

Mirosław ZABOROWSKI  
Politechnika Śląska

## AGREGACJA MODELU SYSTEMU PRODUKCYJNEGO W SYSTEMIE STEROWANIA PRODUKCJĄ METODĄ PPM

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono modele zużycia materiałów i obciążenia grup stanowisk roboczych, które są stosowane na poziomach planowania potrzeb materiałowych i nadrzędnego harmonogramowania produkcji w hierarchicznych systemach sterowania produkcją. Ponadto w pracy pokazano algorytmy obliczania parametrów modelu zagregowanego na podstawie modelu niższego poziomu.

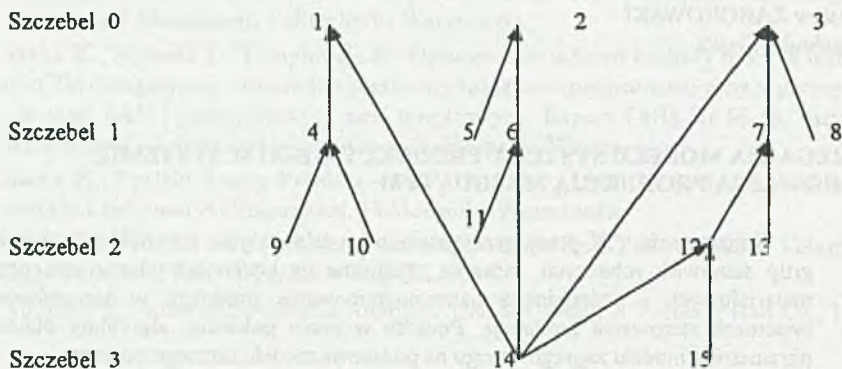
## AGGREGATION OF THE PRODUCTION SYSTEM MODEL IN THE MRP PRODUCTION CONTROL SYSTEM

**Summary.** The models of materials outlay and work centers load, which are applied to material requirements planning and master scheduling levels in hierarchical production control systems, are presented in the paper. Furthermore, the paper shows algorithms for aggregated model parameters calculation on the ground of the lower level model.

### 1. Graf struktur wyrobów

W metodzie planowania potrzeb materiałowych (PPM) korzysta się między innymi z tzw. *zestawień materiałowych*, które dla każdego z wytwarzanych w danym przedsiębiorstwie elementów wskazują, z czego on się składa i które materiały są zużywane do jego produkcji. Zbiór odpowiednio powiązanych zestawień materiałowych wyrobu i jego części tworzy tzw. *wielopoziomowe zestawienie materiałowe* nazywane też *drzewem struktury wyrobu*. Zbiór drzew struktur różnych wyrobów, które mogą zawierać pewne wspólne elementy składowe, tworzy *graf struktur wyrobów*. Przykładowy graf struktur wyrobów przedstawiono na rys. 1. Wierzchołkami grafu struktur wyrobów są wszystkie elementy i materiały zużywane w przedsiębiorstwie oraz wszystkie elementy wytwarzane, w tym wyroby końcowe. Wszelkiego rodzaju elementy i materiały są ewidencjonowane w *kartotece zapasów* przedsiębiorstwa. Stąd ich wspólna nazwa – *pozycja kartoteki zapasów* albo krótko – *pozycja*. Wierzchołki grafu

struktur wyrobów identyfikujemy za pomocą numerów pozycji kartoteki zapasów  $j \in J$ . Dla przykładu z rys. 1  $J = \{1, \dots, 15\}$ .



Rys.1. Przykładowy graf struktur wyrobów  
Fig. 1. An example of a products structure graph

Łukami grafu struktur wyrobów są pary  $(j,l)$ , w których pierwszy element odpowiada *komponentowi*, a drugi jego *pozycji macierzowej*. Zbiór wszystkich takich par nazywamy *relacją struktur wyrobów*  $SW \subset J \times J$ . Dla przykładu z rys. 1 jest  $SW = \{(4,1), (5,2), (6,2), (7,3), (8,3), (9,4), (10,4), (11,6), (12,7), (13,7), (14,1), (14,3), (14,6), (14,12), (15,12)\}$ .

Wśród pozycji kartoteki zapasów wyróżniamy rozmaite kategorie, między innymi:

$J \supset J^E$  – zbiór elementów i materiałów sprowadzanych z zewnątrz,

$J \supset J^P$  – zbiór elementów wytwarzanych,

$J^P \supset J^B$  – zbiór wyrobów finalnych.

Dla przykładu z rys. 1 mamy  $J^E = \{5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$ ,  $J^P = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12\}$ ,

$J^B = \{1, 2, 3\}$ .

W metodzie PPM istotne znaczenie ma usytuowanie każdej z pozycji  $j \in J$  w hierarchii zestawień materiałowych. *Szczel*  $\delta_j$  każdej pozycji  $j$  pamiętany jest w kartotece zapasów. Dla przykładu z rys. 1

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\delta_j$	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3

Należy tu zwrócić uwagę, że w trakcie rozwijania zestawień materiałowych często zdarza się, że ta sama pozycja występuje początkowo na różnych szczeblach. Np. w drzewach struktur wyrobów 1, 2 i 3, przed ich uporządkowaniem i połączeniem w graf przedstawiony na

rys. 1, pozycja 14 występuje na szczeblu 1, jako komponent elementu 1, na szczeblu 2 jako komponent elementu 6, na szczeblu 1 jako komponent elementu 3 i na szczeblu 3 jako komponent elementu 12. W takich przypadkach, dla uproszczenia formalnego opisu struktur wyrobów, stosuje się *zasadę kodowania najniższego szczebla*, przypisując danej pozycji szczebel  $\delta_j$  najniższy spośród wszystkich występujących w różnych zestawieniach materiałowych. Zgodnie z tą zasadą w przykładzie z rys.1 pozycji  $j = 14$  przypisano szczebel  $\delta_j = 3$ . Dzięki zasadzie kodowania najniższego szczebla każda pozycja występuje w grafie struktur wyrobów  $(J, SW)$  tylko raz. Przykładowy graf z rys.1 zbudowano z wykorzystaniem tej zasady.

## 2. Model zużycia materiałów na potrzeby zleceń planowanych

Zapotrzebowanie  $R_{js}$  na komponent  $j$  w okresie planistycznym  $s$  jest liniową funkcją wielkości  $P_{li}^o$  tych zleceń planowanych na produkcję jego pozycji macierzystych  $l$ , których uruchomienie planuje się na okres  $s$ . Można to wyrazić wzorem:

$$R_{js} = \sum_{\substack{l \in J \\ (j,l) \in SW}} a_{lj}(1 + b_{lj})P_{li}^o, \quad \text{dla } j \in J \setminus J^B \quad (1)$$

w którym

$a_{lj}$  – współczynnik zużycia  $j$ -tego komponentu na jednostkę  $l$ -tej pozycji macierzystej,

$b_{lj}$  – współczynnik nadmiaru na braki i odpady.

Wielkość *planowanego uruchomienia* jest liczbowo równa wielkości *zlecenia planowanego*

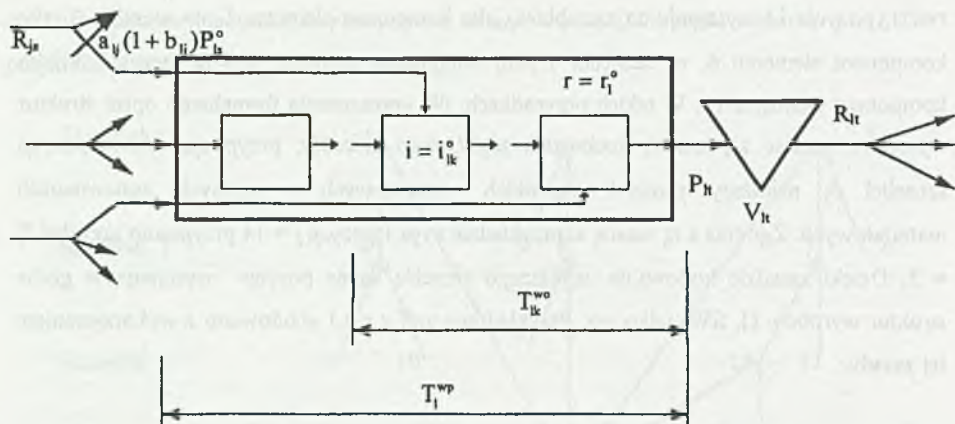
$$P_{is}^o = P_{li}, \quad \text{dla } s = t - T_l^{wp}, \quad l \in J \quad (2)$$

przy czym przesunięcie czasowe między *okresem uruchomienia*  $s$  i *okresem sphywu* zlecenia  $t$  jest równe *wyprzedzeniu na cykl realizacji*  $T_l^{wp}$  elementu  $l$  (rys.2). Przyjęcie, że okres  $T_l^{wp}$  zależy tylko od wytwarzanego elementu  $l$ , odpowiada milczącemu założeniu, że jest on taki jak na *marszrucie podstawowej*  $\tau = \tau_l^o$  elementu  $l$  (rys. 2).

W podstawowej wersji metody PPM (bez kumulacji partii) zlecenie planowane  $P_{li}$  jest równe tzw. *potrzebom netto*, obliczanym na podstawie *potrzeb brutto*  $R_{li}$  zgodnie zc. wzorem:

$$P_{li} = \text{Max} \{ 0, R_{li} - V_{l,t-1} \} \quad (3)$$

w którym  $V_{l,t-1}$  jest zapasem planowanym elementu  $l$  na początku okresu planistycznego  $t$ .



Rys. 2. Schemat do obliczeń zużycia materiałów i obciążenia grup roboczych

Fig. 2. A diagram for calculation of materials outlay and work centers load

Zależności (1) (2) (3) umożliwiają obliczenie planowanego zużycia (potrzeb brutto)

$R_{jk}$  kolejno dla pozycji kartoteki zapasów wszystkich szczebli grafu struktur wyrobów (rys. 1), zaczynając od szczebla zerowego, dla którego zlecenia planowane na wyroby końcowe  $P_{jt}$  ( $j \in J^B$ ) są dane. Zlecenia te nazywane są *zleceniami fabrycznymi*, a ich zbiór z okresów horyzontu planowania – *nadrzędnym harmonogramem produkcji*, a czasem operatywnym planem produkcji. W metodzie PPM zlecenia fabryczne są wielkościami wiodącymi dla zleceń planowanych na produkcję lub zakup wszystkich pozycji kartoteki zapasów przedsiębiorstwa.

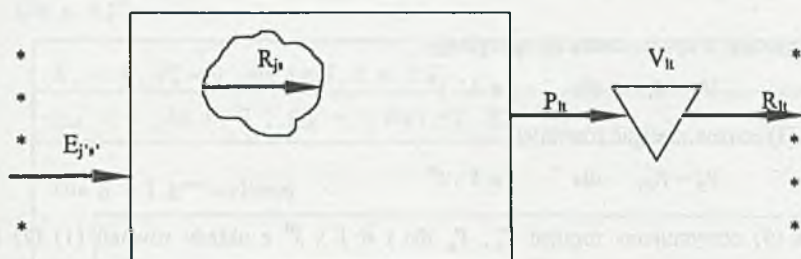
### 3. Zagregowany model zużycia materiałów na potrzeby zleceń fabrycznych

Obliczenie planowanego zużycia metodą PPM, w której kolejno przetwarzane są dane dotyczące wszystkich szczebli struktur wyrobów, jest czasochłonne. Do bezpośrednich, lecz zgrubnych, obliczeń potrzeb materiałowych zleceń fabrycznych można wykorzystać następujące równania modelu zagregowanego:

$$R_{jk} = \sum_{i \in J^B} \sum_{t \in T_k} A_{ijt} P_{i,t-\tau} \quad , \quad \text{dla } j \in J \setminus J^B \quad (4)$$

$$E_{jt} = R_{jt} \quad , \quad \text{dla } j \in J^E \quad (5)$$

zgodnie z którymi przedsiębiorstwo jest postrzegane jako system jednostadialny (rys. 3), z wyzerowanymi wszystkimi zapasami  $V_{jt}$  (rys.2.) z wyjątkiem zapasów wyrobów finalnych ( $j \in J^B$ ).



Rys. 3. Jednostadialny model systemu produkcyjnego

Fig. 3. A single stage production system model

W przypadku wyrobów jednowersyjnych symbole użyte w równaniach (4) (5) i na rys. 3 mają następujące znaczenie:

$R_{j^*}$  – potrzeby brutto,  $j \in J \setminus J^B$ ,

$E_{j^*}$  – potrzeby zaopatrzeniowe,  $j \in J^E$ ,

$P_{l^*}$  – zlecenia fabryczne,  $l \in J^B$ ,

$R_{l^*}$  – harmonogram zapotrzebowania na wyroby finalne,  $l \in J^B$ ,

$V_{l^*}$  – zapasy planowane wyrobów finalnych,  $l \in J^B$ ,

$T_{ij}$  – zbiór przesunięć czasowych w profilu zużycia materiałów na potrzeby zleceń fabrycznych,  $j \in J \setminus J^B$ ,  $l \in J^B$ ,

$A_{ij\tau}$  – współczynniki profilu zużycia materiałów na potrzeby zleceń fabrycznych,  $\tau \in T_{ij}$ ,  
 $j \in J \setminus J^B$ ,  $l \in J^B$ .

Zróznicowanie wyprzedzeń  $\tau$  okresu spływu danego zlecenia fabrycznego przez okresy wystąpienia zapotrzebowania na daną pozycję kartoteki zapasów wynika z istnienia różnych ścieżek w grafie struktur wyrobów (rys. 1) od danej pozycji  $j$  do danego wyrobu finalnego  $l$ . Zbiór współczynników zagregowanego modelu zużycia materiałów, odpowiednio przyporządkowanych przesunięciom czasowym w ramach cykli produkcji wyrobów złożonych, można nazwać *profilem zużycia materiałów na potrzeby zleceń fabrycznych*, albo profilem zużycia materiałów w systemie produkcyjnym.

#### 4. Wyznaczanie profilu zużycia materiałów na potrzeby zleceń fabrycznych

Korzystając z uproszczenia agregacyjnego

$$V_{jt} = 0, \quad \text{dla } j \in J \setminus J^B \quad (6)$$

równanie (3) można zastąpić równością

$$P_{jt} = R_{jt}, \quad \text{dla } j \in J \setminus J^B \quad (7)$$

Równania (4) otrzymujemy rugując  $P_{jt}^0$ ,  $P_{jt}$  dla  $j \in J \setminus J^B$  z układu równań (1) (2) (7).

Przekształcenia te można wykonać zgodnie ze schematem algorytmu PPM, uproszczonego przez warunki (6) (7). Jeżeli algorytm ten (rys. 4) zastosujemy kolejno do wszystkich wyrobów finalnych ( $\kappa \in J^B$ ), zakładając za każdym razem, że zlecenie fabryczne na wybrany wyrób  $\kappa$  w wybranym okresie  $T$  jest jednostkowe ( $P_{\kappa T} = R_{\kappa T} = 1$ ), a pozostałe zlecenia fabryczne są zerowe, to obliczone za pomocą algorytmu potrzeby  $R_{jt}$  będą równe odpowiednim współczynnikom profilu zużycia materiałów.

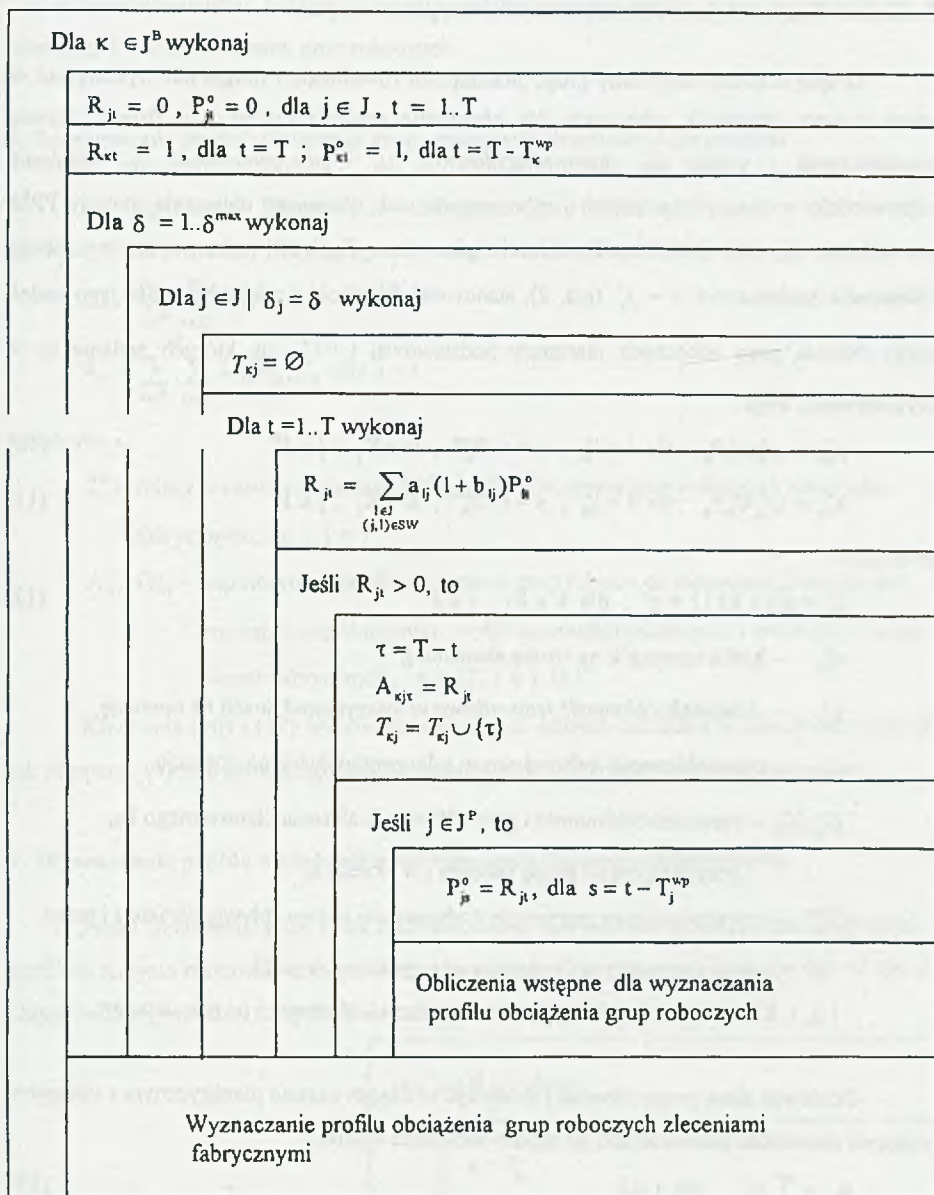
$$A_{\kappa j \tau} = R_{jt}, \quad \text{dla } \tau = T - t \quad (8)$$

Wynika to z równania (4), które po podstawieniach

$$P_{l,t+\tau} = \begin{cases} 0, & \text{dla } (\tau \in T_j, l \in J^B) \text{ i } (t + \tau \neq T, l \neq \kappa) \\ 1, & \text{dla } t + \tau = T, l = \kappa \end{cases} \quad (9)$$

przyjmuje właśnie postać (8), co zresztą zgodne jest z zasadą superpozycji, obowiązującą dla wszystkich układów liniowych.

Jeśli wyznacza się tylko profil zużycia materiałów, to procedury wyznaczania profilu obciążenia grup roboczych i odpowiednich obliczeń wstępnych, które uwzględniono na rys. 4, są pomijane.



Rys.4. Wyznaczanie profili zużycia materiałów i obciążenia grup roboczych na potrzeby zleceń fabrycznych

Fig. 4. Designating of materials outlay and work centers load profiles

## 5. Model obciążenia grup roboczych zleceniami planowanymi

Grupą roboczą nazywamy grupę pracujących równolegle i mogących wykonywać te same zadania stanowisk roboczych. Na obciążenie grupy roboczej i w danym okresie planistycznym  $t$  składa się stanowiskochłonność  $\mu_{it}$  i pracochłonność  $\lambda_{it}$ , mierzone odpowiednio w maszynogodzinach i roboczogodzinach. Ponieważ obliczenia metody PPM prowadzone są tak, jakby każde zlecenie planowane  $P_{ji}$  było wykonywane na swojej marszrucie podstawowej  $r = r_j^\circ$  (rys. 2), stanowiskochłonność i pracochłonność jego zadań  $k \in K_j$  dotyczą grup roboczych marszrucy podstawowej  $i = i_{jk}^\circ$ , na których zadania te są wykonywane. Stąd

$$\mu_{ij_s}^* = \psi_{jk}^\circ \mu_{jk}^\circ P_{ji} \quad \text{dla } i = i_{jk}^\circ, \quad s = t - T_{jk}^{wo}, \quad k \in K_j, \quad j \in J^P \quad (10)$$

$$\lambda_{ij_s}^* = \psi_{jk}^\circ \lambda_{jk}^\circ P_{ji} \quad \text{dla } i = i_{jk}^\circ, \quad s = t - T_{jk}^{wo}, \quad k \in K_j, \quad j \in J^P \quad (11)$$

przy czym

$$i_{jk}^\circ = i(j, r, k) \mid r = r_j^\circ, \quad \text{dla } k \in K_j, \quad j \in J^P \quad (12)$$

$\psi_{jk}^\circ$  – liczba operacji  $k$  na sztuce elementu  $j$ ,

$\mu_{jk}^\circ$  – stanowiskochłonność jednostkowa w maszynogodzinach na operację,

$\lambda_{jk}^\circ$  – pracochłonność jednostkowa w roboczogodzinach na operację,

$\mu_{ij_s}^*, \lambda_{ij_s}^*$  – stanowiskochłonność i pracochłonność zlecenia planowanego  $P_{ji}$ ,  
przypadające na grupę roboczą  $i$  w okresie  $s$ ,

$T_{jk}^{wo}$  – wyprzedzenie na marszrucie podstawowej okresu sływu elementu  $j$  przez okres (początkowy) wykonywania operacji  $k$  (rys. 2),

$i(j, r, k)$  – grupa robocza wykonująca operację  $k$  elementu  $j$  na marszrucie  $r$ .

Ponieważ dana grupa robocza  $i$  może być w danym okresie planistycznym  $t$  obciążona różnymi zleceniami planowanymi, jej łączne obciążenie wynosi

$$\mu_{it} = \sum_{j \in J^P} \mu_{ij_t}^*, \quad \text{dla } i \in I \quad (13)$$

$$\lambda_{it} = \sum_{j \in J^P} \lambda_{ij_t}^*, \quad \text{dla } i \in I \quad (14)$$

przy czym

$$J_i^\circ = \{j \in J^P \mid \exists_{k \in K_j} i_{jk}^\circ = i\}, \quad \text{dla } i \in I \quad (15)$$



jest zbiorem elementów, których marszruty podstawowe przechodzą przez grupę roboczą  $i$ , natomiast  $I$  – zbiór numerów grup roboczych.

## 6. Zagregowany model obciążenia grup roboczych zleceniami fabrycznymi

Do zgrubnego bilansowania obciążenia grup roboczych z ich zdolnościami produkcyjnymi przydatny jest zagregowany model obciążenia systemu produkcyjnego:

$$\mu_{it} = \sum_{l \in J^B} \sum_{\tau \in T_{il}^0} A_{lit}^0 P_{l,t+\tau}, \quad \text{dla } i \in I \quad (16)$$

$$\lambda_{it} = \sum_{l \in J^B} \sum_{\tau \in T_{il}^0} \Omega_{lit}^0 P_{l,t+\tau}, \quad \text{dla } i \in I \quad (17)$$

w którym

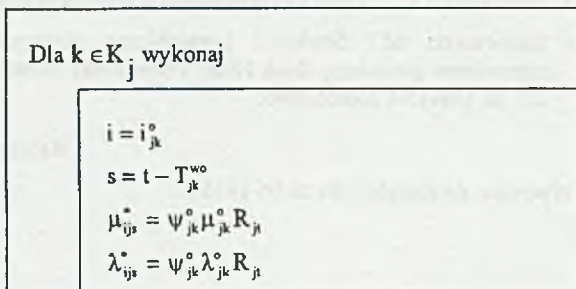
$T_{il}^0$  – zbiory przesunięć czasowych w *profilu obciążenia grup roboczych zleceniami fabrycznymi*,  $i \in I, l \in J^B$ ,

$A_{lit}^0, \Omega_{lit}^0$  – współczynnik profilu obciążenia grup roboczych zleceniami fabrycznymi, inaczej – współczynniki profilu stanowiskochłonności i pracochłonności zleceń fabrycznych,  $\tau \in T_{il}^0, i \in I, l \in J^B$ .

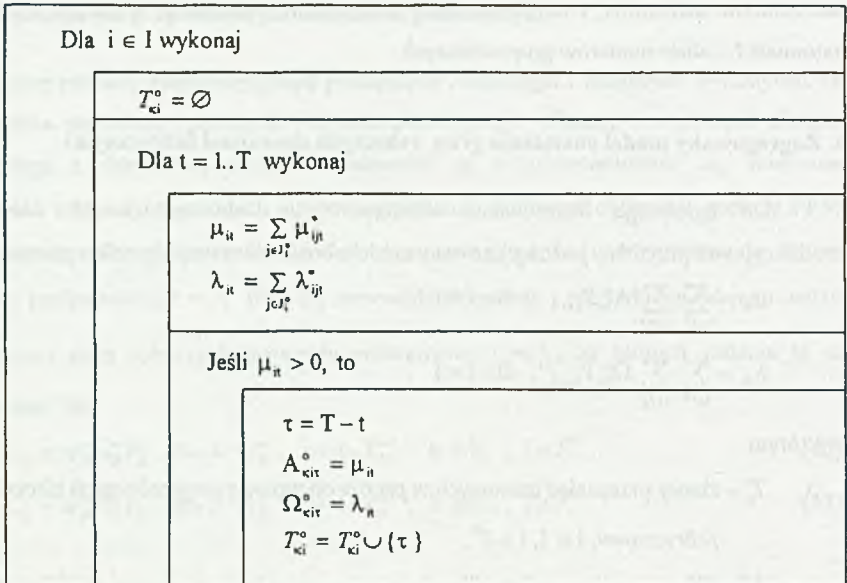
Równania (16) i (17) wyprowadza się z tych samych założeń i w analogiczny sposób jak równania (4) zagregowanego modelu zużycia materiałów w systemie produkcyjnym.

## 7. Wyznaczanie profilu obciążenia grup roboczych zleceniami fabrycznymi

Profil obciążenia grup roboczych zleceniami fabrycznymi można wyznaczyć wraz z profilem zużycia materiałów, za pomocą tego samego algorytmu, przedstawionego na rys. 4. Odpowiednie procedury uzupełniające pokazano na rys. 5 i 6.



Rys. 5. Obliczenia wstępne dla wyznaczania profilu obciążenia grup roboczych  
Fig. 5. Preliminary calculations for load profile designating



Rys.6. Wyznaczanie profilu obciążenia grup roboczych zleceniami fabrycznymi  
 Fig. 6. Designating of production system load profile

## LITERATURA

1. Axsäter S., Jönsson H.: Aggregation and Disaggregation in Hierarchical Production Planning. European Journal of Operational Research, Vol. 17, 1984.
2. Evans J.R., Anderson D.R., Sweeney D.J., Williams T.A.: Applied Production and Operations Management. West Publishing Co., New York 1987.
3. Orlicky J.: Material Requirements Planning. Mc Graw-Hill, New York 1975.
4. Silver E.A., Peterson R.: Decision Systems for Inventory Management and Production Planning. Wiley, New York 1985.
5. Wróblewski K.J.: Podstawy sterowania przepływem produkcji. WNT, Warszawa 1993.
6. Zaborowski M.: Struktura hierarchiczna zintegrowanych systemów zarządzania i sterowania produkcją. Zesz. Nauk. Politechniki Świętokrzyskiej. s. Nauki Ekonomiczne. z. 22. ss. 149-159. Kielce 1995.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Tadeusz Sawik

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

**Abstract**

The models of materials outlay and work centers load, which are applied to material requirements planning and master scheduling levels in hierarchical production control systems, are presented in the paper. Planned production orders and master production schedule are corresponding independent variables of the models. Furthermore, the paper shows algorithms for calculation of aggregated model parameters. It is assumed for aggregation purpose that all inventories inside a production system are neglected. Then, on the ground of the superposition rule, the modified MRP algorithm is applied for calculation of coefficients and lead times of the higher level model.