторской диссертации автора: „Температурные осцилляции релаксационного типа”. Работа имеет в виду сравнение влияния нелинейности, происходящей от температурной зависимости тепловой емкости системы, коэффициента теплообмена и сопротивления нагревателя в однокомпонентной системе, обменивающей теплоту с окружающей средой, если нагреватель включенный или выключенный.

Самая большая является зависимость коэффициента теплообмена от температуры. Решение, полученное в этом случае в предположении, что зависимость линейная, было использовано для сравнения с решениями в других случаях.

Принято 4 случая.

В случае а) коэффициент теплопередачи изменялся линейно с температурой,

б) кроме того, принято изменяемость тепловой емкости,

в) кроме того, изменяется сопротивление нагревателя с температурой,

в случае г) принято квадратную зависимость коэффициента теплообмена с температурой.

Решение, полученное в случае а) имеет большую практическую важность для дискуссии особенностей кривых нагревания и охлаждения, полученных экспериментальным путем.

The influence of nonlinearity of the system on variations of the temperature in the heating and cooling process of monocomponent system, exchanging heat with surrounding

SUMMARY

The paper is a summary of II chapter of authors doctor dissertation "Oscillations of the temperature of relaxation type". The scope of the paper is a analysis of the influence of nonlinearity, produced by the temperature influence on the heat capacity, on the coefficient of heat exchange and on the electric resistance of the heater, in the monocomponent system, exchanging heat with surrounding, when the heater is on or out. The greatest is the temperature influence on the coefficient of heat exchange. The solution for the temperature for this case, when this coefficient varies linearly, was used for comparison with other solutions. It is given the solution of the problem for the following cases:

- a) the coefficient of heat exchange linearly varies with temperature,
- b) also is assumed the temperature influence on heat capacity,
- c) the electric resistance of the heater is also variable,
- d) the heat exchange coefficient is a quadratic function of temperature.

The solution of the case a) is of greatest importance, because it can be used for discussion of the peculiarities of experimental curves of heating and cooling.