ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 58 Energetyka z.9 1962

TADEUSZ BES

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

PIERWIASTEK ZESPOLONY W RÓWNANIACH TRÓJGRUPOWYCH DOTYCZĄCYCH REAKTORÓW JĄDROWYCH

Streszczenie. Praca zawiera analizę funkcji strumienia neutronów w reaktorze. Rozpatrzony w niej rozkład strumienia dotyczy przypadku, gdy równanie krytyczne, wynikłe z podziału widma neutronów na trzy grupy, zawiera oprócz pierwiastka rzeczywistego także pierwiastki zespolone. Jako przykład zamieszczony został w zakończeniu wykres strumienia neutronów w reaktorze uranowo-wodnym o geometrii pierścieniowej.

Ważniejsze oznaczenia

B - parametr reaktora,

D - współczynnik dyfuzji,

k - współczynnik rozmnażania w środowisku nieskończenie rozległym,

L - długość dyfuzji,

Φ - strumień neutronów,

Σ - makroskopowy przekrój czynny,

τ - symboliczny wiek Fermiego,

indeksy: a - absorpcja,
s - spowalnianie,
f - szybki,
r - pośredni,
t - termiczny.

Zasadniczym celem obliczeń fizycznych reaktora jądrowego jest ustalenie jego wymiarów krytycznych. Ogólne i ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia jest niemożliwe ze względu na trudności matematyczne. Dlatego też w praktycznych obliczeniach stosuje się zazwyczaj pewne uproszczenia. Polegają one na założeniu monoenergetyczności widma neutronów w pewnych przedziałach energii, w odniesieniu do których stosuje się metodę przybliżenia dyfuzyjnego.

Dla przypadku, gdy spowalnianie neutronów odbywa się w środowiskach nie zawierających atomów wodoru, przyjęcie dwóch grup neutronów jest na ogół wystarczającym przybliżeniem, z którego wyznaczyć można wymiary krytyczne reaktora. Jeżeli natomiast rolę moderatora spełnia woda lub inna substancja zawierająca wodór, to podział widma neutronów tylko na dwie grupy staje się niewystarczający. Czynnikiem decydującym są tutaj właściwości spowalniające wodoru w przedziale energii z jakim ma się do czynienia w reaktorze jądrowym. Przy dużych energiach (od 10 keV do 10 MeV) przekrój czynny wodoru na rozpraszanie silnie maleje. Efekt ten jest przyczyną znacznej ucieczki neutronów prędkich z reaktora podczas ich spowalniania. Stanowi to niemal zawsze największą pozycję strat w bilansie neutronów reaktora wodnego.

Aby uwzględnić ten wpływ zastosowano następujące postępowanie. Podzielono całkowitą liczbę neutronów w rdzeniu i w reflektorze na trzy grupy, zakładając przy tym, że każda z nich zawiera neutrony o takiej samej energii. Grupy te zostały nazwane podług zakresu energii jakim odpowiadają (grupa szybka, pośrednia i termiczna). Dla każdej z tych grup ułożono równanie bilansu neutronów, które celem uproszczenia odniesiono do stanu ustalonego w czasie.

Jeżeli dodatkowo uwzględni się efekt rozszczepienia atomów uranu U235 neutronami pochodzącymi z grupy pośredniej, to równania bilnasu zapisane w formie analitycznej mają postać:

$$- D_f \Delta \Phi_f + \Sigma_{sf} \Phi_f = \frac{k_t}{p} \Sigma_{at} \Phi_t + k_r \Sigma_{ar} \Phi_r \qquad (1)^{*)}$$

*) Założono, że wychwyt neutronów rezonansowych jest punktowy ze względu na energię i występuje na granicy pomiędzy grupą rezonansową i termiczną.

$$- D_r \Delta \Phi_r + (\Sigma_{sr} + \Sigma_{ar}) \Phi_r = \Sigma_{sf} \Phi_f \tag{2}$$

$$- D_t \Delta \Phi_t + \Sigma_{at} \Phi_t = \Sigma_{sr}\, p \Phi_r \tag{3}$$

Wprowadzając do układu równań (1), (2) i (3) zależności na wiek Fermiego i kwadrat długości dyfuzji:

$$\left.\begin{aligned} \tau_f &= \frac{D_f}{\Sigma_{sf}} \\ \tau_r &= \frac{D_r}{\Sigma_{sr}} \end{aligned}\right\} \text{(a)} \quad \text{oraz} \quad \left.\begin{aligned} L_r^2 &= \frac{D_r}{\Sigma_{ar}} \\ L_t^2 &= \frac{D_t}{\Sigma_{at}} \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

można je ująć w następującej formie:

$$- \Delta \Phi_f + \frac{\Phi_f}{\tau_f} = \frac{k_t}{p} \cdot \frac{D_t}{D_f} \cdot \frac{\Phi_t}{L_t^2} + k_r \frac{D_r}{D_f} \frac{\Phi_r}{L_r^2} \tag{1a}$$

$$- \Delta \Phi_r + \left(\frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{L_r^2}\right) \Phi_r = \frac{D_f}{D_r} \frac{\Phi_f}{\tau_f} \tag{2a}$$

$$- \Delta \Phi_t + \frac{\Phi_t}{L_t^2} = \frac{D_r}{D_t} \frac{p \cdot \Phi_r}{\tau_r} \tag{3a}$$

W celu uproszczenia zapisu wprowadzono w równaniu (2a) wiek zastępczy zdefiniowany wzorem:

$$\tau_z = \frac{\tau_r L_r^2}{\tau_r + L_r^2} \tag{c}$$

Każda z funkcji Φ_t, Φ_r i Φ_f występująca w układzie równań (1a), (2a) i (3a) powinna spełniać w ośrodku mnożącym równanie falowe:

$$\Delta\Phi_i + B^2\Phi_i = 0 \qquad \text{(d)}$$

Zatem po wstawieniu wartości $-B^2$ w miejsce operatora Laplace'a otrzymuje się układ trzech równań liniowych ze względu na Φ_i $(i = f, r, t)$, którego wszystkie wolne wyrazy równe są zeru. Aby taki układ równań posiadał rozwiązania $\Phi \neq 0$, wyznacznik charakterystyczny powinien być równy zeru:

$$\begin{vmatrix} 1 + L_t^2 B^2 & -p\dfrac{D_r}{D_t}\dfrac{L_t^2}{\tau_r} & 0 \\ 0 & 1 + \tau_z B^2 & -\dfrac{D_f}{D_r}\dfrac{\tau_z}{\tau_f} \\ -\dfrac{k_t}{p}\dfrac{D_t}{D_f}\dfrac{\tau_f}{L_t^2} & -k_r\dfrac{D_r}{D_f}\dfrac{\tau_f}{L_r^2} & 1 + \tau_f B^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Funkcja powstała z rozpisania wyznacznika jest spotykana w literaturze pod nazwą krytycznego równania reaktora. Dokonując odpowiednich przekształceń w rozwinięciu, sprowadza się równanie krytyczne do postaci następującej:

$$\frac{k_s\dfrac{\tau_z}{\tau_r} + k_r\dfrac{\tau_z}{L_r^2}(1 + L_t^2 B^2)}{(1 + \tau_f B^2)(1 + \tau_z B^2)(1 + L_t^2 B^2)} = 1 \qquad (5)$$

Równanie (5) jest stopnia trzeciego ze względu na B^2 i jako takie w ogólnym przypadku ma trzy pierwiastki. Analizując dalej tę zależność pod kątem widzenia warunków fizycznych, należy uwzględnić, że jeden z pierwiastków musi znajdować się w przedziale od 0,0 ÷ 0,03 i że wszystkie współczynniki przy B^2 są dodatnie. Wynika stąd, że dwa dalsze pierwiastki mają wartość mniejszą od zera lub są liczbami zespolonymi sprzężonymi.

W dalszym ciągu, ze względu na większą złożoność problemu rozpatrzono tylko rozwiązanie zawierające pierwiastki zespolone sprzężone.

Przyjmuje się następujące oznaczenie pierwiastków równania (5):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$
$$\varepsilon_2 = -a + b\,i \qquad \text{(e)}$$
$$\varepsilon_3 = -a - b\,i$$

Jeżeli X, Y i Z oznaczają odpowiednie rozwiązania jednorodnych części równań (1a), (2a) i (3a), to ogólne rozwiązania są liniowymi kombinacjami tych funkcji, co można zapisać analitycznie w następującej postaci:

$$\Phi_f = A'X + B'Y + C'Z \qquad (6)$$

$$\Phi_r = A\,X + B\,Y + C\,Z \qquad (7)$$

$$\Phi_t = A''X + B''Y + C''Z \qquad (8)$$

Związek jaki występuje pomiędzy stałymi (A', A" i A), (B', B" i B) oraz (C', C" i C) można łatwo ustalić wprowadzając współczynniki sprzężenia $S_{A'}$, $S_{A''}$, $S_{B'}$ itd., które uzyskuje się przez podstawienie w zależnościach (1a), (2a) i (3a), w miejsce operatora Laplace'a pierwiastków równania krytycznego (5).

Podstawiając więc za $-B^2$ wartość ε_1 otrzymuje się współczynniki sprzężenia $S_{A'}$ i $S_{A''}$, które są liczbami rzeczywistymi, natomiast pierwiastkom ε_2 i ε_3 odpowiadają stałe $S_{B'}$, $S_{B''}$, $S_{C'}$ i $S_{C''}$ stanowiące pary liczb zespolonych sprzężonych. Właściwość tę można zapisać wprowadzając dodatkowe oznaczenia:

$$\left.\begin{array}{lll} S_{A'} = u & S_{B'} = s + iq & S_{C'} = s - iq \\ S_{A''} = w & S_{B''} = t + ip & S_{C''} = t - ip \end{array}\right\} \qquad \text{(f)}$$

W dalszym ciągu należy ustalić zależności jakie występują pomiędzy rozwiązaniami jednorodnych części równań układu (1a), (2a) oraz (3a), tj. między X, Y i Z.

Funkcja X ze względu na wartość pierwiastka ε jakiemu odpowiada, jest niezależna od pozostałych, tzn. Y i Z. W celu znalezienia związku występującego pomiędzy Y a Z, należy wziąć pod uwagę równania różniczkowe, których rozwiązaniami są te funkcje:

$$\Delta Y + (-a + bi)\, Y = 0 \tag{9}$$

$$\Delta Z + (-a - bi)\, Z = 0 \tag{10}$$

W ogólnym przypadku wynik otrzymuje się w postaci zespolonej. Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\left.\begin{aligned} Y &= T + Ui \\ Z &= P + Si \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

i po podstawieniu (g) do zależności (9) i (10) otrzymuje się:

$$(\Delta T - a\,T - b\,U) + i(\Delta U + b\,T - a\,U) = 0 \tag{9a}$$

oraz

$$(\Delta P - a\,P + b\,S) + i(\Delta S - b\,P - a\,S) = 0 \tag{10a}$$

Z powyższego zapisu wynika, że funkcje T i P są równe tożsamościowo $T \equiv P$, a U i S różnią się tylko znakiem. Tak więc:

$$\left.\begin{aligned} Y &= T + U\,i \\ Z &= T - U\,i \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

i rozwiązanie układu równań (9) oraz (10) z parametrem sprzężonym jest także sprzężone. Własność ta, jak to wynika z dalszych rozważań, zezwala na odpowiedni dobór stałych w układzie równań (6), (7) i (8), w ten sposób, aby ostateczne rozwiązanie było funkcją rzeczywistą.

Po podstawieniu zależności (h) i (f) do rozwiązań (6), (7) i (8) uzyskamy te ostatnie w postaci następującej:

$$\Phi_f = u A X + (s + iq) B(T + Ui) + (s - iq) C(T - Ui) \quad (6a)$$

$$\Phi_r = A X + B(T + Ui) + C(T - Ui) \quad (7a)$$

$$\Phi_t = w Y X + (t + ip) B(T + Ui) + (t - ip) C(T - Ui) \quad (8a)$$

Wprowadzając do układu równań (6a), (7a) i (8a) dodatkowe stałe, związane z poprzednimi zależnościami

$$B = \frac{G - i H}{2}$$

$$C = \frac{G + i H}{2} \quad (i)$$

jako wynik ostateczny otrzymuje się:

$$\Phi_f = u A X + G(s T - qU) + H(q T + s U) \quad (6b)$$

$$\Phi_r = A X + G T + H U \quad (7b)$$

$$\Phi_t = w A X + G(t T - p U) + H(p T + t U) \quad (8b)$$

Dalsza analiza rozwiązania z uwzględnieniem warunków brzegowych, ciągłości strumienia i prądu, ze względu na prostotę nie wymaga objaśnień.

Równania bilansu neutronów dla reflektora mają analogiczną postać jak dla rdzenia, z tym, że nie występują tu człony uwzględniające rozmnożenie neutronów. W dalszym ciągu wielkości odnoszące się do reflektora oznaczono dla odróżnienia gwiazdką:

$$- D^*_f \Delta \Phi^*_f + \Sigma^*_{sf} \Phi^*_f = 0 \quad (11)$$

$$- D^*_r \Delta \Phi^*_r + \Sigma^*_{sr} \Phi^*_r = \Sigma^*_{sf} \Phi^*_f \tag{12}$$

$$- D^*_t \Delta \Phi^*_t + \Sigma^*_{as} \Phi^*_s = \Sigma^*_{sr} \Phi^*_r \tag{13}$$

Jeżeli zamiast $\frac{D^*}{\Sigma^*_s}$ podstawi się wiek Fermiego τ^* oraz zamiast $\frac{D^*_s}{\Sigma^*_{as}}$ wprowadzi się L^{*2}_t, to równania (11), (12), (13) można zapisać w postaci dogodniejszej do dalszych rozważań:

$$- \Delta \Phi^*_f + \frac{\Phi^*_f}{\tau^*_f} = 0 \tag{11a}$$

$$- \Delta \Phi^*_r + \frac{\Phi^*_r}{\tau^*_r} = \frac{D^*_f}{D^*_r} \frac{\Phi^*_f}{\tau^*_f} \tag{12a}$$

$$- \Delta \Phi^*_t + \frac{\Phi^*_t}{L^{*2}_t} = \frac{D^*_r}{D^*_t} \frac{\Phi^*_r}{\tau^*_r} \tag{13a}$$

Oznaczając rozwiązania jednorodnych części równań różniczkowych dla reflektora przez X^*, Y^*, Z^*, uzyskuje się tworząc liniowe kombinacje tych funkcji, rozwiązania niejednorodne:

$$\Phi^*_f = L X^* + M' Y^* + N' Z^* \tag{14}$$

$$\Phi^*_r = L' X^* + M Y^* + N'' Z^* \tag{15}$$

$$\Phi^*_t = L'' X^* + M'' Y^* + N Z^* \tag{16}$$

Jeżeli w równaniu (5) podstawi się $k_s = k_r = 0$, to na wynik otrzymuje się równanie krytyczne dla reflektora. Pierwiastkami tego równania są wartości

$$B_1^{*2} = -\frac{1}{\tau_f^*}; \qquad B_2^{*2} = -\frac{1}{\tau_r^*}; \qquad B_3^{*2} = -\frac{1}{L_t^{*2}} \quad (j)$$

Pierwszy pierwiastek figuruje w jednorodnej części równania (11a), zatem zależność pomiędzy L', L'' i L ustala się wstawiając zamiast symbolu Δ wielkość $\frac{1}{\tau_f^*}$ do równania (12a) i (13a)

$$-\frac{1}{\tau_f^*} L' X^* + \frac{1}{\tau_r^*} L' X^* = \frac{D_f^*}{D_r^*} \frac{L X^*}{\tau_f^*} \qquad (17)$$

Stąd

$$L' = S' L$$

gdzie $$S' = \frac{D_f^*}{D_r^*} \frac{\tau_r^*}{\tau_f^* - \tau_r^*} \qquad (k)$$

i analogicznie

$$L'' = S'' L' = S' S'' L$$

gdzie $$S'' = \frac{D_r^* \tau_f^*}{D_t^* \tau_r^*} \frac{L_t^{*2}}{\tau_f^* - L_t^{*2}} \qquad (l)$$

Podobnie przeprowadza się przeliczenia dla drugiego pierwiastka występującego w jednorodnej części równania dla grupy pośredniej. Jeżeli wartość $\frac{1}{\tau_r^*}$ podstawi się kolejno do równań (12a) i (13a) (zrobienie tego w równaniu 11a prowadziłoby do sprzeczności, gdyż Φ_f^* jest w ogólnym przypadku różne od zera), to na wynik otrzymuje się związki:

$$\frac{D_f^*}{D_r^* \tau_f^*} M' Y^* = 0 \qquad (19)$$

stąd $M' = 0$ ze względu na $Y^* \neq 0$; oraz

$$-\frac{1}{\tau_r^*} M'' Y^* + \frac{1}{L_t^{*2}} M'' Y^* = \frac{D_r^*}{D_t^* \tau_r^*} MY^* \tag{20}$$

zatem $M'' = S''' M$, gdzie

$$S''' = \frac{D_r^*}{D_t^*} \frac{L_t^{*2}}{\tau_r^* - L_t^{*2}} \tag{m}$$

Postępując analogicznie z trzecim pierwiastkiem $\Delta = \frac{1}{L_t^{*2}}$ otrzymuje się wartości na N' i N'':

$$\frac{D_r^*}{D_t^* \tau_r^*} N'' Z^* = 0 \tag{21}$$

co przy $Z^* \neq 0$ daje $N'' = N' = 0$. (n)

Tak więc równiania (14), (15) i (16) mają postać następującą:

$$\Phi_f^* = L X^* \tag{14a}$$

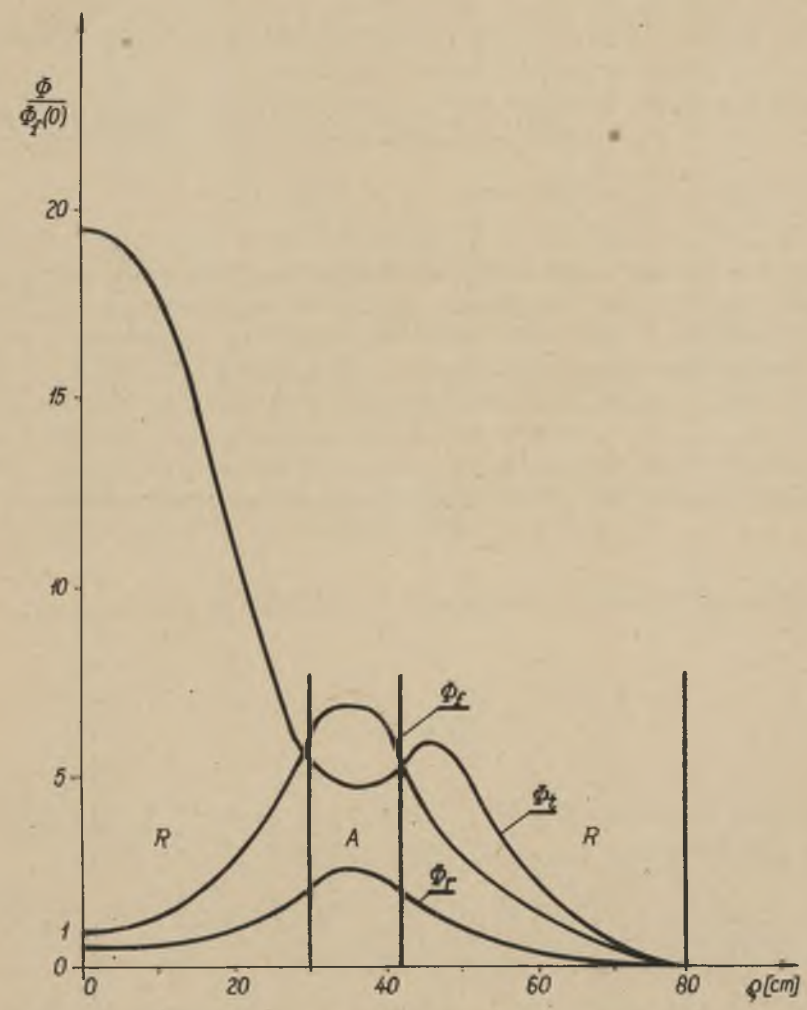
$$\Phi_r^* = S' L X^* + MY^* \tag{15a}$$

$$\Phi_t^* = S'S'' L X^* + M S''' Y^* + N Z^* \tag{16a}$$

Stałe całkowania występujące we wzorach (6b), (7b), (8b) (14a), (15a) i (16a) określających strumienie neutronów w reaktorze, wyznacza się z warunku ciągłości strumienia i prądu neutronów na granicy pomiędzy rdzeniem i reflektorem. Te same warunki służą także do określenia wymiarów krytycznych reaktora.

Po tych wyprowadzeniach można podać przykład rozkładu strumienia neutronów w rdzeniu i w reflektorze.

Obliczenia dotyczą reaktora uranowo-wodnego o geometrii pierścieniowej. Reflektor wewnętrzny i zewnętrzny stanowią bloki grafitowe. Rolę moderatora i czynnika chłodzącego speł-



Rys.1. Promieniowa zależność strumienia neutronów w reaktorze: R - reflektor, A - rdzeń; Φ_f - strumień neutronów szybkich, Φ_r - strumień neutronów pośrednich, Φ_t - strumień neutronów termicznych

nia jednocześnie woda. Paliwem są płyty zawierające związek uranu wzbogaconego do 20% w U235. W oparciu o te założenia przeprowadzone zostały obliczenia wielkości pomocniczych występujących w równaniach (5), (11a), (12a) i (13a).

Wyniki obliczeń:

$k_t = 1{,}610$; $k_r = 1{,}690$; $\tau_f = 52{,}9\ cm^2$; $\tau_r = 6{,}7\ cm^2$;

$\tau_f^* = 181\ cm^2$; $\tau_r^* = 132\ cm^2$; $L_t^2 = 11{,}5\ cm^2$; $L_r^2 = 86{,}9\ cm^2$;

$L_t^{*2} = 2500\ cm^2$; $D_f = 1{,}21\ cm$; $D_r = 0{,}866\ cm$; $D_t = 0{,}417\ cm$;

$D_f^* = 1{,}10\ cm$; $D_r^* = 1{,}02\ cm$; $D_t^* = 1{,}02\ cm$.

Powyższe wielkości określają własności materiałowe rdzenia i reflektora. W celu ustalenia wymiarów krytycznych i wykreślenie rozkładu strumieni neutronów należy skorzystać z podanej poprzednio metody obliczeń. Końcowym rezultatem tych obliczeń jest wykres promieniowej zależności strumienia - rys.1.

Na zakończenie chcę wyrazić podziękowanie doktorowi Cyrylowi Dąbrowskiemu za cenne uwagi przy opracowaniu tematu.

Praca wpłynęła do redakcji 10.III.1962 r.

LITERATURA

[1] A. Radkowsky, S. Krasik - Referat na Konferencję Genewską 1955 P/604.

[2] S. Glasstone, M.C. Edlund - "Podstawy teorii reaktorów jądrowych" (tłum.) PWN, 1957.

[3] A.D. Gałanin - "Tieorija jadiernych reaktorow na tiepłowych niejtronach" 2 izd. Atomizdat., Moskwa, 1959.

КОМПЛЕКСНЫЙ КОРЕНЬ В ТРЕХГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЯХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Резюме

Работа содержит анализ функции потока нейтронов в реакторе. Рассмотренное в нее расположение потока касается случая, когда критическое уравнение, которое возникло из распределения спектра нейтронов на три группы, содержит кроме действительного корня, даже комплексные корни. В качестве примера приведено в заключении график потока нейтронов в урановодяном реакторе с кольцевой геометрией.

THREE GROUP EQUATION COMPLEX ROOT REGARDING NUCLEAR REACTORS

Summary

The paper contains the analysis of the function the neutron flux in the nuclear reactors. The disposition of neutron flux examined here regards the case when the critical equation contains real and complex roots (this equation is the consequence of division of neutron spectrum into three groups). As an example the diagram of neutron fluxes in uranio-water reactor, made of centrical annulus, is given.