ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA z.119 Nr kol. 1339

Eugeniusz TOCZYŁOWSKI
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej

RESTRYKCYJNE TRANSFORMACJE ZADAŃ HARMONOGRAMOWANIA PRODUKCJI Z OGRANICZENIAMI MAGAZYNOWYMI

Streszczenie. Jest rozważane harmonogramowanie produkcji wieloetapowej realizowanej w porcjach w złożonych, wielostopniowych systemach produkcyjnych z uwzględnieniem ogólnego modelu ograniczeń magazynowych. Badane są restrykcyjne transformacje rozważanego problemu harmonogramowania oparte na modyfikacji dopuszczalnych poziomów zapasów.

RESTRICTIVE TRANSFORMATIONS OF GENERAL LOT-SIZE SCHEDULING PROBLEMS WITH INVENTORY LIMITATIONS

Summary. The general lot-size scheduling problem for multi-stage system is considered in the presence of the general minimum and maximum limitations on stock levels. Equivalent restrictive transformations, which are based on modifications of stock limitations, are presented.

1. Sformułowanie problemu

W pracy jest analizowany ogólny model zadania wieloetapowego harmonogramowania produkcji porcjami w złożonych, wielostopniowych systemach produkcyjnych z uwzględnieniem ogólnego modelu ograniczeń magazynowych (dolnych i górnych). W systemie produkcyjnym jest realizowana produkcja zbioru N rodzajów wyrobów. Do celów harmonogramowania produkcji w dłuższym horyzoncie czasu przyjmujemy, że horyzont planowania został podzielony na T dyskretnych okresów. Rozważamy łączną produkcję i magazynowanie wyrobów w każdym z tych okresów, pomijamy natomiast szczegółowe warunki ograniczające, np. kolejnościowe w krótszych przedziałach czasowych.

Zapotrzebowanie d_{it} na wyrób $i \in N$ w okresie t musi być realizowane najpóźniej na koniec okresu t, przy czym wyrób może być produkowany w bieżącym okresie, bądź też w okresach poprzedzających, w tym ostatnim przypadku muszą być utrzymywane niezerowe

zapasy w okresie poprzedzającym.

Wprowadźmy następujące zmienne decyzyjne:

$x_i(t)$ - łączna wielkość produkcji wyrobu i w okresie t,

$I_i(t)$ - stan zapasu wyrobu i pod koniec okresu t.

Zakładamy, że $I(0) = 0$. W dalszej części pracy będziemy stosować następującą notację: dla zbioru zmiennych $x_i(t), i \in N, t = 1, \ldots, T$ oznaczamy $x(t) = (x_i(t))_{i \in N}$ dla $t = 1, \ldots, T$ oraz $x = (x(1), \ldots, x(T))$. Podobnie tworzymy $I(t)$ oraz I. Oznaczmy $y = (x, I)$.

Oto ogólna postać rozważanego zadania harmonogramowania produkcji

Problem P:

$$\min F(y) \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$H(y) \leq 0 \tag{2}$$

$$y \in \mathcal{L}. \tag{3}$$

przy czym $\mathcal{L} := \{y | \mathcal{A}y = b, y \geq 0\}$ jest wyróżnionym wielościanem wypukłym określającym strukturalną część warunków ograniczających zbiór dopuszczalny, $\mathcal{A}$ – macierz o wymiarach m na $n, m \leq n$ o pełnym rzędzie, (2) określa zbiór trudniejszych ograniczeń (np. zasobowych), natomiast (3) określa zbiór ograniczeń łatwiejszych, o specjalnej strukturze, zawierający równania bilansów materiałowych i ograniczenia typu "kostkowego".

Nawet jeżeli zbiór dopuszczalnych rozwiązań problemu (2),..., (3) jest ograniczony, jest całkiem prawdopodobne, ze zbiór $\mathcal{L}$ jest nieograniczony.

W ogólnym przypadku zbiór $\mathcal{L}$ jest nieograniczonym wielościanem, którego punkty można przedstawić jako

$$y = \sum_{r \in R} \lambda_r y^r + \sum_{r \in S} \mu_s y^s \tag{4}$$

przy czym

$$\sum_{r \in R} \lambda_r = 1, \qquad 0 \leq \lambda_r, r \in R \tag{5}$$

oraz $\mu_s \geq 0$ dla wszystkich $s \in S$. Zbiór $\{y^r | r \in R\}$ jest zbiorem bazowych rozwiązań dopuszczalnych, natomiast $\{y^s | s \in S\}$ jest zbiorem bazowych kierunków dopuszczalnych. Niech

$$\mathcal{L}_r = \{y | \, y \in \mathcal{L}, y = \sum_{r \in R} \lambda_r y^r, \text{ gdzie} \sum_{r \in R} \lambda_r = 1, 0 \leq \lambda_r, r \in R\}$$

będzie wielościanem ograniczonym, otrzymanym z $\mathcal{L}$ przez pominięcie rozwiązań jednorodnych odpowiadających kierunkom dopuszczalnym. Otrzymujemy następujący (restrykcyjny) problem optymalizacji

Problem P_r:

$$\min F(y) \tag{6}$$

przy ograniczeniach

$$H(y) \leq 0 \tag{7}$$

$$y \in \mathcal{L}_r \tag{8}$$

Mówimy, że problem P ma *właściwość* R, jeżeli dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego y problemu P istnieje rozbicie $y = \hat{y} + \tilde{y}$, takie że $\hat{y} \in \mathcal{L}_r, \mathcal{A}\tilde{y} = 0$ oraz $H(\hat{y}) \leq 0$ i $F(\hat{y}) \leq F(y)$.

Z łatwością można wykazać, że jeżeli Problem P posiadający właściwość R ma skończone rozwiązanie optymalne, to istnieje optymalne rozwiązanie problemu P będące jednocześnie optymalnym rozwiązaniem problemu P_r.

Jeżeli rozważane zadanie P ma właściwość R, to wystarczy rozwiązywać problem restrykcyjny P_r. Problem P_r może być łatwiejszy do rozwiązywania z następujących powodów:

(i) relaksacja Lagrange'a ograniczeń (7) problemu restrykcyjnego jest na ogół silniejsza od relaksacji Lagrange'a problemu pierwotnego,

(ii) jeżeli funkcja celu po relaksacji Lagrange'a jest wklęsła, to podczas rozwiązywania zadania relaksacji Lagrange'a wystarczy przeglądać punkty wierzchołkowe zbioru $\mathcal{L}_r$. Punkty wierzchołkowe mogą mieć dodatkowe właściwości, np. mogą być reprezentowane w postaci ścieżek w odpowiednich grafach, dzieki czemu rozwiązywanie zadania relaksacji Lagrange'a się upraszcza,

(iii) są możliwe dalsze transformacje problemu restrykcyjnego (np. sieciowe), dzięki czemu można otrzymać silniejsze relaksacje liniowe lub relaksacje Lagrange'a.

Interesujące są te przypadki, kiedy problem restrykcyjny P_r można otrzymać z zadania P przez dodanie prostych ograniczeń. Osłabiając wymagania dokładnościowe, otrzymujemy metody restrykcyjne, które mogą być wykorzystane jako narzędzia optymalizacji

przybliżonej. W pracy są analizowane transformacje restrykcyjne rozważanego problemu harmonogramowania.

2. Transformacja zadań harmonogramowania produkcji w systemach jednostopniowych

Rozważamy zbiór zdefiniowany przez równania bilansowe i kostkowe ograniczenia magazynowe

$$\mathcal{L}^* = \{(x, I) | I(t-1) + x(t) - I(t) = d_t, \quad 0 \le x(t); \underline{I}_t \le I(t) \le \bar{I}_t, t = 1, \ldots, T\} \tag{9}$$

Dla ustalonego zapotrzebowania d zdefiniujmy zregularyzowane poziomy zapasów $I^l_i(d) = I^l_t = (I^l_{it})_{i \in N}$ określone rekurencyjnym wzorem

$$I^l_{it} = I^l_{it}(d) = \begin{cases} I_i(0), & t = 0 \\ \max(\underline{I}_{it}, I^l_{i,t-1} - d_{it}), & t = 1, \ldots, T \end{cases} \tag{10}$$

a następnie zastąpmy ograniczenia $I(t) \ge \underline{I}_t, t = 1, \ldots, T$, przez silniejsze ograniczenia

$$I(t) \ge I^l_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{11}$$

Analogicznie do definicji $I^l_t(d)$ wyznaczamy regularyzację $I^u_t = I^u_t(d)$ górnego poziomu zapasów $\bar{I}_t$. Zauważmy, że dla dopuszczalnych stanów $I_i(t) \le I^u_{it}$, musi zachodzić $I_i(t) - d_{i,t+1} \le I^u_{i,t+1}$. Zatem silniejsze *zregularyzowane* poziomy zapasów można wyznaczyć rekurencyjnie dla $t = T, T-1 \ldots, 1, 0$ następująco

$$I^u_{it} = I^u_{it}(d) = \begin{cases} \bar{I}_{iT} & t = T \\ \min(\bar{I}_{it}, I^u_{i,t+1} + d_{i,t+1}) & t = T-1, T-2, \ldots, 1, 0 \end{cases} \tag{12}$$

przy czym $\bar{I}_{i0} = I_i(0)$.

Będziemy dalej wykorzystywać następujące, łatwe do udowodnienia właściwości:

Lemat 1. *Niech d^* będzie pewnym wektorem zapotrzebowania. Zregularyzowany poziom zapasów bezpiecznych $I^l(d^*)$ (przy czym $I^l(d)$ jest definiowany przez (10)), jest również regularny dla dowolnego $d, d \ge d^*$, tzn., jeżeli $\underline{I} = I^l(d^*)$, to $I^l(d) = I^l(d^*)$ dla dowolnego $d \ge d^*$.*

Analogicznie można udowodnić, że $\overline{I} = I^u(d^*)$ implikuje, iż $I^u(d) = I^u(d^*)$ dla dowolnego $d, d \geq d^*$.

Zbiór zapotrzebowań d dopuszczalnych z punktu widzenia zregularyzowanych wartości zapasów oznaczamy przez $\mathcal{F}(\underline{I}, \overline{I})$ lub krótko przez $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(\underline{I}, \overline{I}) = \{d | I^l(d) \leq I^u(d)\}.$$

Zachodzi

$$d^* \in \mathcal{F} \Longrightarrow d \in \mathcal{F} \text{ for any } d > d^* \tag{13}$$

Przyjmujemy dalej, że są już wyznaczone minimalne i maksymalne zapasy $I_t^l, I_t^u, t = 1, \ldots, T$, zregularyzowane dla danego wektora zapotrzebowań d.

Lemat 2. *(i) Jeżeli stan I_r na koniec etapu r jest poniżej stanu dopuszczalnego dolnego, tzn. $I_r < I_r^l$, to nie istnieje trajektoria z produkcją zerową, czyli $x(t) = 0$ dla $t = r+1, \ldots, s$, doprowadzająca stan I_r do stanu dopuszczalnego $I_s \geq I_s^l$.*

(ii) Jezeli $I_r \leq I_r^u$, to nie istnieje trajektoria z produkcją zerową, czyli $x(t) = 0$ dla $t = r+1, \ldots, s$, doprowadzająca stan I_r do stanu niedopuszczalnego $I_s > I_s^u$.

Lemat 3. *Rozważane jest przejście od stanu w etapie r do etapu $s, s > r$. Załóżmy, że dane są stany I_r, I_s, spełniające warunki dopuszczalności $I_r^l \leq I_r \leq I_r^u$ oraz $I_s^l \leq I_s \leq I_s^u$.*

(i) Jezeli $X_{rs} = I_s + d_{r+1} + \cdots + d_s - I_r \geq 0$, oraz $I_r + X_{rs} \leq I_{r+1}^u + d_{r+1}$, to sterowanie

$$x(t) = \begin{cases} X_{rs} & t = r+1 \\ 0 & t = r+2, \ldots, s \end{cases} \tag{14}$$

realizuje trajektorię dopuszczalną w okresach $r+1, \ldots, s$.

(ii) Jeżeli $X_{rs} = I_s + d_{r+1} + \cdots + d_s - I_r \leq 0$, to trajektoria z produkcją zerową ze stanu $I_r' = I_s + d_{r+1} + \cdots + d_s$ do stanu dopuszczalnego I_s jest trajektorią dopuszczalną.

Twierdzenie 1. *Niech I^l, I^u będzie zregularyzowanym poziomem zapasów dla $d^* \in \mathcal{F}$, $d^* \leq d^o$ oraz (x^o, I^o) będą rozwiązaniem dopuszczalnym problemu $P(d^o)$. Dla dowolnego $d, d^* \leq d \leq d^o$, istnieje rozwiązanie dopuszczalne (x, I) problemu $P(d)$ takie, że $0 \leq x \leq x^o$ oraz $I^l \leq I \leq I^o$.*

Dowód. Ponieważ dokonaliśmy regularyzacji zapasów dolnych i górnych dla $d^* \leq d \leq d^o$, więc właściwości trajektorii sformułowane w lematach 2. i 3. są słuszne dla wektora zapotrzebowań równego zarówno d^o, jak i d. Dla danego rozwiązania wieloetapowy horyzont planowania można podzielić na podgrupy sąsiadujących ze sobą etapów w taki sposób, że każdej podgrupie etapów $r+1, \ldots, s$ odpowiada rozwiązanie elementarne o tej właściwości, że niezerowa produkcja jest tylko w dokładnie jednym okresie $t = r+1$. Stąd rozwiązanie (x^o, I^o) można podzielić na cząstkowe rozwiązania elementarne, czyli cząstkowe trajektorie od stanu I_r^o do I_s^o dla pewnych etapów r, s. Niech $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_K \leq T$ będą indeksami wszystkich okresów produkcyjnych, w których jest produkcja niezerowa, czyli $x(t_k) > 0, k = 1, \ldots, K$, natomiast $x(t) = 0$ dla pozostałych t.

Będziemy analizować kolejne rozwiązania elementarne (trajektorie od stanu I_r do stanu I_s) od końca i pokazywać, że po zamianie d^o na d istnieje trajektoria dopuszczalna (x, I) leżąca poniżej (x^o, I^o). Rozważmy trajektorie w okresach $r+1, \ldots, s$, przy czym początkowo przyjmijmy, że $s = T_K, r = T_K - 1$ oraz $I_s = I_s^o$.

W danym kroku, w którym rozważamy trajektorie od stanu I_r do stanu I_s, mamy I_s spełniające $I_s^l \leq I_s \leq I_s^o$. Oznaczmy $X_{rs}^o = I_s^o + d_{r+1}^o + \cdots + d_s^o - I_r^o$ oraz $X_{rs} = I_s + d_{r+1} + \cdots + d_s - I_r^o$. Jest oczywiste, że $X_{rs} \leq X_{rs}^o$, przy czym trajektoria problemu P^o z I_r^o do I_s^o jest dopuszczalna.

Rozważymy oddzielnie przypadki $X_{rs} \geq 0$ i $X_{rs} < 0$. Jeżeli $X_{rs} \geq 0$, to, zgodnie z lematem 3.(i), zastępując X_{rs}^o przez X_{rs} oraz startując z I_r^o, otrzymamy trajektorię dopuszczalną problemu P łączącą I_r^o z I_s. Dopuszczalność wynika z faktu, iż ze względu na warunek, że $d_t \leq d_t^o$ dla $t = r+1, \ldots, s$ zachodzi $I_t \leq I_t^o$ dla $t = r+1, \ldots, s$, gdyż

$$I_t = I_r^o + X_{rs} - d_{r+1} - \cdots - d_t = I_s + d_{t+1} + \cdots + d_s \leq I_s^o + d_{t+1}^o + \cdots + d_s^o = I_t^o.$$

W drugim przypadku, jeżeli zachodzi $X_{rs} < 0$, to zgodnie z lematem 3.(ii) przyjmujemy $I_r := I_s + d_{r+1} + \cdots + d_s$ i wtedy dla problemu P trajektoria z zerową produkcją $X_{rs} = 0$ wychodzi w okresie r ze stanu I_r i doprowadza do stanu I_s w okresie s, przy czym analogicznie do poprzedniego zachodzi

$$I_t \leq I_t^o \qquad t = r, \ldots, s$$

a zatem trajektoria ta jest dopuszczalna. Realizując kolejno powyżej opisany krok dla poszczególnych rozwiązań elementarnych, pokazujemy, że dla $d < d^o$ istnieje dopuszczalne

rozwiązanie (x, I) problemu P spełniające warunki $x \leq x^o$ i $I \leq I^o$. Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie dopuszczalne problemu P spełniające warunki $0 \leq x \leq x^o$ and $I^l \leq I \leq I^o$. □

Z twierdzenia 1. wynika następujący wniosek dotyczący możliwości zawężania zbioru dopuszczalnego poprzez obniżenie górnego ograniczenia dla stanu końcowego I_T^u. Przyjmijmy, że dla danego $d = (d_1, \ldots, d_T)$ mamy pewne rozwiązanie $(\bar{x}, \bar{I})$ problemu $P(d)$ takie, że stan końcowy $\bar{I}_T$ spełnia warunek $I_T^l < \bar{I}_T \leq I_T^u$. Niech $d^* = d$ oraz wprowadźmy d^o różne od d jedynie w ostatnim okresie, $d_T^o = d_T + \bar{I}_T - I_T^l$. Uzyskujemy problem P^o, przy czym rozwiązanie (x^o, I^o) tak otrzymanego problemu P^o uzyskane z $(\bar{x}, \bar{I})$ sprowadza stan końcowy $I^o(T)$ do wartości I_T^l. Rozwiązanie to jest oczywiście równoważne rozwiązaniu $(\bar{x}, \bar{I})$ problemu pierwotnego P o wartości końcowej stanu magazynu $\bar{I}_T$. Twierdzenie 1. mówi, że dla każdego rozwiązania dopuszczalnego (x^o, I^o) problemu P^o dającego stan końcowy $I^o(T) = I_T^l$ (temu rozwiązaniu odpowiada $(\bar{x}, \bar{I})$ problemu P takie, że $\bar{I}_T > I_T^l$), można znaleźć rozwiązanie dopuszczalne (x, I) problemu P sprowadzające do stanu końcowego I_T^l i spełniające $0 \leq x \leq x^o$ oraz $I^l \leq I \leq I^o$. Zatem dla monotonicznie rosnących funkcji kosztów $F(x), H(I)$ możemy obniżyć stan końcowy I_T^u do poziomu I_T^l bez obawy utraty optymalnego rozwiązania.

Transformacje restrykcyjne

Zbiór ograniczeń strukturalnych $\mathcal{L}$ dla jednostopniowego problemu wielowymiarowego ze zregularyzowanymi ograniczeniami na poziomy zapasów minimalnych i maksymalnych jest postaci

$$\mathcal{L} = \{(x, I) : I(t-1) + x(t) - I(t) = d_t, \quad x(t) \geq 0, \; I_t^l \leq I(t) \leq I_t^u, \quad t = 1, \ldots, T\} \quad (15)$$

przy czym wszystkie parametry i zmienne są wektorami. Zbiór $\mathcal{L}$ można oczywiście zdekomponować na niezależne podzbiory $\mathcal{L}_i$ dla poszczególnych wyrobów $i \in N$.

Szczególna postać zbioru rozwiązań dopuszczalnych $\mathcal{L}$ pozwala na wygodną charakteryzację bazowych rozwiązań odpowiadających punktom wierzchołkowym $\{y^r : r \in R\}$ oraz kierunków dopuszczalnych $\{y^d : d \in D\}$. Obecne rozważania umożliwią modyfikację zbioru dopuszczalnego poprzez pominięcie rozwiązań jednorodnych oraz (ewentualnie) zawężenie wielościanu rozpiętego na punktach wierzchołkowych odpowiadających dopusz-

czalnym rozwiązaniom bazowym.

$$\mathcal{L}_b = \{y : y \in \mathcal{L}, y = \sum_{b \in B} \lambda_b y^b, \text{ gdzie} \sum_{b \in B} \lambda_b = 1, 0 \leq \lambda_b, b \in B\}$$

przy czym $y = (x, I)$. Jest to wielościan ograniczony, otrzymany z $\mathcal{L}$ przez pominięcie rozwiązań jednorodnych odpowiadających kierunkom dopuszczalnym.

Korzystny zbiór restrykcyjny uzyskujemy dokonując następującego zawężenia

$$\mathcal{L}_r^o = \{(x, I) : (x, I) \in \mathcal{L},\ I(T) = I_T^l\}. \tag{16}$$

Następnie podstawiając $I_T^u = I_T^l$ i dokonując ponownej regularyzacji poziomów górnych za pomocą wzoru (12) otrzymujemy regularyzację $\mathcal{L}_r$ zbioru restrykcyjnego $\mathcal{L}_r^o$. Zbiór $\mathcal{L}_r$ można przedstawić równoważnie jako kombinację wypukłą rozwiązań wierzchołkowych

$$\mathcal{L}_r = \{y : y \in \mathcal{L}, y = \sum_{r \in R} \lambda_r y^r, \text{ gdzie} \sum_{r \in R} \lambda_r = 1, 0 \leq \lambda_r, r \in R\} \tag{17}$$

gdzie $\{y^r, r \in R\}$ jest zbiorem punktów wierzchołkowych.

W rezultacie otrzymujemy następujący (restrykcyjny) problem optymalizacji:

Problem P_r:

$$\min F(y) \tag{18}$$

przy ograniczeniach

$$H(y) \leq 0 \tag{19}$$

$$y \in \mathcal{L}_r. \tag{20}$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli w problemie jednostopniowym z ogólnymi poziomami zapasów dolnych i górnych funkcje F, H są monotonicznie niemalejące, natomiast zbiór $\mathcal{L}_r$ jest regularyzacją zbioru zdefiniowanego przez (16), to problem P ma właściwość R.*

Dowód. Twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 4.4, pracy [7], str.87 na przypadek dowolnych poziomów zapasów minimalnych i maksymalnych. Zbiór $\mathcal{L}$ można zdekomponować na niezależne podzbiory $\mathcal{L}_i$ dla poszczególnych wyrobów $i \in N$. Dla uproszczenia zapisu pomijamy dalej indeks wyrobów i i rozważamy pojedynczy wyrób. Jeżeli dla problemu P z zapotrzebowaniem d dla $y = (x, I) \in \mathcal{L}$ zachodzi $I(T) = b > I_T^l$, to rozwiązanie to można przedstawić równoważnie jako pewne rozwiązanie dopuszczalne $\bar{y}$ pewnego problemu P otrzymanego z P przez zamianę zapotrzebowania w ostatnim okresie do wartości

$\bar{d}_T = d_T + b - I_T^l$. Ponieważ dodatkowo rozwiązanie to ma stan końcowy równy I_T^l, więc zachodzi $\bar{y} \in \mathcal{L}_r(\bar{d})$, tj. rozwiązanie to należy do restrykcji problemu $\bar{P}$.

Z twierdzenia 1. wynika zatem natychmiast, że dla dowolnego $y_i = (x_i, I_i) \in \mathcal{L}_i$ istnieje rozbicie $y_i = \hat{y}_i + \bar{y}_i$ takie, że $\bar{y}_i \in \mathcal{L}_{ir}$ oraz $\hat{y}_i \geq 0$, przy czym $\mathcal{L}_{ir}$ jest tworzone dla i analogicznie do (16).

Na zakończenie podstawiamy $y = (y_i)_{i \in N}$. Z monotoniczności F oraz H wynika, że $F(\bar{y}) \leq F(y)$ oraz $H(\bar{y}) \leq H(y) \leq 0$.□

3. Transformacja zadań harmonogramowania produkcji w systemach wielostopniowych

Charakteryzacja zbioru $\mathcal{L}$ dla systemów wielostopniowych.

W przypadku systemów produkcyjnych złożonych z wielu stopni produkcyjnych sieciowe ograniczenia bilansów magazynowych wszystkich wyrobów są postaci

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} x_j(t), \quad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{21}$$

przy czym S_i – zbiór bezpośrednich następnikow produktu i w grafie struktury produktów [7]. Stosując rekurencyjnie podstawienie

$$E_i(t) = I_i(t) + \sum_{j \in S_i} r_{ij} E_j(t) \quad \text{oraz} \quad D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} D_{jt} \tag{22}$$

począwszy od wyrobów finalnych, następnie ich składowych, aż dochodzac do surowców i innych pierwotnych składników (nie mających poprzedników w grafie struktury produktów), bilanse magazynowe można przedstawić w równoważnej postaci

$$E_i(t-1) + x_i(t) - E_i(t) = D_{it}, \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{23}$$

z dodatkowym warunkiem

$$\sum_{j \in S_i} r_{ij} E_j(t) - E_i(t) \leq 0, \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{24}$$

lub ogólniejszym (przy niezerowych zapasach minimalnych)

$$L_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} E_j(t) - E_i(t) \leq 0, \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{25}$$

przy czym (23) jest zbiorem "łatwych" ograniczeń strukturalnych, a (25) można włączyć do ograniczeń zasobowych poddawanych np. relaksacji Lagrange'a. Jeżeli ograniczenia (25) zostaną dołączone do (2), to funkcja H nie będzie funkcją monotonicznie niemalejącą i nie można wtedy wykorzystać twierdzenia 4.4 z pracy [7] do uzasadnienia transformacji sieciowej. Pokażemy jednak dalej, że również w rozważanym przypadku ogólnego modelu produkcji wielostopniowej zadanie posiada właściwość R pozwalającą na transformację sieciową.

Wprowadźmy do zbioru $\mathcal{L}$ problemu P sieciowe ograniczenia bilansów magazynowych wszystkich wyrobów postaci

$$\mathcal{L}^* = \{(x, I) | I(t-1) + x(t) - Rx(t) - I(t) = d_t, 0 \leq x(t); \underline{I}_t \leq I(t) \leq \bar{I}_t, t = 1, \ldots, T\} \quad (26)$$

przy czym macierz $R = [r_{ij}]$ jest macierzą przepływu materiałów w systemie. Problem P jest teraz ogólnym zadaniem harmonogramowania produkcji w systemach wielostopniowych, w którym, identycznie jak dla systemów jednostopniowych, funkcja $F(y)$ reprezentuje wszystkie koszty produkcji i magazynowania, natomiast $H(y)$ reprezentuje ograniczenia na dostępne zasoby (oraz ewentualnie inne warunki ograniczające wartości zmiennych produkcyjnych oraz magazynowych).

Twierdzenie 3. *Niech I^l, I^u będą zregularyzowanymi poziomami dla $d^* \in \mathcal{F}$. Jeśli $d^* \leq d(x)$ dla dopuszczalnych $x \in \mathcal{X}$, funkcje F, H są monotonicznie niemalejące, to problem P ma właściwość R.*

Dowód. W odróżnieniu od systemów jednostopniowych zbioru $\mathcal{L}$ nie można bezpośrednio zdekomponować na niezależne podzbiory $\mathcal{L}_i$ dla poszczególnych wyrobów $i \in N$. Dla ustalonego rozwiązania dopuszczalnego $y^o = (x^o, I^o)$ zdefiniujmy dla każdego $i \in N$ $d_{it}(x^o) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} x_j^o(t)$ oraz określmy następujące cząstkowe zbiory dopuszczalne

$$\mathcal{L}_i^o = \mathcal{L}_i(d_i(x^o)) = \{(x_i, I_i) : \quad I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it}(x^o),$$
$$x_i(t) \geq 0, I_{it}^l \leq I_i(t) \leq I_{it}^u, t = 1, \ldots, T\} \quad (27)$$

Dla każdego zbioru $\mathcal{L}_i^o$ określamy zbiór restrykcyjny $\mathcal{L}_{iT}^o$ przyjmując stan końcowy magazynów równy $I_{iT}^u = I_{iT}^l$. Dla każdego ustalonego $i \in N$ mamy problem jednostopniowy i bezpośrednio z twierdzenia 2. wynika, że dla dopuszczalnego rozwiązania y^o istnieje nie

gorsze rozwiązanie $y = (x, I)$ problemu restrykcyjnego $\mathcal{L}_r^o$ z warunkiem $I_T^u = I_T^l$. Rozwiązanie to jednak w ogólności nie spełnia równań bilansów materiałowych pierwotnego problemu wielostopniowego P.

Pokażemy teraz, że otrzymane rozwiązanie $y \in \mathcal{L}_r^o$ można przekształcić w dopuszczalne rozwiązanie należące do zbioru restrykcyjnego $\mathcal{L}_r$, czyli istnieje rozbicie $y = \bar{y} + \hat{y}$ takie, że $\bar{y} \in \mathcal{L}_r$ oraz $\hat{y} \geq 0$.

Zauważmy, że dla ustalonego i $d_{it}(x)$ jest funkcją zmiennych x_j tylko dla tych wyrobów $j \in S_i$, które są następnikami wyrobu i.

Pokażemy dla kolejnych wyrobów i wybieranych w odpowiedniej kolejności, że z rozwiązania $y_i = (x_i, I_i) \in \mathcal{L}_{ir}^o$ można uzyskać dopuszczalne rozwiązanie restrykcyjne spełniające równania bilansu materiałowego. Rozpoczniemy od wyrobów finalnych, które w grafie G nie posiadają następników (dla których $S_i = \emptyset$). W dalszych krokach będziemy wyznaczać rekurencyjnie nowe wartości $x_i(t)$, $I_i(t)$ kolejno dla bezpośrednich poprzedników wyrobów finalnych, ich bezpośrednich poprzedników itd., idąc w góre strumienia struktury asortymentowej produktów, aż do surowców.

Dla ustalonego i niech już będzie wyznaczone dopuszczalne rozwiązanie restrykcyjne $\bar{x}_j$ dla $j \in S_i$. Zapotrzebowanie $d_{it}(\bar{x})$ spełnia warunek

$$d_{it}(\bar{x}) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij}\bar{x}_j(t) \leq d_{it}(x^o)$$

Stąd z twierdzenia 1. wynika istnienie rozwiązania $\bar{y}_i = (\bar{x}_i, \bar{I}_i)$ dopuszczalnego dla i-tego podproblemu restrykcyjnego (z warunkiem $I_{iT}^u = I_{iT}^l$) należącego do zbioru

$$\mathcal{L}_{ir}(d_i(\bar{x})) = \{(x_i, I_i) : \quad I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it}(\bar{x}),$$
$$x_i(t) \geq 0, I_{it}^l \leq I_i(t) \leq I_{it}^u, t = 1, \ldots, T\} \tag{28}$$

Na zakończenie podstawiamy $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i \in N}$. Z monotoniczności F oraz H wynika dla $\bar{y} \leq y$, że $F(\bar{y}) \leq F(y)$ oraz $H(\bar{y}) \leq H(y) \leq 0$□

Regularyzacja zapasów przy spełnieniu wymagania, że $d^* \leq d(x)$ dla każdego dopuszczalnego x, może spowodować, że zostanie utworzona restrykcja problemu. Jeżeli jednak warunek ten jest spełniony, to jest to jedyny warunek wymagany do uzyskania restrykcji końcowego poziomu zapasów. Twierdzenie 3. lokalizuje zatem miejsce restrykcji do

problemu znalezienia odpowiedniego zapotrzebowania d^* wymaganego do regularyzacji zapasów.

Jeżeli nie zostanie zapewniony warunek $d^* \leq d(x)$ dla pewnych x, czyli gdy regularyzacja zapasów nie będzie dostatecznie silna, to przyjęcie restrykcji przez podstawienie minimalnego poziomu zapasów końcowych może spowodować suboptymalność rozwiązania. Dla zagwarantowania zachowania przynajmniej jednego z rozwiązań optymalnych należy przykładowo zrezygnować z restrykcji stanu zapasów końcowych dla wyrobów nie będących wyrobami finalnymi.

LITERATURA

1. Afentakis P., Gavish B., Karmarkar U.: Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly Systems. Management Science, 30, 222-239, 1984.

2. Afentakis P., Gavish B.: Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures. Operations Research, 34, 237-249, 1986.

3. Blackburn J.D. and Millen R.A.: Improved Heuristics for Multi-Echelon Requirements Planning Systems. Management Science, vol. 28 (January 1982), pp.44-56.

4. Graves S.C.: Multistage Lot Sizing : An Iterative Approach. In Multistage Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, L.B. Schwarz (ed.), North Holland, Amsterdam, 1981.

5. Karni R. and Roll Y.: A Heuristic Algorithm for the Multi-Item Lot Sizing Problem with Capacity Constraints. IIE Transactions, vol.14, No.4, Dec., 1982, pp.249-356.

6. Steinberg E. and Napier H.A.: Optimal Multi-Level Lot Sizing for Requirements Planning Systems. Management Science, 26, 1258-1271, 1980.

7. Toczyłowski E.: Niektóre metody strukturalne optymalizacji do sterowania w dyskretnych systemach wytwarzania, WNT, 1989 .

8. Wagner M.M., Whitin T.M.: Dynamic Version of the Economic Lot-sizing Model. Management Science, 5, pp. 89–96, 1958.

Recenzent: Prof. dr inż. Henryk Kowalowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

Abstract

The general lot-size scheduling problem for multi-stage systems in the presence of the general minimum and maximum limitations on stock levels is analysed. Equivalent restrictive transformations, which are based on modifications of stock limitations, are presented.

It was shown, that, under relatively weak assumptions, the problem can be transformed into an equivalent restrictive optimization problem with the reduced inventory levels. The sufficient conditions for such transformation, which are based on regularization of the minimum and maximum stock levels, are given and proved.