ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 58 Energetyka z.9 1962

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki B

PRZEDSTAWIENIE I PARAMETRY ZASTĘPCZE KRZYWYCH OGRZEWANIA I OSTYGANIA W UKŁADACH NIELINIOWYCH O n STOPNIACH SWOBODY

Streszczenie: W aparaturze, złożonej z grzejnika elektrycznego, osłony, termometru i w pewnych przypadkach także i innych ciał, wyznaczano krzywe ogrzewania i ostygania. Wykazywały one wpływ nieliniowości układu. W związku z tym przy stosowaniu znanych metod wyznaczania stałych równania (1) wynikły przy opracowaniu wyników doświadczalnych pewne trudności. Dlatego opracowano metodę, która pozwala wyraźnie oddzielić od siebie charakterystyczne cechy otrzymanych krzywych:

Krzywe mają charakter wykładniczy jak w układzie liniowym jednoskładnikowym dla dużych wartości zmiennej niezależnej.

Dla mniejszych wartości występuje wpływ nieliniowości układu, wreszcie przy wartościach początkowych zmiennej niezależnej występuje wpływ szybko zanikających wykładniczych członów dodatkowych.

Użyte wzory interpolacyjne zostały uzyskane za pomocą rozwiązań nieliniowego równania (2) dotyczącego układu jednoskładnikowego nieliniowego [2]. Występujące w równaniu (2) wielkości mogą być wyznaczone na podstawie przebiegu krzywych w układzie półlogarytmicznym i następnie mogą być użyte jako parametry zastępcze dla scharakteryzowania układu, do którego odnoszą się wyniki pomiaru.

1. Wstęp

Artykuł niniejszy nawiązuje do rozdziału V rozprawy doktorskiej autora [3]. W rozprawie tej rozpatrzono zmiany temperatur w układzie n ciał, z których jedno zawiera źródło ciepła załączane i wyłączane w określonych chwilach i które wymieniają ciepło w ośrodku gazowym między sobą i z otoczeniem. Posługując się teorią liniową wyprowadził autor wyrażenia dla temperatur układu w następującej postaci:

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} e^{\alpha_k t} + \theta_i, \qquad i=1.....n \qquad (1)$$

gdzie:

θ_i - temperatury w stanie ustalonym,

A_{ik} - stałe wyznaczone z warunków początkowych,

α_k - stałe rzeczywiste ujemne.

W podręcznikach poświęconych przybliżonym metodom przedstawienia funkcji znajdujemy metodę wyznaczania stałych występujących w równaniu (1). Metoda ta ma tę wadę, że przy jej stosowaniu występują duże człony, których różnica jest mała, wskutek czego możliwe są duże błędy w wyznaczaniu stałych.

Istnieje ponadto druga przyczyna, dla której szukano innej formuły interpolacyjnej do przedstawienia krzywych ogrzewania i ostygania otrzymanych w układzie złożonym z grzejnika elektrycznego, osłony, termometru, z dodatkiem lub bez dodatkowych ciał; krzywe te wykazują bowiem odstępstwa od teorii zakładającej, że układ jest liniowy. W rozdziale II pracy [3] rozpatrywano wpływ nieliniowości układu na zmiany temperatury w procesie ogrzewania i ostygania w układzie jednoskładnikowym wymieniającym ciepło z otoczeniem. Wpływ ten uwzględniono również w niniejszej pracy przy rozpatrywaniu układu n ciał.

2. Nieliniowość w układzie jednoskładnikowym wymieniającym ciepło z otoczeniem

Weźmy najprostszy przypadek, w którym proces ogrzewania opisany jest równaniem różniczkowym [2]:

$$K \; d\vartheta_1/dt + S\,h\left[\vartheta_1 - \vartheta_o + a_{1,o}(\vartheta_1 - \vartheta_o)^2\right] = N \qquad (2)$$

gdzie:

- K - pojemność cieplna układu,
- S - powierzchnia układu,
- h - współczynnik wymiany ciepła,
- $a_{1,o}$ - współczynnik temperaturowy,
- N - moc źródła ciepła (przy ostyganiu $N = 0$),
- ϑ_1, ϑ_o - temperatura układu i otoczenia.

Przy rozwiązywaniu równania (2) przyjęto następujące warunki początkowe

dla ogrzewania $t = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_o$.

dla ostygania $t = 0$, $\vartheta_1 = T_1$.

Dla ogrzewania najbardziej dogodna postać rozwiązania jest następująca:

$$\vartheta_1 = \theta_1 + \frac{e^{\alpha t}}{C} \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{1 - \frac{1}{C} e^{\alpha t}} \qquad (3)$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \vartheta_o + \frac{-S\,h + \sqrt{S^2h^2 + 4\,N\,S\,h\,a_{1,o}}}{2\,S\,h\,a_{1,o}} \\ \theta_2 &= \vartheta_o + \frac{-S\,h - \sqrt{S^2h^2 + 4\,N\,S\,h\,a_{1,o}}}{2\,S\,h\,a_{1,o}} \\ \alpha &= -\frac{\sqrt{S^2h^2 + 4\,N\,S\,h\,a_{1,o}}}{K} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)S\,h\,a_{1,o}}{K} \\ C &= \frac{\vartheta_o - \theta_2}{\vartheta_o - \theta_1} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Dla ostygania otrzymuje się równanie

$$\vartheta_1 = \theta'_1 + \frac{e^{-(Sh/K)t}}{B} \cdot \frac{\theta'_1 - \theta'_2}{1 - \frac{1}{B} e^{-(Sh/K)t}} \qquad (5)$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} \theta'_1 &= \vartheta_o, \\ \theta'_2 &= \vartheta_o - \frac{1}{a_{1,o}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

gdzie:

B - stała, wyznaczona z warunków początkowych.

3. Krzywe ogrzewania

Po zlogarytmowaniu równania (3) dochodzi się do zależności następującej:

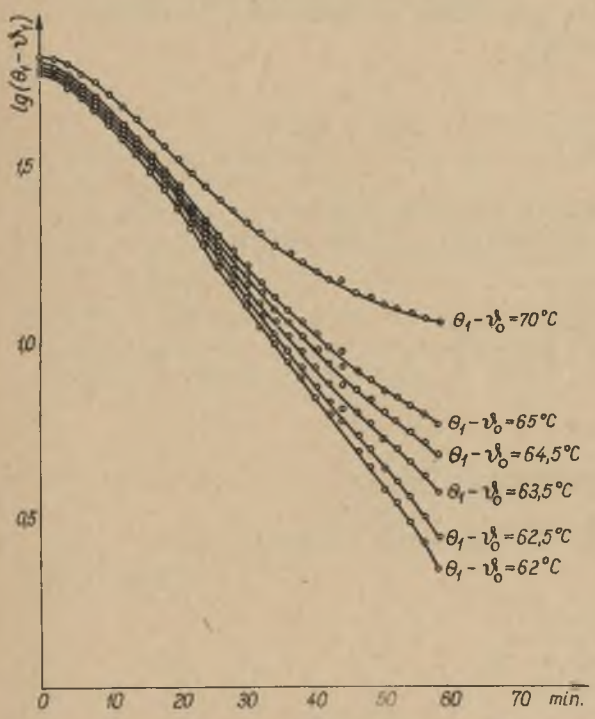
$$\lg (\theta_1 - \vartheta_1) = \alpha t/2{,}303 + \lg A - \lg D \qquad (7)$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{C} \\ D &= 1 - \frac{1}{C} e^{\alpha t} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

W równaniu (7) lewa strona zawiera temperaturę zmierzoną ϑ_1, oraz stałą temperaturę θ_1, którą należy odpowiednio dobrać. Metoda nie pozwala na użycie wartości zbyt bliskich stanu ustalonego, ponieważ w tym przypadku wartość logarytmu może być obarczona znacznym błędem. Ponieważ krzywe pomiarowe nie były doprowadzone do stanu ustalonego, wartości θ_1 wyznaczono za pomocą prób. Wartość θ_1 daje się wyznaczyć z dokładnością taką samą, z jaką odbywały się odczyty temperatur (do 1/10°C). Aby uwidocznić, jak wyraźnie temperatura ta

wpływa na wyznaczane stałe, przeliczono każdą krzywą w dwu wariantach (różne θ_1), z których zawsze jeden daje lepszą zgodność z doświadczeniem. Od wyboru wartości θ_1 zależy kształt krzywych, jak po pokazuje rysunek 1.



Rys.1. Wpływ wartości $\theta_1 - \vartheta_0$ na krzywe ogrzewania. Wszytkie krzywe przedstawiają te same wyniki pomiarowe

Jeżeli weźmiemy pod uwagę prawą stronę równania (7), widzimy, że dwa pierwsze człony wyznaczają prostą, człon trzeci jest zmienny, przy czym $C < 0$. Dla dużych wartości t wyrażenie to jest równe zeru i wzrasta ku malejącym t. W początkowej części krzywej należy oczekiwać niezgodności, spowodowanej faktem, że układ jest wieloskładnikowy. Wpływ ten dodaje się do poprzedniego, powodując, że krzywe nie mają przegięcia.

Ta dyskusja i obserwacja rysunku 1 powodują, że nie możemy wybierać θ_1 dowolnie. Od góry wartości te są ograniczone ponieważ charakter krzywych dla za dużych θ_1 nie zgadza się z teorią (pojawia się punkt przegięcia, podobnie, jak w przypadku krzywych ostygania). Od dołu są one ograniczone za pomocą nierówności, wynikającej z teorii

$$\theta_1 - \vartheta_0 < \vartheta_0 - \theta_2$$

Za pomocą prób znaleziono, że dla przewagi przypadków najlepsze wartości (najlepszą zgodność z doświadczeniem) otrzymujemy dla $A/(\Theta_1 - \vartheta_o)$ bliskiego 2, ale nieco mniejszego.

4. Wyznaczanie parametrów zastępczych układu dla ogrzewania

Końcowy odcinek krzywych opisanych równaniem (7) możemy przedstawić za pomocą równania

$$\lg(\Theta_1 - \vartheta_1) = \alpha t/2{,}303 + \lg A$$

skąd możemy prosto wyznaczyć wielkości A i α.
Wartość D wyliczano dla wybranych t ze wzoru

$$D = 1 + e^{\alpha t}\left[\frac{A}{\Theta_1 - \vartheta_o} - 1\right] \tag{9}$$

Za pomocą wzorów

$$A = -(\Theta_1 - \vartheta_o)\,\frac{1 - C}{C}$$

$$C = \frac{1}{1 - D}\,e^{\alpha t}$$

$$(\vartheta_o - \Theta_2) = \frac{1}{1 - D}(\vartheta_o - \Theta_1)\,e^{\alpha t} > |\vartheta_o - \Theta_1|$$

$$C < 0 \qquad D > 1 \qquad |C| > 1$$

otrzymujemy warunki, pozwalające sprawdzić poprawność wyznaczenia stałych:

$$e^{\alpha t} > |1 - D|$$

$$-\frac{A}{\Theta_1 - \vartheta_o} + 1 = -\frac{1}{C} = (1 - D)\,e^{-\alpha t} \tag{11}$$

Ostatnia wielkość jest ułamkiem właściwym ujemnym.

Różnicę $\theta_2 - \vartheta_o$ obliczono ze wzoru

$$\vartheta_o - \theta_2 = (\theta_1 - \vartheta_o)/(\frac{A}{\theta_1 - \vartheta_o} - 1) \qquad (12)$$

Dla porównania zgodności uzyskanej formuły z doświadczeniem, obliczano temperatury ze wzoru

$$\theta_1 - \vartheta_1 = \frac{A}{D} e^{\alpha t} \qquad (13)$$

Wyznaczenie wszystkich stałych równania wymaga użycia trzech punktów.

Trzeci punkt obierano w tej części krzywej, gdzie występowały odstępstwa od przebiegu prostoliniowego.

Dla oceny błędu wielkości α wyznaczano tę wielkość dla trzech kombinacji punktów końcowego odcinka prostoliniowego. Stąd wyliczano średnią i przy jej pomocy $\theta_1 - \vartheta_o$ dla porównania z doświadczeniem.

5. Krzywe ostygania

Po zlogarytmowaniu równania (5) otrzymuje się zależność następującą:

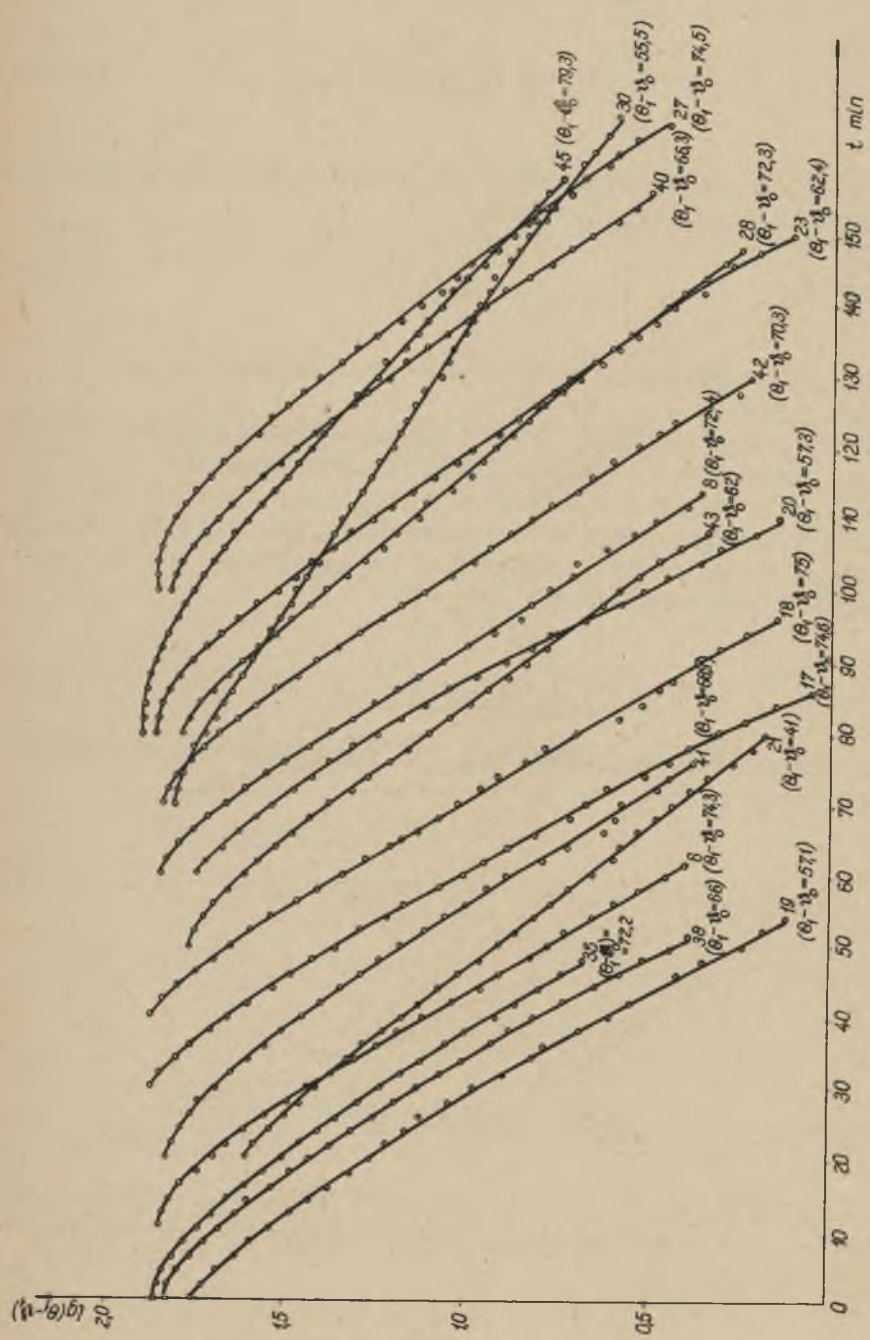
$$\lg(\vartheta_1 - \vartheta_o) = -\frac{Sh}{K}\frac{t}{2,303} + \lg A - \lg D \qquad (14)$$

przy czym

$$A = (\theta_1' - \theta_2')/B$$
$$D = 1 - \frac{1}{B} e^{-\frac{Sh}{k} t} \qquad (15)$$

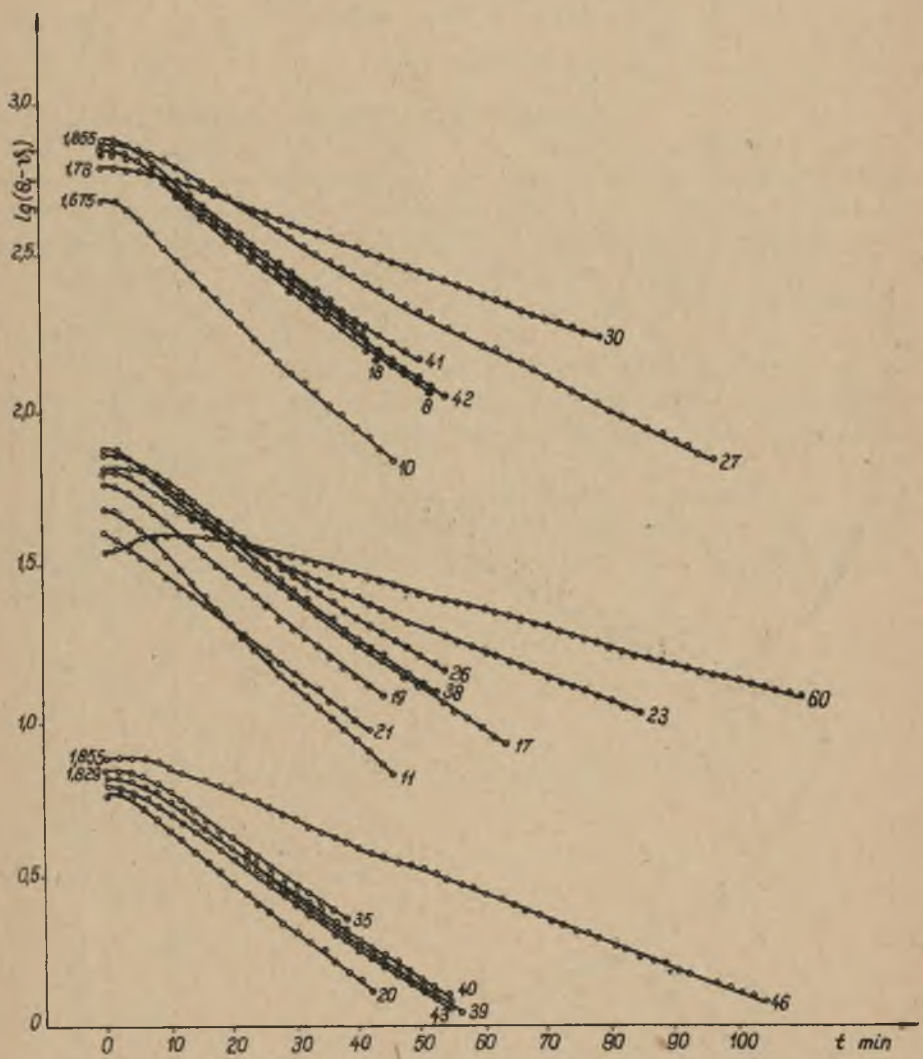
Ponieważ końcowy odcinek krzywych ostygania w skali półlogarytmicznej jest prostoliniowy, możemy go przedstawić za pomocą równania

$$\lg(\vartheta_1 - \vartheta_o) = -\frac{Sh}{K}\frac{t}{2,303} + \lg A$$

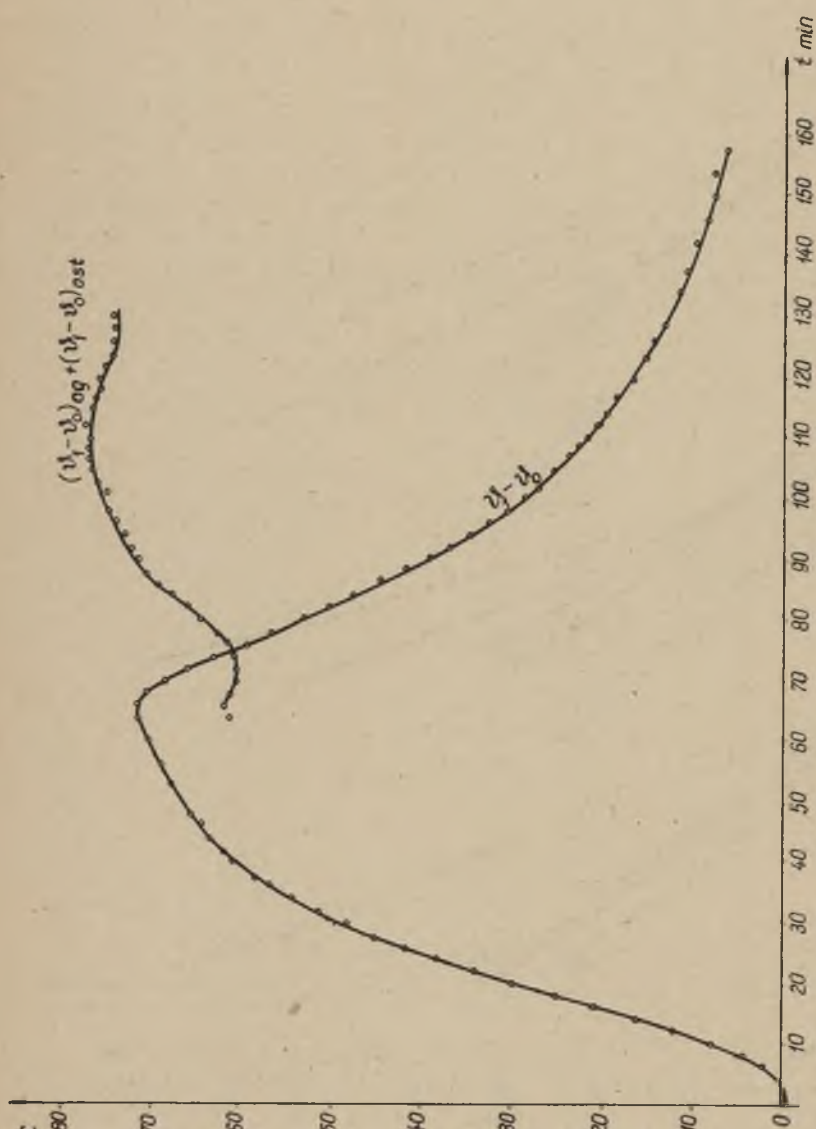


Rys.2. Krzywe lg (θ_1 - ϑ_1) dla ogrzewania

(Dla uzyskania przejrzystości początek czasu poszczególnych krzywych obierano różny)



Rys.3. Krzywe lg(ϑ_1 - ϑ_2) dla ostygania. (W celu uzyskania przejrzystości poszczególne grupy krzywych przesunięto w górę lub w dół. Odpowiednie krzywe mają na początku napisaną pierwszą swą rzędną)



Rys.4. Typowa krzywa ogrzewania i ostygania oraz krzywa, otrzymana przez sumowanie rzędnych tych krzywych. (Ostatnia krzywa została celem zmniejszenia wymiarów rysunku przesunięta równolegle w dół

Z równania tego możemy wyznaczyć wielkości $\alpha = - Sh/K$ oraz $a_{1,o}$ B. Dla oceny błędu brano pod uwagę trzy pary wartości czasu i przy ich pomocy wyliczano średnie wartości.

Wartości B wyliczano za pomocą wartości średniej $\alpha_{śr}$. Wielkość $a_{1,o\ śr}$ obliczano z wielkości $B_{śr}$ i $a_{1,o}\ B_{śr}$. Wielkość $(\vartheta_1 - \vartheta_o)_{obl}$ wyliczono z pełnego wzoru, dla sprawdzenia dokładności wyznaczonych stałych.

W tym przypadku do wyznaczenia stałych potrzebne są zasadniczo dwa punkty. Krzywa nie da się więc tak elastycznie dopasować do wartości pomiarowych jak w poprzednim przypadku. Porównanie wartości pomiarowych z obliczonymi na podstawie formuły pokazuje, że większe odchylenia rzędu 1°C występują na granicy części prostoliniowej. (Efekt jest niezależny od obranego sposobu obliczania).

Rysunki 2 i 3 przedstawiają w skali półlogarytmicznej kilka krzywych ogrzewania i ostygania uzyskanych z pomiarów. Rysunek 4 przedstawia typową krzywą ostygania i ogrzewania w funkcji czasu.

W tablicach I i II przytoczono wyniki opracowania krzywych rysunku 2 i 3, przykładowo dla krzywych nr 18, 23, 30, 45 dotyczących ogrzewania i krzywych nr 18, 30, 45, 65 dotyczących ostygania.

Praca wpłynęła do redakcji 10.XI.1961

Tablica I

Opracowanie krzywych ogrzewania

Nr	$\theta_1 - \vartheta_0$ przyjęte	t_1	$\theta_1 - \vartheta_1$	t_2	$\theta_1 - \vartheta_2$	t_3	$\theta_1 - \vartheta_3$ obs.	$\theta_1 - \vartheta_3$ obl.	$\theta_1 - \vartheta_0$ oblicz.	$\vartheta_0 - \theta_2$ oblicz.	A	$\frac{-\alpha}{2,303} 10^3$	$\alpha_{śr}$
18	75,0	56	1,4	50	2,3	10	44,5	43,1				36	
		56	1,4	48	2,7	20	23,4	22,2				36	
		54	1,7	48	2,7	30	11,1	10,5				33	
						40	5,1	4,8	74,7	107			
						50	2,3	2,1	74,8	107		35	
						56	1,4	1,4	75,0	107	128		-0,081
	75,1	56	1,5	50	2,4	10	44,6	41,6				34	
		56	1,5	48	2,8	20	23,5	21,6				34	
		54	1,8	48	2,8	30	11,2	10,4				32	
						40	5,2	4,9	74,8	163			
						50	2,4	2,3	75,0	163		33,3	
						56	1,5	1,4	75,0	163	110		-0,077
23	62,4	62	2,8	56	4,1	10	42,5	43,3				28	
		62	2,8	54	4,6	20	25,0	27,8				27	
		64	2,6	56	4,1	30	13,9	16,9				24	
						40	8,5	9,6	63,5	69,7			
						56	4,1	3,8	62,1	68,2		26,3	
						62	2,8	2,7	62,3	68,4	120		-0,061

Tablica I c.d.

Nr	$\theta_1 - \vartheta_0$ przyjęte	t_1	$\theta_1 - \vartheta_1$	t_2	$\theta_1 - \vartheta_2$	t_3	$\theta_1 - \vartheta_3$ obs.	$\theta_1 - \vartheta_3$ obl.	$\theta_1 - \vartheta_0$ oblicz.	$\vartheta_0 - \theta_2$ oblicz.	A	$\frac{-\alpha}{2,303} 10^3$	$\alpha_{śr}$
23	62,5	62	2,9	56	4,2	10	42,6	43,1				27	
		62	2,9	54	4,7	20	25,1	27,7				26	
		64	2,7	56	4,2	30	14,0	16,8				24	
						40	8,6	9,8	63,7	80,6			
						56	4,2	4,0	62,3	78,8		25,6	
						62	2,9	2,9	62,5	78,8	112		-0,059
30	65,6	84	6,1	78	7,5	10	53,8	53,3				15	
		84	6,1	76	8,1	20	40,3	42,4				15	
		82	6,4	76	8,1	30	29,8	32,3				17	
						40	22,5	24,4					
						50	16,8	17,9				15,6	
						60	12,4	12,9					
						70	9,7	9,4	65,3	73,3			
						78	7,5	6,1	64,2	72,1			
						84	6,1	5,9	65,4	73,5	125		-0,036
	65,5	84	6,0	78	7,4	10	53,7	51,9				15	
		84	6,0	76	8,0	20	40,2	41,9				15	
		82	6,3	76	8,0	30	29,7	31,4				17	
						40	22,4	24,0					
						50	16,7	17,7				15,6	
						60	12,3	12,8					
						70	9,6	9,3	65,2	74,9			
						78	7,4	7,0	65,1	74,8			
						84	6,0	5,8	65,3	75,1	123		-0,036

Tablica I c.d.

Nr	$\theta_1 - \vartheta_0$ przyjęte	t_1	$\theta_1 - \vartheta_1$	t_2	$\theta_1 - \vartheta_2$	t_3	$\theta_1 - \vartheta_3$ obs.	$\theta_1 - \vartheta_3$ obl.	$\theta_1 - \vartheta_0$ oblicz.	$\theta_0 - \vartheta_2$ oblicz.	A	$\frac{-\alpha}{2,303} 10^3$	$\alpha_{śr}$
45	79,3	78	5,7	68	8,7	10	74,3	51,8				18	
		78	5,7	70	7,9	20	58,5	47,0				18	
		76	6,3	68	8,7	30	40,9	34,1				18	
						40	27,9	24,2					
						50	18,2	16,9				18	
						60	12,2	11,6	78,7	95,9			
						68	8,7	8,4	79,0	96,3			
						78	5,7	5,7	79,3	96,7	145		-0,041
	79,4	78	5,8	68	8,8	10	74,4	61,2				18	
		78	5,8	70	8,0	20	58,6	45,7				17	
		76	6,4	68	8,8	30	41,0	32,8				17	
						40	28,0	23,2					
						50	18,3	16,2				17,3	
						60	12,3	11,2	78,2	124			
						68	8,8	8,2	78,8	125			
						78	5,8	5,5	79,1	126	130		-0,040

Tablica II

Opracowanie krzywych ostygania

Nr	t_1	$\vartheta_1 - \vartheta_o$ obs.	$\vartheta_1 - \vartheta_o$ obl.	t_2	$\vartheta_2 - \vartheta_o$ obs.	$\vartheta_2 - \vartheta_o$ obl.	t_3	$\vartheta_3 - \vartheta_o$ obs.	$\vartheta_3 - \vartheta_o$ obl.	$\alpha \cdot 10^4$	$10^4 a_{1,o}B$	B	$a_{1,o}$ śr
18	48	12,4	12,7	22	32,4		8	58,0		-365	137	9,8	
				24	29,9	31,2	10	53,4	53,6	-367	139	10,4	
				26	27,6		12	49,1		-364	141	11,4	
										-365,3	139	10,57	$131 \cdot 10^{-5}$
30	76	17,0	17,2	50	26,8		24	43,3		-175	156	17,3	
				52	25,7	26,3	26	41,8	41,7	-172	159	16,9	
				54	24,7		28	40,2		-170	162	18,6	
										-172,3	159	17,6	$903 \cdot 10^{-6}$
45	102	11,6	11,7	40	37,7		18	60,3		-184	127	9,7	
				42	36,0	37,7	20	57,7	57,8	-182	129	10,4	
				44	34,5		22	55,3		-182	130	10,9	
										-182,7	128,7	10,33	$124 \cdot 10^{-6}$
65	108	11,3	11,7	78	16,8		28	33,1		-134	208	58,4	
				80	16,4	16,9	30	32,5	33,0	-133	210	33,7	
				82	15,9		32	31,5		-131	214	42,8	
										-132,6	210,3	44,9	$460 \cdot 10^{-6}$

LITERATURA

[1] J.S.Bezykowicz - Pribliżonnyje wyczislenija, Gos. Izd. T.T. Lit. Leningrad 1941.

[2] J.Szpilecki - Wpływ nieliniowości układu na zmiany temperatury w procesie ogrzewania i ostygania w układzie jednoskładnikowym, wymieniającym ciepło z otoczeniem, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka Nr 5, 1961.

[3] J.Szpilecki - Oscylacje temperaturowe typu rekaksacyjnego, Rozprawa doktorska, Wydz. Mechan.-Energetyczny Pol. Śląskiej.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ЗАМЕЩАЮЩИЕ ПАРАМЕТРЫ КРИВЫХ НАГРЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, ИМЕЮЩИХ n СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Резюме

По поводу некоторых затруднений при использовании обычно известного метода определения на основании результатов эксперимента постоянных в уравнении (1) и тоже по поводу, что результаты измерения кривых нагрева и охлаждения в системе, состоящей из электрического нагревателя, покрова, термометра и возможно других тел, отражают влияние нелинейного характера системы, выработано следующий метод, который дает возможность отделить от себя следующие характерные черты полученных кривых:

Кривые имеют экспоненциальный характер как в однокомпонентной линейной системе, для больших значений независимого переменного.

Если независимая переменная принимает меньшие значения, выступает влияние нелинейности системы; при начальных очень малых значениях независимого переменного выступает влияние скоро затухающих экспоненциальных добавочных членов.

Использованные интерполяционные формулы получено при помощи решения уравнения (2), принадлежащего к нелинейной однокомпонентной системе, если оно представлено в полулогарифмической шкале.

Постоянные, которые выступают в уравнении (2) могут быть вычислены по данным кривых и использованы как замещающие параметры для описания системы, к которой относятся результаты измерений.

REPRESENTATION AND EQUIVALENT PARAMETERS OF THE HEATING AND COOLING CURVES IN THE NONLINEAR SYSTEMS WITH n DEGREES OF FREEDOM

Summary

The commonly used method of determining the constants of the equation (1) (from the experimental dates) performs some difficulties. The received curves of heating and cooling in a system composed from electric heater, cover, thermometer with or without some other bodies, exhibited also the influence of nonlinearity of the system. Therefore in the paper is given a new method which distinguishes three pecularities of received curves:

For great values of independent variable the curve has the form of a simple exponential function (as in the linear monocomponent system). For smaller values the nonlinearity of the system is exhibited. For initial small values of independent variable is the influence of the other exponential terms visible, which vanishes rapidly.

The interpolation formulae were received from the solutions of the nonlinear equation (2) of monocomponent system represented in the half-logarithmic scale.

Coefficients appearing in the equation (2) can be determined from the form of the curves and then these values can be used as equivalent parameters for description of the system.