ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 58 Energetyka z.9 1962

RYSZARD PETELA

Katedra Energetyki Cieplnej

# EGZERGIA JASNOŚCI PROMIENIOWANIA*)

Streszczenie. Za pomocą bilansu egzergetycznego elementarnej powierzchni wyprowadzono wzory na egzergię dowolnego promieniowania cieplnego określonego za pomocą jasności promieniowania. Dla powierzchni o temperaturze otoczenia przyjęto egzergię emisji własnej równą zeru. W przykładach obliczeniowych podano sposób posługiwania się wyprowadzonymi wzorami.

## 1. Wstęp

Promieniowanie może być rozpatrywane z dwojakiego punktu widzenia. Można mówić o dowolnym promieniowaniu docierającym do pewnej powierzchni, a pochodzącym z nieznanego źródła. Ilość i jakość takiego promieniowania można określić za pomocą pojęcia jasności promieniowania. Rozważając więc egzergię jasności promieniowania rozpatruje się tym samym egzergię promieniowania dowolnego.

Z drugiej strony można mówić o emisji własnej powierzchni ciała, której temperatura i właściwości są znane. Wyprowadzenie wzorów dla egzergii emisji własnej powierzchni doskonale szarej jest treścią wcześniejszej pracy autora [7]. Powierzchnie rzeczywiste spotykanie w przyrodzie emitują pro-

---

*) Praca niniejsza stanowi skrót 2,4 i 5 rozdziału rozprawy doktorskiej "Egzergia promieniowania cieplnego" wykonanej w Katedrze Energetyki Cieplnej Politechniki Śląskiej. Promotorem był doc. dr inż. Jan Szargut. Publiczna dyskusja nad rozprawą doktorską odbyła się 16 grudnia 1961 r.

mieniowanie o podziale spektralnym energii nie dającym się ująć wzorami obowiązującymi dla powierzchni doskonale szarych. Dlatego przy rozpatrywaniu emisji własnej powierzchni rzeczywistych należy posłużyć się wzorami dla promieniowania dowolnego określonego za pomocą pojęcia jasności promieniowania. Wzory określające egzergię jasności promieniowania można zastosować do obliczania egzergii emisji własnej dowolnej powierzchni przyjmując, że rozpatrywana powierzchnia nie odbija promieniowania obcego to jest, że jasność promieniowawania tej powierzchni jest równa światłości.

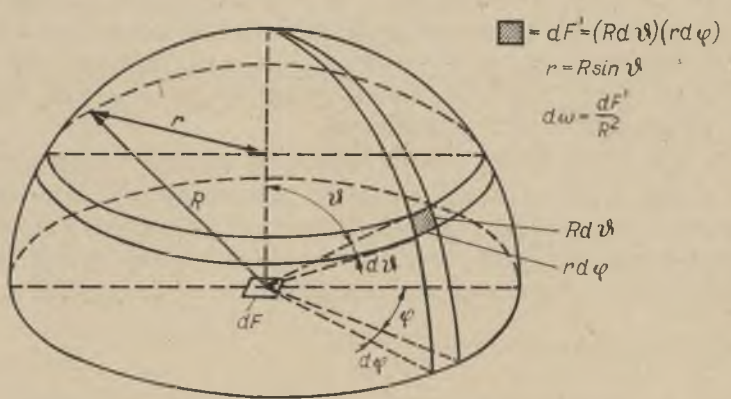
## 2. Pojęcia podstawowe dotyczące promieniowania

### 2.1. Jasność kierunkowa promieniowania

Energię $d^3E$ promieniowania zawartego w obrębie kąta przestrzennego $d\omega$ i przechodzącego przez element powierzchni $dF$ w czasie $d\tau$ można obliczyć za pomocą wzoru [9]:

$$d^3E = K \cos\vartheta \, dF \, d\omega \, d\tau \qquad (1)$$

gdzie $\vartheta$ oznacza kąt (rys.1) pomiędzy normalną do elementarnej powierzchni $dF$, a kierunkiem rozważanego kąta $d\omega$. Wielkość $K$ nosi nazwę jasności kierunkowej promieniowania[1)]




Rys.1. Obliczanie emisji własnej

1) Nazwa zaproponowana przez autora wobec braku jednolitej nomenklatury w polskiej literaturze (podług Plancka "Helligkeit").

i w układzie jednostek MKS [6] ma wymiar $kJ/m^2$ sec srd[1]. Jak wynika ze wzoru (1) jasność kierunkowa wyraża ilość energii przechodzącej w obrębie jednostkowego kąta przestrzennego, przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku promieniowania w jednostce czasu.

Dla promieniowania spolaryzowanego można przedstawić wielkość K następująco [9]:

$$K = \int_{\nu} (K_{\nu} + K'_{\nu})d\nu \qquad (2)$$

gdzie

$\nu$ - częstość drgań 1/sec,

$K_{\nu}$, $K'_{\nu}$ - najmniejsza i największa wartość składowej monochromatycznej jasności promieniowania[2], zależna od częstości drgań w $kJ/m^2srd$.

Dla promieniowania niespolaryzowanego $K_{\nu} = K'_{\nu}$ i z równania (2) wynika wzór:

$$K = 2\int_{\nu} K_{\nu}\, d\nu \qquad (3)$$

lub

$$K = 2\int_{\lambda} K_{\lambda}\, d\lambda \qquad (4)$$

gdzie

$K_{\nu}$ - monochromatyczna jasność kierunkowa promieniowania prostoliniowo spolaryzowanego, zależna od częstości drgań w $kJ/m^2srd$,

---

[1] Jeżeli promieniowanie pochodzi tylko z emisji własnej, wówczas jasność kierunkowa promieniowania jest równa światłości promieniowania zdefiniowanej w publikacji [5].

[2] Według przyjętego przez autora systemu nomenklatury pochodne wielkości charakteryzujących promieniowanie podług częstości drgań lub długości fali zostały nazwane wielkościami monochromatycznymi (np. monochromatyczna jasność, monochromatyczna światłość).

$K_\lambda$ - monochromatyczna jasność kierunkowa promieniowania prostoliniowo spolaryzowanego, zależna od długości fali w $kJ/m^3 sec$ srd,

$\lambda$ - długość fali w m.

Obydwa równania (3) i (4) wyrażają tę samą ilość energii. Podział spektralny tej energii rozpatruje się w fizyce eksperymentalnej podług długości fal. Dla rozważań teoretycznych wygodniej jest stosować podział spektralny podług częstości drgań, ponieważ częstość ta nie zmienia się przy przechodzeniu promieniowania z jednego ośrodka do drugiego.

Częstość drgań określa się wzorem:

$$\nu = \frac{w}{\lambda} \tag{5}$$

gdzie w oznacza prędkość rozprzestrzeniania się promieniowania. Dla próżni $w = c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/sec [2].

Jeżeli przyjmie się, że dla rozważanego interwału częstości wielkości $d\nu$ i $d\lambda$ mają ten sam znak, wówczas otrzymuje się dla promieniowania w próżni następującą zależność:

$$d\nu = \frac{c\, d\lambda}{\lambda^2} \tag{6}$$

Przyrównując prawe strony równań (3) i (4) oraz uwzględniając zależność (6) otrzymuje się wzór:

$$K_\lambda = \frac{c\, K_\nu}{\lambda^2} \tag{7}$$

Dla powierzchni doskonale czarnej o temperaturze T monochromatyczna jasność kierunkowa promieniowania spolaryzowanego prostoliniowo wyraża się w zależności od długości fali wzorem [9]:

$$K_{\lambda,c} = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{ch/k\lambda T} - 1} \tag{8}$$

gdzie [2]:

$h = 6{,}624 \cdot 10^{-37}$ kJ sec - stała Plancka,

$k = 138{,}03 \cdot 10^{-28}$ kJ/grd - stała Boltzmanna.

Wykorzystując równania (5) i (7) otrzymuje się wzór na monochromatyczną jasność kierunkową promieniowania prostoliniowo spolaryzowanego, powierzchni doskonale czarnej o temperaturze T, w zależności od częstości drgań:

$$K_{\nu,c} = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\nu h/kT} - 1} \tag{9}$$

Dla powierzchni doskonale czarnej monochromatyczna jasność kierunkowa jest równa monochromatycznej światłości.

## 2.2. Emisja własna powierzchni

Emisja własna $e^*$ kJ/m$^2$ sec[1] wyraża ilość energii promieniowania emitowanej przez jednostkową powierzchnię ciała we wszystkich kierunkach półkuli w jednostce czasu:

$$e^* = \int_{\omega = 2\pi} \bar{K} \cos\vartheta \, d\omega \tag{10}$$

gdzie $\bar{K}$ kJ/m$^2$sec srd oznacza światłość promieniowania powierzchni emitującej [5]. Wzór na kąt przestrzenny wynika z rysunku 1:

$$d\omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \tag{11}$$

Jeżeli emisja powierzchni jest równomierna we wszystkich kierunkach tzn. $\bar{K}$ ma wartość stałą, wówczas po uwzględnieniu wzoru (11) z równania (10) otrzymuje się:

$$e^* = \bar{K} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \pi \bar{K} \tag{12}$$

---

[1] Niektóre wielkości odniesione do jednostki czasu oznacza się wskaźnikiem *.

W celu otrzymania wzoru na emisję własną $e_c^*$ powierzchni doskonale czarnej o temperaturze T należy wstawić do wzoru (12) równanie (3) i np. (9):

$$e_c^* = 2\pi \int_0^\infty \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \tag{13}$$

Po rozwiązaniu całki w równaniu (13) otrzymuje się prawo Stefana-Boltzmanna:

$$e_c^* = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} T^4 = \frac{ac}{4} T^4 = \sigma T^4 \tag{14}$$

gdzie wielkość a jest uniwersalną stałą o wartości [1]:

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3} = 7{,}561 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kJ/m^3 grd^4}$$

Wielkość $\sigma$ oznacza stałą Stefana-Boltzmanna o wartości [1]:

$$\sigma = \frac{ac}{4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} = 5{,}6667 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{kJ/m^2 sec\ grd^4}$$

Emisję powierzchni doskonale szarej $e^*$ często [5] wyraża się jako ułamek emisji powierzchni doskonale czarnej:

$$e^* = \varepsilon e_c^* = \varepsilon \frac{ac}{4} T^4 \tag{15}$$

gdzie $\varepsilon$ oznacza emisyjność powierzchni.

Jeżeli w punkcie P powierzchnia emituje promieniowanie tylko w obrębie pewnego kąta przestrzennego[1] $\omega < 2\pi$

[1] Założenie to można zinterpretować za pomocą uogólnionego pojęcia emisyjności. Traktując emisyjność w sposób uogólniony przyjmuje autor, że w danym punkcie rozpatrywanej powierzchni jest ona funkcją długości fali, sposobu polaryzacji i kierunku promieniowania. Przyjęcie, że element

i jeżeli emisja ta jest w obrębie tego kąta równomierna, wówczas emisję własną $e^*_\omega$ kJ/m$^2$ sec w punkcie P można wyrazić wzorem:

$$e^*_\omega = \bar{K} \iint_\omega d^2A \tag{16}$$

gdzie dla skrócenia zapisu

$$d^2A = \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \tag{17}$$

Dzieląc stronami przez siebie równania (16) i (12) otrzymuje się drugą postać wzoru (16):

$$e^*_\omega = \frac{e^*}{\pi} \iint_\omega d^2A \tag{18}$$

gdzie $\vartheta$ i $\varphi$ oznaczają współrzędne kierunków zawartych w obrębie kąta $\omega$.

## 2.3. Jasność promieniowania

Promieniowanie składa się z emisji własnej pewnej powierzchni oraz z promieniowania odbitego przez tę powierzchnię. Suma energii tych dwóch rodzajów promieniowania odniesiona do jednostki powierzchni i do jednostki czasu nosi nazwę jasności promieniowania. Jasność promieniowania w dowolnym miejscu przestrzeni wyraża więc ilość energii promieniowania przechodzącego przez jednostkową powierzchnię kontrolną w jednostce czasu.

Jasność promieniowania powierzchni określa całkowitą energię wychodzącą w jednostce czasu z jednostkowej powierzchni. Dla powierzchni doskonale czarnej, która nie

---

d.c.notki ze str.48
powierzchni jest zdolny do emisji i absorpcji tylko w obrębie kąta $\omega < 2\pi$ jest więc równoznaczne z założeniem, że dla kierunków wykraczających poza ten kąt emisyjność jest równa zeru.

odbija żadnego promieniowania jasność jest równa emisji własnej.

Pojęciem jasności promieniowania można posłużyć się w przypadku, gdy rozpatruje się promieniowanie pochodzące z nieznanego źródła. Nie wiadomo wówczas jaką część docierającego promieniowania stanowi emisja własna nieznanej powierzchni, a jaką promieniowanie przez tę powierzchnię odbite.

Całkowitą jasność promieniowania $H^*_{F'}$ kJ/sec pochodzącego od pewnej określonej powierzchni $F'$ i docierającego do powierzchni $F$ można wyrazić wzorem:

$$H^*_{F'} = \int_F h^*_{F'} dF \tag{19}$$

Jasność promieniowania $h^*_{F'}$ kJ/m$^2$sec padającego na element $dF$ rozważanej powierzchni $F$ wyraża się wzorem:

$$h^*_{F'} = \int_\omega K \cos\vartheta \, d\omega \tag{20}$$

gdzie $\omega$ oznacza kąt bryłowy pod jakim widać powierzchnię $F'$ z elementu $dF$ powierzchni $F$. Dla spolaryzowanego promieniowania po uwzględnieniu zależności (2) i (11) w równaniu (20) można otrzymać wzór:

$$h^*_{F'} = \iiint_{\vartheta\,\varphi\,\nu} (K_\nu + K'_\nu) d^2A \, d\nu \tag{21}$$

Występujące we wzorze (21) wartości składowych monochromatycznej jasności promieniowania $K_\nu$ i $K'_\nu$ zależą od kątów $\vartheta$ i $\varphi$ (rys.1), częstości drgań $\nu$ oraz od sposobu polaryzacji. Dla promieniowania niespolaryzowanego $K_\nu = K'_\nu$ i z równania (21) otrzymuje się:

$$h^*_{F'} = 2 \iiint_{\vartheta\,\varphi\,\nu} K_\nu \, d^2A \, d\nu \tag{22}$$

Dla obliczenia całki we wzorze (22) należy znać dla każdego punktu $P$ powierzchni $F$, na którą pada promieniowa-

nie, zależność monochromatycznej jasności kierunkowej $K_\nu$ od kątów $\vartheta$ i $\varphi$ oraz od częstości drgań $\nu$ :

$$K_{\nu,P} = f_P(\vartheta, \varphi, \nu) \tag{23}$$

Gdy promieniowanie jest niespolaryzowane i równomierne we wszystkich kierunkach, wówczas $K_\nu$ zależy tylko od $\nu$ :

$$K_\nu = f(\nu) \tag{24}$$

a jasność takiego promieniowania można wyrazić następująco:

$$h^*_{F'} = 2\left[\iint_{\vartheta\varphi} d^2A\right]\int_\nu K_\nu \, d\nu \tag{25}$$

Jeżeli ponadto z każdego punktu powierzchni F widać powierzchnię F' pod kątem bryłowym $2\pi$ , wówczas całka podwójna występująca w równaniu (25) ma wartość $\pi$ , a jasność promieniowania wyraża się następująco:

$$h^* = 2\pi \int_\nu K_\nu \, d\nu \tag{26}$$

W tym przypadku w każdym punkcie przestrzeni pomiędzy powierzchniami F i F' jasność promieniowania jest jednakowa.

Wstawiając równanie (3) do (25) otrzymuje się wzór dla dowolnego promieniowania równomiernego:

$$h^*_{F'} = K \iint_{\vartheta\varphi} d^2A \tag{27}$$

lub przez podzielenie stronami równań (25) i (26) przez siebie:

$$h^*_{F'} = \frac{h^*}{\pi} \iint_{\vartheta\varphi} d^2A \tag{28}$$

Dla promieniowania czarnego o danej temperaturze T spektralny podział energii wyraża się wzorem (9). Po wstawieniu tego wzoru do równania (26) otrzymuje się po scałkowaniu:

$$h_c^* = \frac{ac}{4} T^4 = e_c^* \tag{29}$$

Po porównaniu wzorów (29) i (14) wynika, że dla promieniowania powierzchni doskonale czarnej jasność wyraża się tak samo jak emisja własna.

## 2.4. Entropia jasności kierunkowej promieniowania

Entropię $d^3S$ promieniowania zawartego w obrębie kąta przestrzennego $d\omega$ i przechodzącego przez element powierzchni dF w czasie $d\tau$ można obliczyć za pomocą wzoru [9]:

$$d^3S = L \cos\vartheta \, dF \, d\omega \, d\tau \tag{30}$$

gdzie $\vartheta$ oznacza kąt (rys.1) pomiędzy normalną do elementarnej powierzchni dF, a kierunkiem rozważanego kąta $d\omega$. Wielkość L nosi nazwę entropii jasności kierunkowej promieniowania[1] i ma wymiar kJ/m$^2$sec grd srd[2]. Jak wynika ze wzoru (30) entropia jasności kierunkowej promieniowania wyraża ilość entropii przechodzącej w obrębie jednostkowego kąta przestrzennego, przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku promieniowania, w jednostce czasu. Dla promieniowania spolaryzowanego można przedstawić wielkość L następująco [9]:

$$L = \int_{\nu} (L_\nu + L'_\nu) d\nu \tag{31}$$

gdzie

$L_\nu, L'_\nu$ - entropia najmniejszej i największej wartości składowej monochromatycznej jasności promieniowania, zależna od częstości drgań, określona przez odpowiednią wartość $K_\nu$ lub $K'_\nu$ w kJ/grd m$^2$srd.

---

1) Symbol L przyjęto za Planckiem.

2) Jeżeli promieniowanie pochodzi tylko z emisji własnej, wówczas entropia jasności kierunkowej promieniowania jest równa entropii światłości promieniowania.

Dla promieniowania niespolaryzowanego $L_\nu = L'_\nu$ i z równania (31) wynika wzór:

$$L = 2 \int_\nu L_\nu \, d\nu \tag{32}$$

lub

$$L = 2 \int_\lambda L_\lambda \, d\lambda \tag{33}$$

gdzie

$L_\nu$ - entropia monochromatycznej jasności kierunkowej promieniowania prostoliniowo spolaryzowanego, zależna od częstości drgań w $kJ/m^2$grd srd,

$L_\lambda$ - entropia monochromatycznej jasności kierunkowej promieniowania prostoliniowo spolaryzowanego, zależna od długości fali w $kJ/m^3$grd sec srd.

Wielkość $L_\nu$ została określona przez M.Plancka [9] wzorem:

$$L_\nu = \frac{k\nu^2}{c^2}\left[\left(1 + \frac{c^2K_\nu}{h\nu^3}\right)\ln\left(1 + \frac{c^2K_\nu}{h\nu^3}\right) - \frac{c^2K_\nu}{h\nu^3}\ln\frac{c^2K_\nu}{h\nu^3}\right] \tag{34}$$

Uwzględniając we wzorze (34) zależności (5), (6) i (7) otrzymuje się:

$$L_\lambda = \frac{ck}{\lambda^4}\left[\left(1 + \frac{\lambda^5K_\lambda}{c^2h}\right)\ln\left(1 + \frac{\lambda^5K_\lambda}{c^2h}\right) - \frac{\lambda^5K_\lambda}{c^2h}\ln\frac{\lambda^5K_\lambda}{c^2h}\right] \tag{35}$$

## 2.5. Entropia emisji własnej

Entropia emisji własnej $s^*$ $kJ/m^2$grd sec wyraża ilość entropii promieniowania emitowanej przez jednostkową powierzchnię ciała we wszystkich kierunkach półkuli w jednostce czasu:

$$s^* = \int_{\omega=2\pi} \bar{L} \cos\vartheta \, d\omega \tag{36}$$

gdzie $\bar{L}$ $kJ/m^2$sec srd grd oznacza entropię światłości promieniowania emitującej powierzchni.

Dla emisji równomiernej we wszystkich kierunkach wielkość $\bar{L}$ ma wartość stałą i po uwzględnieniu równania (11) w równaniu (36) otrzymuje się:

$$s^* = \bar{L} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \pi \bar{L} \tag{37}$$

W przypadku gdy w punkcie P element powierzchni dF emituje energię tylko w obrębie pewnego kąta przestrzennego $\omega < 2\pi$ i jeżeli emisja ta jest w obrębie tego kąta równomierna, wówczas entropia emisji wyraża się dla punktu P wzorem:

$$s^*_\omega = \bar{L} \iint_{\vartheta\varphi} d^2A \tag{38}$$

Przez podzielenie stronami równań (37) i (38) przez siebie można otrzymać drugą postać wzoru (38):

$$s^*_\omega = \frac{s^*}{\pi} \iint_{\vartheta\varphi} d^2A \tag{39}$$

W celu otrzymania wzoru na entropię równomiernej emisji własnej $s^*_c$ powierzchni doskonale czarnej o temperaturze T należy wstawić zależność (9) do (34) i uwzględnić, że dla powierzchni doskonale czarnej entropia światłości $\bar{L}$ jest równa entropii jasności kierunkowej L. Po przekształceniu otrzymuje się wzór [9]:

$$L_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2 T} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} - \frac{k\nu^2}{c^2} \ln\left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \tag{40}$$

Po wstawieniu równań (32) i (40) do (37) oraz po obliczeniu całki [8] można otrzymać wzór [9]:

$$s^*_c = \frac{8\pi^5 k^4}{45 c^2 h^3} T^3 = \frac{ac}{3} T^3 \tag{41}$$

Podobnie jak w równaniu (15) dla emisji własnej można określić entropię emisji własnej powierzchni doskonale szarej wzorem:

$$s^* = \varepsilon s^*_c = \varepsilon \frac{ac}{3} T^3 \tag{42}$$

## 2.6. Entropia jasności promieniowania

Entropia jasności promieniowania wyraża ilość entropii promieniowania przechodzącego przez jednostkową powierzchnię kontrolną w jednostce czasu. Entropia jasności promieniowania powierzchni określa ilość entropii promieniowania wychodzącego w jednostce czasu z jednostkowej powierzchni.

Całkowitą entropię $J_F^*$ kJ/sec grd jasności promieniowania pochodzącego z pewnej określonej powierzchni $F'$ i docierającego do powierzchni $F$ można wyrazić wzorem:

$$J_F^{*\prime} = \int_F j_F^{*\prime} dF \tag{43}$$

gdzie entropia jasności promieniowania $j_F^{*\prime}$ kJ/m$^2$sec grd padającego na element dF rozważanej powierzchni F wyraża się wzorem:

$$j_F^{*\prime} = \int_\omega L \cos\vartheta \, d\omega \tag{44}$$

W równaniu (44) $\omega$ oznacza kąt bryłowy pod jakim widać powierzchnię $F'$ z elementu dF powierzchni F. Dla spolaryzowanego promieniowania po uwzględnieniu zależności (31) i (11) w równaniu (44) otrzymuje się:

$$j_F^{*\prime} = \int_\vartheta \int_\varphi \int_\nu (L_\nu + L'_\nu) d^2A \, d\nu \tag{45}$$

Występujące we wzprze (45) wartości składowych entropii monochromatycznej jasności kierunkowej promieniowania $L_\nu$ i $L'_\nu$ zależą od kątów $\vartheta$ i $\varphi$ (rys.1) oraz od sposobu polaryzacji. Dla promieniowania niespolaryzowanego $L_\nu = L'_\nu$ i z równania (45) otrzymuje się:

$$j_F^{*\prime} = 2 \int_\vartheta \int_\varphi \int_\nu L_\nu \, d^2A \, d\nu \tag{46}$$

Dla obliczenia całki we wzorze (46) należy znać funkcję (23). Można wówczas posłużyć się równaniem (34).

Jeżeli jasność promieniowania powierzchni $F'$ ma dla wszystkich jej punktów i wszystkich kierunków wartość stałą,

to entropia jasności promieniowania docierającego z powierzchni $F'$ do powierzchni $F$ wyraża się wzorem:

$$j^*_{F'} = 2\left[\iint_{\vartheta\,\varphi} d^2A\right]\int_{\nu} L_\nu \, d\nu \tag{47}$$

Wielkość $L_\nu$ zależy wówczas tylko od częstości drgań $\nu$ i dla wyliczenia jej z równania (34) należy znać funkcję (24).

Dla promieniowania dochodzącego do powierzchni $F$ w obrębie kąta przestrzennego $2\pi$ całka podwójna występująca w równaniu (47) ma wartość $\pi$ i entropia jasności promieniowania wyraża się następująco:

$$j^* = 2\pi \int_{\nu} L_\nu \, d\nu \tag{48}$$

Dla promieniowania równomiernego dochodzącego do punktu $P$ powierzchni $F$ w obrębie kąta przestrzennego $\omega$ można przez wstawienie równania (32) do (47) otrzymać wzór:

$$j^*_\omega = L \iint_{\vartheta\,\varphi} d^2A \tag{49}$$

lub przez podzielenie stronami równań (47) i (48) przez siebie:

$$j^*_\omega = \frac{j^*}{\pi} \iint_{\vartheta\,\varphi} d^2A \tag{50}$$

gdzie

$\vartheta, \varphi$ - współrzędne kierunków zawartych w obrębie kąta przestrzennego $\omega$.

Dla równomiernego promieniowania czarnego o temperaturze $T$ można wstawić równanie (34) i (9) do (48) i po scałkowaniu otrzymuje się:

$$j^*_c = \frac{ac}{3} T^3 = s^*_c \tag{51}$$

Wynika stąd, że dla równomiernego promieniowania czarnego entropia jasności jest równa entropii emisji własnej.

## 2.7. Nieodwracalność emisji i absorpcji

W oparciu o drugą zasadę termodynamiki można wykazać [9] [8], że emisja własna powierzchni o temperaturze T przebiegająca bez równoczesnej absorpcji jest dla temperatur T większych od zera zawsze zjawiskiem nieodwracalnym. Można również wykazać, że absorpcja promieniowania bez równoczesnej emisji nie jest możliwa jeżeli temperatura powierzchni jest większa od bezwzględnego zera.

Równoczesna emisja i absorpcja promieniowania jest odwracalna tylko w przypadku gdy powierzchnie wymieniające ciepło przez promieniowanie mają równe temperatury. Przy wszystkich innych wartościach tych temperatur równoczesna emisja i absorpcja promieniowania jest zjawiskiem nieodwracalnym.

## 3. Wzory na egzergie jasności promieniowania

Można wykazać, że egzergia emisji własnej nie zależy od emisyjności otoczenia [7]. Również daje się sprawdzić [8] oczywiste twierdzenie, że egzergia promieniowania nie zależy od emisyjności i temperatury powierzchni ograniczających układ (jeżeli powierzchnie te nie są składnikami otoczenia).

Wynika stąd, że przy rozpatrywaniu dowolnego promieniowania padającego na pewną powierzchnię, właściwości tej powierzchni są obojętne i nie wpływają na końcowe wyniki obliczenia egzergii. Właściwości te należy więc dobierać tak, aby obliczenie przebiegało jak najprościej. Najdogodniej jest przyjąć, że powierzchnią absorbującą jest otoczenie, dla którego w obrębie kąta bryłowego $\omega$ przyjmuje się $\varepsilon = 1$, a poza tym kątem zakłada się $\varepsilon = 0$.

Dla obliczenia egzergii $b^*_{F'}$ dowolnego promieniowania o jasności $h^*_{F'}$ pochodzącego z powierzchni F i dochodzącego do punktu P powierzchni F, można rozpatrzeć pewien element dF w punkcie P powierzchni F (rys.2). Elementarna powierzchnia dF dzięki źródłu ciepła utrzymuje stałą temperaturę równą temperaturze otoczenia $T_o$. Powierzchnia ta jest doskonale czarna i zdolna do emisji i absorpcji w obrębie kąta przestrzennego $\omega$. Przy uwzględnieniu równania (18) ilość ciepła $q^*$ doprowadzonego do źródła można obliczyć z bilansu energetycznego elementarnej powierzchni odniesionego do jednostki powierzchni:

$$q^* = h^*_{F'} - e^*_{c,o} \frac{1}{\pi} \iint_{\omega} d^2A \qquad (52)$$

gdzie

$e^*_{c,o}$ oznacza emisję własną powierzchni doskonale czarnej o temperaturze otoczenia.

Jak wynika z definicji egzergii, przyrost egzergii źródła ciepła o temperaturze otoczenia jest równy zeru oraz egzergia emisji własnej powierzchni o temperaturze otoczenia jest także równa zeru. Równanie bilansu egzergetycznego [10] wyrażone za pomocą wielkości odniesionych do jednostki powierzchni przyjmuje więc postać:

$$b^*_{F'} = \Delta l^* \tag{53}$$

gdzie

$\Delta l^*$ oznacza stratę egzergii spowodowaną nieodwracalnością równoczesnej emisji i absorpcji promieniowania przebiegającej na rozważanej elementarnej powierzchni dF. Po obliczeniu odpowiedniej sumy przyrostów entropii $\Pi^*$ dla rozpatrywanego układu można stratę egzergii wyrazić za pomocą prawa Gouya-Stodoli [10]:

$$\Delta l^* = \Pi^* T_o = q^* - T_o\left(j^*_{F'} - \frac{s^*_{c,o}}{\pi}\iint_{\omega} d^2A\right) \tag{54}$$

gdzie

$j^*_{F'}$ - entropia jasności promieniowania docierającego do elementarnej powierzchni dF,

$s^*_{c,o}$ - entropia emisji własnej powierzchni doskonale czarnej o temperaturze otoczenia.

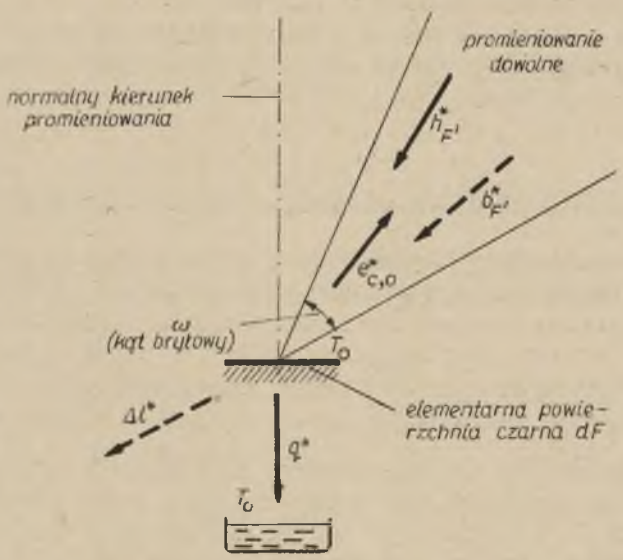
Po wstawieniu wzorów (54), (52), (14) i (41) do (53) otrzymuje się po przekształceniu:

$$b^*_{F'} = \frac{acT_o^4}{12\pi}\iint_{\omega} d^2A + h^*_{F'} - T_o j^*_{F'} \tag{55}$$

Wzór (55) pozwala obliczyć egzergię dowolnego promieniowania docierającego do elementu dF powierzchni F. Należy jednak odpowiednio dla danego promieniowania określić występujące w tym wzorze wielkości $h^*_{F'}$ i $j^*_{F'}$. Całkowitą egzergię dowol-

nego promieniowania docierającego do powierzchni F, a pochodzącego z powierzchni F' można obliczyć ze wzoru:

$$B^*_{F'-F} = \int_F b^*_{F'}\, dF \tag{56}$$




Rys.2. Schemat bilansu energetycznego i egzergetycznego dla dowolnego promieniowania

## 3.1. Egzergia dowolnego promieniowania spolaryzowanego

Egzergię dowolnego promieniowania spolaryzowanego pochodzącego z powierzchni F' i docierającego do punktu P powierzchni F w jednostce czasu i w odniesieniu do jednostki powierzchni absorbującej wyrażoną w $kJ/m^2sec$ można przedstawić wzorem, który otrzymuje się po wstawieniu (21) i (45) do (55):

$$b^*_{F'} = \frac{acT_o^4}{12\pi}\iint_\omega d^2\Lambda + \iiint_{\vartheta\varphi\nu} (K_\nu + K'_\nu)\, d^2A\, d\nu - T_o \iiint_{\vartheta\varphi\nu} (L_\nu + L'_\nu)\, d^2A\, d\nu \tag{57}$$

Przed posłużeniem się wzorem (57) należy dla danego promieniowania określić kąt przestrzenny, pod którym widać powierzchnię $F'$ z punktu P powierzchni F oraz wykonać odpowiednie pomiary, aby ustalić zależność wielkości $K_\nu$ i $K'_\nu$ od kierunku określonego kątami $\vartheta$ i $\varphi$ oraz od częstości drgań $\nu$.

Może się tu okazać przydatna zależność (7) pomiędzy $K_\lambda$ i $K_\nu$. Odpowiednie wartości składowych $L_\nu$ i $L'_\nu$ wyznacza się za pomocą równania (34). Całkowitą egzergię promieniowania docierającego do wszystkich punktów powierzchni F oblicza się ze wzoru (56).

### 3.2. Egzergia dowolnego promieniowania niespolaryzowanego

Wzór na egzergię takiego promieniowania wyrażoną w kJ/m$^2$sec otrzymuje się po wstawianiu (22) i (46) do (55):

$$b^*_{F'} = \frac{acT_o^4}{12\pi} \iint_\omega d^2A + 2\iiint_{\vartheta\varphi\nu} K_\nu d^2A\, d\nu - 2\, T_o \iiint_{\vartheta\varphi\nu} L_\nu d^2A\, d\nu \quad (58)$$

Przed posłużeniem się wzorem (58) należy dla danego promieniowania określić kąt przestrzenny, pod którym widać powierzchnię $F'$ z punktu P powierzchni F oraz w oparciu o odpowiednie pomiary przedstawić postać funkcji wyrażającej zależność wielkości $K_\nu$ od kierunku określonego kątami $\vartheta$ i $\varphi$ oraz od częstości drgań $\nu$.

Można wykorzystać zależności (7), (34) oraz (56).

### 3.3. Egzergia promieniowania niespolaryzowanego i równomiernego

Wzór na egzergię takiego promieniowania wyrażoną w kJ/m kJ/m$^2$sec otrzymuje się po wstawieniu (25) i (47) do (55):

$$b^*_{F'} = \left(\frac{acT_o^4}{12\pi} + 2\int_\nu K_\nu d\nu - 2T_o \int_\nu L_\nu d\nu\right) \iint_\omega d^2A \quad (59)$$

Przed posłużeniem się wzorem (59) należy dla danego promieniowania określić kąt przestrzenny, pod którym widać powierzchnię $F'$ z punktu P powierzchni F oraz w oparciu o odpowiednie pomiary określić spektralny podział energii

promieniowania w zależności od częstości drgań $\nu$ w postaci funkcji (24).

Można wykorzystać zależności (7), (34) oraz (56).

### 3.4. Egzergia promieniowania niespolaryzowanego, równomiernego, rozchodzącego się w obrębie kąta przestrzennego $2\pi$

Wzór na egzergię takiego promieniowania wyrażoną w $kJ/m^2 sec$ otrzymuje się po wstawieniu (26) i (48) do (55):

$$b^* = \frac{ac}{12} T_o^4 + 2\pi \int_\nu K_\nu \, d\nu - 2\pi T_o \int_\nu L_\nu \, d\nu \qquad (60)$$

Przed posłużeniem się wzorem (60) należy dla danego promieniowania wykonać odpowiednie pomiary, aby określić spektralny podział energii w zależności od częstości drgań w postaci funkcji (24).

Można wykorzystać zależności (7) i (34). Całkowitą egzergię promieniowania docierającego do wszystkich punktów powierzchni F oblicza się ze wzoru:

$$B^* = b^* F \qquad (61)$$

### 3.5. Egzergia promieniowania niespolaryzowanego, czarnego, równomiernego, rozchodzącego się w obrębie kąta przestrzennego $2\pi$

Wzór na egzergię takiego promieniowania czarnego o temperaturze T otrzymuje się po wstawieniu (29) i (51) do (55):

$$b_c^* = \frac{ac}{12} (3T^4 + T_o^4 - 4T_o T^3) \qquad (62)$$

Dla posłużenia się wzorem (62) należy jedynie znać temperaturę czarnego promieniowania. Całkowitą egzergię promieniowania docierającego do powierzchni F można obliczyć w oparciu o wzór (61).

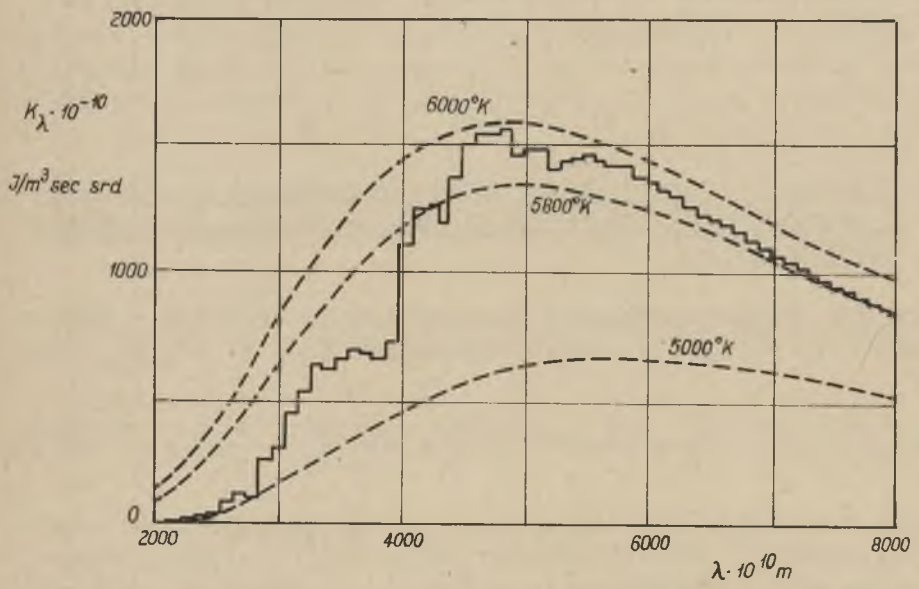
Wzór (62) można również otrzymać przy rozpatrywaniu egzergii emisji własnej powierzchni doskonale szarej [7] dla $\varepsilon = 1$. Wynika stąd, że egzergia promieniowania czarnego równa jest egzergii emisji własnej powierzchni doskonale

czarnej. Jest to następstwem tego, że jasność promieniowania ciała doskonale czarnego jest równa emisji własnej.

## 4. Przykłady obliczania egzergii promieniowania

### 4.1. Egzergia niespolaryzowanego, równomiernego promieniowania słonecznego

Obliczenie egzergii promieniowania słonecznego można przeprowadzić w oparciu o spektralny podział energii określony na podstawie pomiarów. Jeżeli więc promieniowanie słoneczne będzie się uważać za niespolaryzowane i równomierne, wówczas można na podstawie tablicy 76 [4] określić monochromatyczną jasność kierunkową promieniowania słonecznego $K_\lambda$ docierającego do najwyższej warstwy atmosfery w zależności od długości fali $\lambda$. Część widma przedstawiono na rysunku 3.




Rys.3. Spektralny podział energii promieniowania słonecznego docierającego do najwyższej warstwy atmosfery

Tabela 1

Spektralny podział energii promieniowania słonecznego ponad atmosferą

| $\lambda \cdot 10^{10}$ m | $K_\lambda \cdot 10^{-10}$ $\frac{J}{m^3 sec\ srd}$ | $\nu \cdot 10^{-11}$ $\frac{1}{sec}$ | $K_\nu \cdot 10^{12}$ $\frac{J}{m^2 srd}$ | $\Delta\lambda \cdot 10^{10}$ m | $\Delta\nu \cdot 10^{-12}$ $\frac{1}{sec}$ | $K_\nu \cdot \Delta\nu$ $\frac{J}{m^2 sec\ srd}$ | $L_\nu \cdot 10^{13}$ $\frac{J}{m^2 grd\ srd}$ | $L_\nu \cdot \Delta\nu$ $\frac{J}{m^2 grd\ sec\ srd}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2200 | 10 | 13627 | 15 | 100 | 62,0 | 960 | 0,03 | 0,205 |
| 2300 | 26 | 13035 | 47 | 100 | 56,7 | 2650 | 0,10 | 0,540 |
| 2400 | 31 | 12492 | 59 | 100 | 52,1 | 3090 | 0,12 | 0,639 |
| . . . . . | | | | | | | | |
| 60000 | 1 | 500 | 1765 | 10000 | 0,714 | 1260 | 7,19 | 0,514 |
| 70000 | 1 | 428 | 1201 | 10000 | 0,535 | 640 | 5,48 | 0,293 |
| Razem | | | | | | 10079300 | | 2263,306 |

Linie kreskowane oznaczają spektralny podział energii promieniowania powierzchni doskonale czarnej. Liczbowe wartości $K_\lambda$ ujęto w tabeli 1 [8]. W tabeli tej zestawiono również odpowiednie wartości częstości drgań $\nu$ oraz monochromatycznej jasności kierunkowej promieniowania $K_\nu$ w zależności od częstości drgań.

Dla obliczenia egzergii promieniowania słonecznego docierającego do Ziemi można posłużyć się wzorem (59). Przy stałej wartości $K_\nu$ w przedziale częstości drgań $\Delta\nu$ oraz przy wynikającej stąd stałej wartości $L_\nu$ w tym przedziale, występujące w równaniu (59) całki można zastąpić sumą odpowiednich iloczynów. Otrzymuje się wówczas wzór:

$$b_F^{*\prime} = 2\left(\frac{acT_o^4}{24\pi} + \sum K_\nu \Delta\nu - T_o \sum L_\nu \Delta\nu\right) \iint d^2A \quad (63)$$

gdzie z danych geometrycznych wynika, że [8]:

$$\iint_\omega d^2A = \pi \,.\, 2{,}16.10^{-5} \quad (64)$$

Określając na podstawie tabeli 1 sumy iloczynów $\sum K_\nu \Delta\nu$ i $\sum L_\nu \Delta\nu$ oraz wykorzystując (64) otrzymuje się dla temperatury otoczenia $T_o = 300^oK$ następującą wartość egzergii promieniowania słonecznego:

$$b_F^{*\prime} = 2\pi \,.\, 2{,}16.10^{-5}\left(\frac{7{,}561.10^{-19}.2{,}998.10^8.300^4}{24\pi} + 10079{,}3 + \right.$$

$$\left. - 300.2{,}2633\right) = 0{,}0033 + 1{,}3707 - 0{,}0923 =$$

$$= 1{,}2817 \text{ kJ/m}^2\text{sec} \quad (65)$$

Jest to wielkość odniesiona do 1 $m^2$ powierzchni prostopadłej do promieniowania Słońca. Stosunek egzergii promieniowania do jego jasności $b_F^{*\prime}/h_F^{*\prime} = 1{,}2817/1{,}3707 = 0{,}9351$.

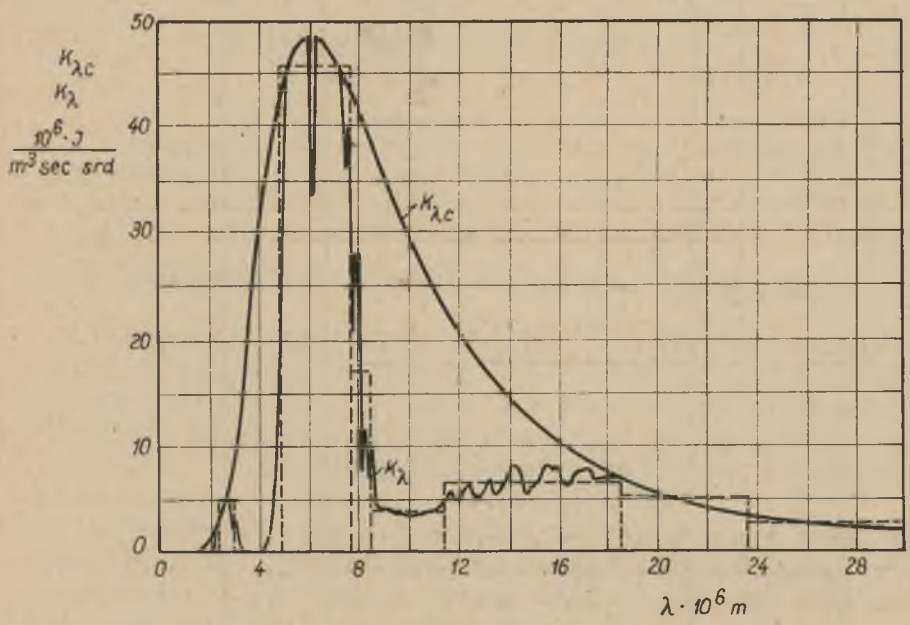
Docierające do powierzchni Ziemi promieniowanie słoneczne ma egzergię mniejszą niż obliczona wartość. Osłabienie promieniowania słonecznego przez atmosferę następuje na skutek wielu czynników jak na przykład na skutek występowania w

atmosferze ozonu, dwutlenku węgla i pary wodnej. Również spektralny podział energii promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni Ziemi jest zmienny i zależy na przykład od składu chemicznego atmosfery, od wysokości Słońca itp.

## 4.2. Egzergia promieniowania pary wodnej

Na rysunku 4 przedstawiono monochromatyczną jasność kierunkową promieniowania $K_\lambda$ w zależności od długości fali $\lambda$, dla warstwy pary wodnej o równoważnej grubości 1,04 m przy temperaturze 200°C [3]. Iloczyn równoważnej grubości i ciśnienia cząstkowego dla tej pary wynosi 104 cm ata. Linia $K_{\lambda c}$ jest izotermą dla 200°C według prawa Plancka wyrażonego równaniem (8).

Dla przybliżonych obliczeń można zamiast powierzchni pod krzywą $K_\lambda$ rozważać pola prostokątów oznaczonych na rysunku 4




Rys.4. Promieniowanie warstwy pary wodnej o grubości 1,04 m przy temperaturze 200°C i ciśnieniu 1 ata.

Tabela 2

Promieniowanie warstwy pary wodnej o grubości 1,04 m
przy temperaturze 200°C i ciśnieniu 1 ata

| $\lambda \cdot 10^6$ m | $\Delta\lambda \cdot 10^6$ m | $K_\lambda \cdot 10^{-6}$ $\frac{J}{m^3 sec\ srd}$ | $K_\lambda \Delta\lambda$ $\frac{J}{m^2 sec\ srd}$ | $L_\lambda \cdot 10^{-4}$ $\frac{J}{m^3 sec\ grd\ srd}$ | $L_\lambda \Delta\lambda$ $\frac{J}{m^2 sec\ grd\ srd}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,69 | 0,66 | 5,0 | 3,3 | 1,07 | 0,0071 |
| 6,15 | 2,8 | 45,7 | 128,0 | 11,72 | 0,3282 |
| 7,95 | 0,8 | 17,2 | 13,8 | 5,41 | 0,0433 |
| 9,8 | 2,9 | 3,7 | 10,7 | 1,56 | 0,0452 |
| 14,8 | 7,1 | 6,4 | 45,4 | 2,38 | 0,1690 |
| 21,0 | 5,3 | 5,1 | 27,0 | 1,83 | 0,0970 |
| 26,8 | 6,3 | 2,2 | 13,9 | 0,78 | ,0491 |
| Razem | | | 242,1 | | 0,7389 |

linią kreskowaną. Pola te można traktować jak paski absorpcyjne o szerokości $\Delta\lambda$ rozciągające się symetrycznie po obu stronach fali $\lambda$, której długość jest podana w tabeli 2.

Egzergię promieniowania docierającego do 1 $m^2$ ściany można obliczyć ze wzoru (60), który należy przedtem wyrazić w zależności od długości fali. Występujące we wzorze całki można zastąpić sumą odpowiednich iloczynów:

$$b^* = \frac{ac}{12} T_o^4 + 2\pi \sum K_\lambda \Delta\lambda - 2\pi T_o \sum L_\lambda \Delta\lambda \qquad (66)$$

Dla temperatury otoczenia $T_o = 300^oK$ otrzymuje się wówczas:

$$b^* = \frac{7.561.10^{-19}.2.998.10^8}{12} 300^4 +$$

$$+ 2\pi .0,2421 - 2\pi .300.0,7389.10^{-3} = 0,153 + 1,521 -$$

$$- 1,393 = 0,281 \ kJ/m^2sec \qquad (67)$$

Stosunek egzergii promieniowania pary wodnej do jej emisji własnej $b^*/e^* = 0,281/1,521 = 0,185$.

## 4.3. Możliwości zastosowania pojęcia egzergii promieniowania

Wzory wyprowadzone w niniejszej pracy mogą znaleźć zastosowanie przy ocenie odwracalności i sprawności wszelkich procesów energetycznych, w których uczestniczy promieniowanie cieplne. Przede wszystkim należy wymienić możliwość racjonalnej oceny sprawności urządzeń energetycznych wykorzystujących energię promieniowania słonecznego.

Obliczanie egzergii promieniowania może być także pomocne przy badaniu systemów ogrzewania działających przez promieniowanie. Bilans egzergetyczny takich urządzeń jest podstawą ich racjonalnej oceny wyrażonej za pomocą sprawności egzergetycznej.

Z całkowitej straty egzergii spowodowanej przez zjawisko nieodwracalnej wymiany ciepła na przykład w piecach przemysłowych można za pomocą wyprowadzonych wzorów wyodrębnić tę

część strat egzergii, która spowodowana jest przez nieodwracalność zjawisk absorpcji i emisji promieniowania.

Pojęciem egzergii promieniowania można również posłużyć się przy badaniu procesów biochemicznych zachodzących w roślinach. Procesy te odbywają się dzięki egzergii dostarczanej przez promieniowanie. Polegają one na przetwarzaniu pewnych substancji zewnętrznych (z gleby i z powietrza) na pewne substancje wewnętrzne (materiał roślinny). Przy określonej wartości egzergii promieniowania docierającego do rośliny możliwa jest pewna maksymalna wydajność procesu przetwarzania pod warunkiem, że roślina ma dostarczone potrzebne do procesu substancje zewnętrzne w dostatecznej koncentracji. Posługując się pojęciem egzergii promieniowania można ocenić sprawność procesów zachodzących w roślinach i określić koncentrację substancji zewnętrznych niezbędną do właściwego przebiegu tych procesów. Jednak rozpatrywanie bilansu egzergetycznego procesów biochemicznych zachodzących w roślinach będzie możliwe wówczas, gdy będą znane wartości entropii substancji powstających w tych procesach.

Pojęcie egzergii promieniowania może być również użyte przy rozpatrywaniu sprawności silników fotonowych.

Praca wpłynęła do redakcji 20.I.1962 r.

## LITERATURA

[1] E. G u g g e n h e i m - Thermodynamics, 1957.

[2] M. J a c o b - Heat Transfer, cz.I, 1958.

[3] M. J a c o b - Heat Transfer, cz.II, 1957.

[4] K. K o n d r a t i e w - Łuczistaja energija sołnca, 1954.

[5] S. O c h e d u s z k o - Teoria maszyn cieplnych, cz.III, 1955.

[6] S. O c h ę d u s z k o, H. G ó r n i a k - Układ MKS jednostek miar - Energetyka Przemysłowa 1959, nr 9.

[7] R. P e t e l a - Egzergia emisji własnej ciała doskonale szarego - Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka z.5.

[8] R. P e t e l a - Rozprawa doktorska - Egzergia promieniowania cieplnego - Katedra Energetyki Cieplnej Politechniki Śląskiej.

[9] M. P l a n c k - Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 1923.

[10] J. S z a r g u t - Bilans egzergetyczny procesów cieplnych - Energetyka Przemysłowa 1961, nr 3.

## ЭКСЕРГИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### Резюме

При помощи эксергетического баланса элементарной поверхности выведено формулы для эксергии произвольного температурного излучения. Для поверхности с температурой окружающей среды принято эксергию эмиссии равную нулю. В примерных расчетах указан способ применения выведенных формул.

## THE EXERGY OF HEAT RADIATION

### Summary

The exergy (available energy) is determining a maximum ability of a matter for doing work in a given environment. The idea of exergy is nowadays more and more being widespread. The author introduced this notion into the field of radiation. In this paper formulae for the exergy of an arbitrary heat radiation were derived by means of the exergy balance of a differential surface. For the surface of environment temperature it was assumed that exergy of emission equals zero. A way of using derived formulae is shown in the computation examples.