ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996

Seria: ELEKTRYKA z. 155 Nr kol. 1328

Piotr WACH
Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

PROJEKTOWANIE I ANALIZA UZWOJEŃ UŁAMKOWYCH MASZYN PRĄDU PRZEMIENNEGO

Streszczenie. Praca przedstawia zalgorytmizowaną metodę projektowania ułamkowych maszyn prądu przemiennego zarówno dwu-, jak i jednowarstwowych. Formalne związki pozwalają zaprojektować uzwojenia o małej i ułamkowej liczbie żłobków na biegun i fazę, a następnie dokonać w prosty sposób analizy wytwarzanego przez nie przepływu. Przedstawiona teoria stanowi dobrą podstawę do optymalizacji uzwojeń ułamkowych.

DESIGN AND ANALYSIS OF FRACTIONAL SLOT WINDINGS OF AC MACHINES

Summary. The paper presents an algorithmic method of designing fractional slot windings for AC machines, both of double and single layer type. The presented formulae allow to design windings with a small number of slots per pole and phase, and then to analyse its MMF harmonic spectra in a simple way. This theory is a good base for optimization of fractional slot windings.

1. WPROWADZENIE

Nazwa „uzwojenia ułamkowe" pochodzi od podstawowej liczby charakteryzującej budowę pasma fazowego maszyny prądu przemiennego - liczby żłobków przypadających na biegun i fazę w maszynie

$$q = \frac{Q_s}{2mp} \quad . \tag{1}$$

Gdy liczba q jest całkowita, uzwojenia takie nazywają się całkowite i są stosunkowo łatwe w konstruowaniu w tym sensie, że pod każdym biegunem znajdują się grupy, z których każda złożona z q połączonych zezwojów należy do kolejnej fazy. Tak więc w pasmie fazo-

wym uzwojenia całkowitego 3-fazowego każdy biegun tego uzwojenia jest utworzony przez boki zezwojów zajmujących *3q* kolejnych żłobków. Pod następnymi biegunami sytuacja się powtarza, z tym że kierunki włączenia grupy zezwojów w pasmo (nawinięcia) danej fazy są przeciwne. Dla uzwojenia całkowitego okresem powtarzalności jest więc obszar obejmujący parę biegunów uzwojenia. Dzięki tej właściwości najniższa harmoniczna przepływu wytwarzanego przez uzwojenia całkowite jest równa liczbie par biegunów $\rho = p$, a poprawnie zaprojektowane i nieuszkodzone uzwojenie wytwarza przepływ, którego spektrum obejmuje tylko harmoniczne o numerach będących nieparzystymi wielokrotnościami liczby par biegunów:

$$\rho = (2k - 1)p \qquad k=1,2,... \tag{2}$$

Wymienione cechy symetrii, łatwość konstruowania oraz bardzo przerzedzone spektrum wytwarzanych harmonicznych przepływu stanowią zasadnicze zalety uzwojeń całkowitych. Natomiast ich wadą jest to, że dla określonej liczby par biegunów liczba żłobków w stojanie musi być wielokrotnością 3mp, to znaczy 6p dla uzwojeń trójfazowych, co stanowi nieraz kłopotliwe ograniczenie.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE PROJEKTOWANIA UZWOJEŃ UŁAMKOWYCH

Natomiast uzwojenia ułamkowe charakteryzują się tym, że iloraz q (1) jest ułamkiem. Dla uzwojeń 3- fazowych można go zapisać w następującej postaci:

$$q = \frac{Q_s}{6p} = I + \frac{b}{d} = \frac{t}{d}\ , \tag{3}$$

gdzie: t, d - są odpowiednio licznikiem i mianownikiem skróconego ułamka niewłaściwego,

I - część całkowita liczby q.

Aby zachować symetrię uzwojeń, liczba żłobków stojana musi być podzielna przez liczbę m pasm fazowych (najczęściej 3), natomiast nie jest podzielna przez liczbę biegunów $2p$ - stąd ułamek w postaci (3):

$$\begin{aligned} Q_s &= k\,m \\ Q_s &\neq l\,2p \end{aligned} \quad ;\ k, l = 1,2... \tag{4}$$

Ułamkowy wynik średni w zakresie całego uzwojenia, dany liczbą (4), jest praktycznie uzyskiwany poprzez stosowanie grup składających się z różnej liczby zezwojów, a więc na przykład z grup o I oraz $I+1$ zezwojach, tak aby był spełniony ułamek określony liczbą q. Uzwojenia ułamkowe są więc złożone z grup o niejednakowej liczbie zezwojów i grupy te muszą, dla zachowania symetrii, być odpowiednio równomiernie rozmieszczone na obwodzie

maszyny. Występują więc tutaj powtarzające się fragmenty uzwojeń, należące do różnych pasm fazowych, obejmujące grupy o różnej liczbie zezwojów.

Takie powtarzające się fragmenty uzwojenia, niewspółmierne z liczbą biegunów, charakterystyczne dla uzwojeń ułamkowych nazywamy **segmentem uzwojenia** lub **nawiasem**. Te segmenty będą bezpośrednio służyły w projektowaniu pasm fazowych uzwojeń ułamkowych i przy określaniu ich właściwości. Stanowią one wraz z opracowaną metodologią istotę proponowanej metody, która pozwala w sposób mnemotechniczny projektować uzwojenia ułamkowe spełniające różne trudne wymagania, a więc przede wszystkim posiadające dużą liczbę par biegunów przy stosunkowo małej liczbie żłobków dla danego uzwojenia.

Aby w sposób systematyczny zaprezentować omawianą metodę oraz nadać jej cechy ogólności, które pozwolą stosunkowo łatwo objąć nią zarówno uzwojenia dwuwarstwowe, jak i jednowarstwowe, jako wielkość wyjściową przyjmijmy zamiast liczby żłobków Q_s, liczbę zezwojów Q_c na biegun i fazę:

$$v = \frac{Q_c}{6p} = \frac{u}{h} \quad . \tag{5}$$

W powyższej zależności liczby naturalne u, h stanowią odpowiednio licznik i mianownik skróconego ułamka wynikającego z ilorazu (5). Związki pomiędzy liczbą q, określającą liczbę żłobków przypadających na biegun i fazę uzwojenia, a ilorazem określającym liczbę v są jasne. W przypadku uzwojeń dwuwarstwowych $Q_s = Q_c$ i dlatego także równe są obie liczby charakteryzujące uzwojenia: $q = v$.

Stąd jednakowa jest ich reprezentacja w postaci skróconych ułamków niewłaściwych

$$t = u \;\; ; \;\; d = h \; . \tag{6}$$

Natomiast dla uzwojeń jednowarstwowych liczba zezwojów jest o połowę mniejsza od liczby żłobków, z czego wynika konieczność stosowania parzystej liczby żłobków w tym przypadku. Skutkiem tego zachodzi również: $v = 1/2\ q$, a **uzwojenia jednowarstwowe z mianownikiem $h = 2$ nie są ułamkowe**.

Oczywiście warunek symetrii (4) ulega także zmianie, bo odnosi się do podzielności całkowitej liczby zezwojów przez liczbę faz uzwojenia:

$$Q_c = k\,m \, . \tag{7}$$

Skład pojedynczego segmentu uzwojenia ułamkowego jest przedstawiony w postaci nawiasu zawierającego liczby naturalne, które oznaczają liczbę zezwojów w poszczególnych kolejno występujących grupach. Budowa nawiasu reprezentującego k-ty segment uzwojeń jest następująca:

$$\left(a_{(k-1)h+1}, a_{(k-1)h+2}, \ldots \quad \ldots, a_{kh-1}, a_{kh}\right) = \left(s_k\right) , \tag{8}$$

a_i - oznacza tutaj liczbę zezwojów występujących w i - tej grupie segmentu,

h - jest liczbą grup występujących w segmencie, jest to jednocześnie mianownik ułamka (5),

(s_k) - symbolizuje k - ty segment uzwojeń.

Natomiast suma zezwojów uzwojeń fazowych składających się na jeden segment w postaci (8) jest równa liczbie u, będącej licznikiem ułamka (5):

$$a_{(k-1)h+1} + a_{(k-1)h+2} + \ldots \quad \ldots + a_{kh-1} + a_{kh} = u \,. \tag{9}$$

Powyższe zapisy wynikają z interpretacji ułamka (5), którego licznik oznacza po skróceniu najmniejszą liczbę zezwojów u przypadających na całkowitą krotność liczby biegunów i faz h.

Całe m-fazowe uzwojenie składa się z w segmentów w postaci (8):

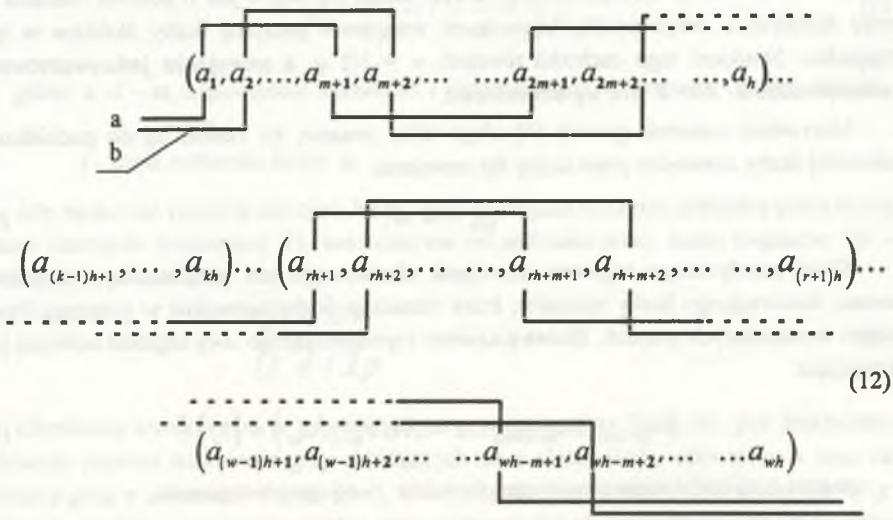
$$(s_1)(s_2)\ldots \quad \ldots(s_k)\ldots \quad \ldots(s_w) \,. \tag{10}$$

Poszczególne segmenty są sobie równe, co wynika z faktu, że stanowią powtarzalne fragmenty uzwojeń maszyny. Rozróżnienie segmentów w postaci ciągu $(s_1)\ldots \ldots(s_w)$ jest potrzebne ze względu na to, że w poszczególnych segmentach inne elementy (grupy) są przypisane danemu pasmu fazowemu. Można to jeszcze przedstawić inaczej: segmenty w postaci nawiasów (s_k) są wszystkie jednakowe, ale przypisanie poszczególnych elementów (grup) pasmom fazowym następuje w różny sposób. Stąd wynika potrzeba zindywidualizowania indeksów oznaczających ciąg elementów tego schematu.

Liczba segmentów w musi być taka, aby całkowita liczba zezwojów była równa Q_c, stąd:

$$w = \frac{Q_z}{u} \,. \tag{11}$$

Budowa m pasm fazowych, na bazie struktury uzwojenia przdstawionego w postaci nawiasów (10), może być ujęta w formie następującego schematu:



(12)

A więc każde pasmo zawiera kolejno elementy, to znaczy grupy zezwojów, odległe od siebie o m pozycji, natomiast kierunek włączenia zezwoju w ciąg pasma jest w tej metodzie zapisu uzwojenia rozróżniony poprzez kierunek przechodzenia linii symbolizującej ciąg pasma przez pozycję elementu. Umownie przechodzenie tej linii od dołu oznacza grupę włączoną do obiegu pasma w sposób określony jako dodatni, a od góry jako ujemny, co będzie odpowiadało znakom + lub − w macierzy więzów (24).

W związku z przedstawieniem całego uzwojenia w postaci ciągu segmentów (10) i bardziej szczegółowo (12) , należy sformułować warunki konieczne do zapewnienia symetrii uzwojenia:

1° Łączna liczba grup segmentów (elementów w nawiasach) w całym uzwojeniu o m pasmach musi być podzielna przez liczbę faz m, to oznacza:

$$w\,h = m\,k \quad ; \quad k = 1,2\ldots$$

2° Liczba h elementów (grup) w pojedynczym segmencie i liczba faz m muszą być względnie pierwsze:

$$NWD(h,m) = 1. \tag{13}$$

Powyższy warunek symetrii pasm fazowych wynika stąd, że dane pasmo przechodząc przez kolejne segmenty, musi zawrzeć w sobie wszystkie elementy pojedynczego nawiasu występujące na h pozycjach. Jest to konieczne, ponieważ dany segment (nawias) nie rozpada się już na mniejsze fragmenty. W ogólności przecież, każdy element segmentu może być reprezentowany przez inną liczbę naturalną, to znaczy składać się z grup o innej liczności zezwojów. Formalnie oznacza to, że:

$$k\,m\,/\,(\mathrm{mod}\,h) = 0,1,2,\ldots,h-1\ , \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,h\ ,$$

a to oznacza dalej, że liczby h i m są względnie pierwsze.

Z 1° i 2° $\Rightarrow w = k\,m$, co oznacza, że liczba nawiasów w musi być podzielna przez liczbę faz. Należy przyjąć, że w łańcuchu segmentów może nastąpić powtarzalność większych fragmentów uzwojenia złożonych z kilku segmentów. Chodzi tu oczywiście o powtarzalność zawierającą w sobie przypisanie poszczególnych elementów (grup) do pasm fazowych uzwojenia. W pokazanym schemacie (12) pierwsze powtórzenie następuje po r-tym segmencie. Ponieważ z liczbą r będzie się wiązało praktyczne zagadnienie możliwości tworzenia gałęzi równoległych uzwojenia oraz wyznaczenia numeru najniższej harmonicznej przepływu wytwarzanego przez to uzwojenie, to istotne jest pytanie o wartość liczby r. Jak wynika ze schematu (12), liczba r może być wyliczona jako najmniejsza liczba naturalna spełniająca równanie:

$$r\,h\,/\,(\mathrm{mod}\,2m) = 0\ ,$$

czyli:

$$r = \frac{2\,m\,i}{h} \qquad \begin{cases} r \text{ - liczba całkowita} \\ i = \min\{1,2,3,\ldots\} \end{cases} \tag{14}$$

Ponieważ zgodnie ze wzorem (13) h i m są względnie pierwsze, dlatego:

$$r = \frac{2m}{NWD(2m, h)} .$$

Stąd dla: h parzystego $r = m$,
h nieparzystego $r = 2m$. (15)

Bardzo istotny, z punktu widzenia spektrum wytwarzanych harmonicznych przepływu, jest iloraz w/r, który określa, ile powtórzeń fragmentu o r nawiasach zawiera całe uzwojenie. Na podstawie (5) i (15) można stwierdzić, że iloraz ten jest równy

$$\frac{w}{r} = \frac{Q_c}{u} \frac{NWD(2m, h)}{2m}, \text{ czyli } \frac{w}{r} = \frac{p}{h / NWD(2m, h)} . \tag{16}$$

Iloraz ten określa najniższą harmoniczną przepływu wytwarzaną przez uzwojenia ułamkowe i pokazuje, że jest ona podzielnikiem liczby par biegunów p. Występuje więc tak zwana „podharmoniczna", ale jest to oczywiście podharmoniczna w odniesieniu do harmonicznej podstawowej $\rho = p$, a nie w odniesieniu do pierwszej harmonicznej przepływu $\rho = 1$. Oznaczmy ją jako

$$p' = \frac{w}{r} . \tag{17}$$

Na podstawie wzorów (16) i (17) można więc określić rząd najniższej harmonicznej przepływu wytwarzanej przez uzwojenia ułamkowe:

dla h parzystego: $p' = \frac{2p}{h}$,

dla h nieparzystego: $p' = \frac{p}{h}$. (18)

Ponieważ liczby m i h są względnie pierwsze, to odnośnie do spektrum harmonicznych przepływu można wyciągnąć dalsze wnioski. Badając cechę symetrii budowy pasma fazowego, obok (14) rozpatrzmy powtarzalność pasma dla połowy jego rozpiętości, to znaczy:

$$\tilde{r}\, h / (\mathrm{mod}\, m) = 0 . \tag{19}$$

Jego rozwiązanie: $\tilde{r} = \frac{m}{NWD(m, h)}$, wobec braku wspólnych podzielników m i h, daje wynik:

$$\tilde{r} = m , \tag{20}$$

zarówno dla h parzystego jak i nieparzystego.

Porównując to z rezultatami (15) można stwierdzić, że dla h nieparzystego pasmo posiada cechę antysymetrii w obrębie fragmentu uzwojenia obejmującego r segmentów. Oznacza to, że dla h nieparzystego

$$a_i = -a_{i+\frac{rh}{2}}$$

lub

$$a_i = -a_{i+mh} \,. \tag{21}$$

Natomiast dla h będącego liczbą parzystą, wobec faktu, że $r = m$ oraz $\tilde{r} = m$, antysymetria nie zachodzi, jak również nie może zachodzić względem elementu wewnętrznego w segmencie, gdyż ich liczba jest parzysta. W wyniku tych rozważań można określić spektrum przepływu generowanego przez uzwojenia ułamkowe następującymi zależnościami:

dla h będącego liczbą nieparzystą

$$\rho = (2k-1)p' \quad ; \quad p' = \frac{p}{h}$$

a dla h parzystego (22)

$$\rho = k\,p' \quad ; \quad p' = \frac{2p}{h} \quad ; \quad k = 1,2,\ldots$$

Rezultat ten jest istotny, ponieważ pozwala z góry określić składowe harmoniczne przepływu wytwarzanego przez uzwojenia ułamkowe. Liczbę p' określoną w relacji (22) nazywamy zredukowaną liczbą par biegunów.

Powróćmy teraz do analizy pojedynczego segmentu reprezentowanego przez nawias w postaci (8). Jego budowa wymagana ze względu na symetrię całego m-fazowego uzwojenia ograniczona jest przez dwa warunki. Liczba elementów nawiasu, to znaczy grup zezwojów musi wynosić h, a suma zezwojów w tych grupach, zgodnie z zależnością (9), wynosi u. Obie te liczby naturalne u, h są opisane wzorem (5) i objaśnione wcześniej. Natomiast poza warunkami symetrii, które traktujemy jako konieczne, powstaje pytanie: jak jest korzystnie rozdzielić u zezwojów na h grup tworzących segment wiedząc, że grupy nie mogą być równe - jak to ma miejsce w uzwojeniach całkowitych. Przez analogię do uzwojeń całkowitych i opierając się na intuicji można przyjąć, że korzystne jest możliwie równomierne rozłożenie grup zezwojów. Zagadnienie to zostanie rozważone bliżej w pracy [7]. Na obecnym etapie można przyjąć, że uzwojenie składa się z grup o dwóch licznościach zezwojów: I oraz $I+1$:

$$\left(\underbrace{I, I, \ldots \quad \ldots, I}_{a \text{ razy}}, \underbrace{e, e, \ldots \quad \ldots, e}_{b \text{ razy}} \right) \tag{23}$$

$$a + b = h \quad ; \quad e = I + 1 \quad ; \quad a\,I + b\,e = u \,.$$

Nawias w postaci (23) jest określony z dokładnością do istotnie różniących się przestawień elementów I, e. Liczba tych operacji odpowiada liczbie permutacji z przestawieniami tych elementów; są one w ramach nawiasu traktowane jako cykliczne. Wynika to stąd, że kolejny nawias jest zbudowany tak jak poprzedni i przesunięcia nawiasów zachowujące warunek (23) odpowiadają jedynie zmianie początku uzwojenia.

3. TWORZENIE MACIERZY WIĘZÓW I ANALIZA UZWOJENIA

Schematy typu (12) służą bezpośrednio do tworzenia macierzy więzów $\mathbf{C}$, jak i schematu konstrukcyjnego uzwojenia. Macierz więzów [4] zawiera zapis związków pomiędzy zezwojami a pasmami fazowymi uzwojenia. Liczba wierszy odpowiada liczbie pasm fazowych, a liczba kolumn liczbie żłobków uzwojenia. Elementy macierzy ze zbioru {1,-1,0} oznaczają występowanie danego zezwoju w składzie odpowiedniego pasma wraz z kierunkiem nawinięcia, a właściwie kierunkiem włączenia w obieg pasma. Dla uzwojeń 3-fazowych macierz więzów posiada trzy wiersze odpowiadające pasmom fazowym oraz Q_z kolumn, które odpowiadają zezwojom. W macierzy tej każdy niezerowy element odpowiada zezwojowi i umownie przyjmujemy, że podaje on położenie boku zezwoju znajdującego się w górnej warstwie. Dolny bok zezwoju znajduje się oczywiście w odległości poskoku Y_Q i nie jest zaznaczany w macierzy, a formalnie wpływa tylko na współczynnik skrótu. Macierz więzów ma więc następującą budowę:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ a \\ -b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & & \dots & Q_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & & & \dots & \dots & 0 \\ & & -1 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & & 1 \quad 1 & \dots \quad \dots & \dots & -1 \end{bmatrix} \end{array} . \tag{24}$$

Można dowieść [7], że przy tworzeniu macierzy więzów na podstawie schematu (12), pasma o numerach parzystych muszą mieć obieg pasmowy odwrócony, co odpowiada zamianie początków i końców tych uzwojeń. Zostało to zaznaczone w macierzy więzów (24) jako $-b$. Przedstawiona macierz więzów dotyczy uzwojeń dwuwarstwowych. Dla **uzwojeń jednowarstwowych** modyfikacja polega na umieszczaniu w macierzy **obu boków** zezwojów, co jest dość użyteczne, jako że uzwojenia takie są trudniejsze w konstruowaniu, a zapis obu boków w macierzy pozwala uniknąć błędów.

Tworzenie gałęzi równoległych dla uzwojeń ułamkowych przebiega na takich samych zasadach jak dla uzwojeń całkowitych, przy czym rolę pary biegunów p odgrywa zredukowana para biegunów p' (22).

Tak więc maksymalna możliwa do uzyskania liczba gałęzi równoległych wynosi:

- dla $h(d)$ będącego liczbą parzystą: $a_p = p'$,
- dla $h(d)$ będącego liczbą nieparzystą: $a_n = 2p'$. (25)

Do analizy własności uzwojeń opisanych macierzą więzów korzystnie jest stosować wektor struktury zezwojowej uzwojeń, który w przypadku zezwojów o jednakowej liczbie zwojów ma postać:

$$\widehat{\mathrm{w}}^{p} = \left[e^{jp\alpha_1} \quad e^{jp\alpha_2} \quad \dots \quad e^{jp\alpha_k} \quad \dots \quad e^{jp\alpha_{Q_z}} \right] \tag{26}$$

gdzie: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{Q_s}$ oznaczają kąty określające osie poszczególnych zezwojów, lub w przypadku uzwojeń o jednakowych zezwojach mogą to być kąty określające położenia na przykład lewych boków zezwojów.

Przyjmijmy także, oczywiste z praktycznego punktu widzenia, założenie, że żłobki są wykonane w równych odstępach kątowych

$$\tau_s = \frac{2\pi}{Q_s}, \tag{27}$$

wtedy:

$$\widehat{\mathbf{w}}^{\rho} = \left[1 \quad e^{j\rho\tau_s} \quad \ldots \quad e^{j\rho(k-1)\tau_s} \quad \ldots \quad e^{j\rho(Q_s-1)\tau_s}\right]. \tag{28}$$

Wektor struktury zezwojowej posiada następujące istotne właściwości:

$$\widehat{\mathbf{w}}^{(Q_s \pm \rho)} = \widehat{\mathbf{w}}^{\pm\rho} \Rightarrow \widehat{\mathbf{w}}^{(Q_s+\rho)} = \widehat{\mathbf{w}}^{\rho} \quad \text{oraz} \quad \widehat{\mathbf{w}}^{(Q_s-\rho)} = \widetilde{\mathbf{w}}^{\rho},$$

a także

$$\widehat{\mathbf{w}}^{\left(\frac{Q_s}{2}+a\right)} = \widetilde{\mathbf{w}}^{\left(\frac{Q_s}{2}-a\right)}. \tag{29}$$

Liczba a nie we wszystkich przypadkach należy do zbioru harmonicznych, a nawet wspólnie z $Q_s/2$ może być liczbą ułamkową. Tworząc iloczyn

$$\widehat{\mathbf{a}}_i^{\rho} = \mathbf{C}\left(\widehat{\mathbf{w}}^{\rho}\right)^T, \tag{30}$$

lub w formie rozwiniętej, przedstawionej tu dla układu 3-fazowego uzwojeń i Q_s-zezwojów tworzących ten układ:

$$\begin{array}{l} \textit{faza}\ \mathrm{a} \\ \textit{faza}\ \mathrm{b} \\ \textit{faza}\ \mathrm{c} \end{array} \begin{bmatrix} a_1^{\rho} e^{j\phi_1^{\rho}} \\ a_2^{\rho} e^{j\phi_2^{\rho}} \\ a_3^{\rho} e^{j\phi_3^{\rho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \ldots & & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 & 1 \ \ldots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\rho\alpha_1} \\ e^{j\rho\alpha_2} \\ \vdots \\ e^{j\rho Q_s} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

uzyskuje się możliwość łatwej analizy własności uzwojenia. Rezultatem mnożeń macierzowych jest macierz kolumnowa (31). Jej elementy zawierają liczby rzeczywiste $a_1^{\rho}, a_2^{\rho}, a_3^{\rho}$, proporcjonalne do amplitud przepływu faz a,b,c ρ-tej harmonicznej oraz argumenty $\phi_1^{\rho}, \phi_2^{\rho}, \phi_3^{\rho}$ określające położenie przestrzenne wektora przepływu harmonicznego danej fazy. Wielkości te pozwalają określić wielkość oraz symetrię przepływu wytwarzanego przez uzwojenie fazy zarówno pod względem amplitudy, jak i położenia przestrzennego. Wielkości a_i^{ρ} pozwalają także na obliczenie współczynnika grupy uzwojenia w następujący sposób:

$$k_g^\rho = \frac{3a^\rho}{Q_s} \quad . \tag{32}$$

Współczynnik grupy jest właściwie znormalizowaną wielkością a^ρ, a normalizacja następuje przez podzielenie jej przez liczbę zezwojów przypadających na pasmo fazowe.

Współczynnik grupy w postaci (32) wyraża w sposób względny moduł amplitudy przepływu grupy zezwojów rozłożonych w kolejnych żłobkach w stosunku do amplitudy przepływu, która byłaby wytworzona przez takie same zezwoje skupione. Wynika z niego wartość bezwzględna w stosunku do tradycyjnego wzoru okreslającego współczynnik grupy w postaci ilorazu funkcji sinusoidalnych.

Do oceny amplitudy wytwarzanej składowej harmonicznej przepływu należy jeszcze włączyć współczynnik skrótu i numer tej harmonicznej. W wyniku otrzymuje się wyrażenie (33), które w relatywny sposób przedstawia wielkość proporcjonalną do przepływu ρ-tej harmonicznej:

$$\widetilde{\theta}_i^\rho = \frac{p}{\rho} k_g^\rho k_p^\rho e^{j\varphi_i^\rho} . \tag{33}$$

Wyrażenie (33) zawiera także hiperbolicznie malejący czynnik p/ρ, który wynika z rozkładu na szereg Fouriera prostokątnej funkcji przepływu pojedynczego zezwoju znormalizowany, tak aby dla harmonicznej podstawowej był równy jedności.

W przypadku **uzwojeń jednowarstwowych** wektor struktury zezwojowej (26,28) zawiera kąty położenia poszczególnych żłobków stojana maszyny, a sumowanie (30,31) następuje po bokach zezwojów i zawiera już w sobie efekt skrótu. Dlatego wyrażenie (32), określające dla uzwojeń dwuwarstwowych współczynnik grupy, stanowi obecnie dla uzwojeń jednowarstwowych współczynnik uzwojenia:

$$k_u^\rho = \frac{3a^\rho}{Q_s} \quad \text{oraz} \quad \widetilde{\theta}_i^\rho = \frac{p}{\rho} k_u^\rho e^{j\varphi_i^\rho} . \tag{34}$$

Przedstawiony sposób zapisu budowy uzwojeń jednowarstwowych poprzez ujęcie w macierzy więzów obu boków zezwojów, poza ułatwieniem kontroli tego zapisu, ma jeszcze jedną zasadniczą zaletę. Nie zależy bowiem od rodzaju budowy uzwojenia jednowarstwowego. Nie ma w tym przypadku znaczenia, czy uzwojenie to jest **uzwojeniem grupowym** i ma różne rozpiętości zezwojów, a za to wspólną oś ich przestrzennego położenia, czy też jest uzwojeniem o **jednakowych zezwojach**, czy też uzwojeniem **koszykowym**. W każdym przypadku sumowanie „po bokach" zezwojów ujmuje cechy indywidualne tych zezwojów.

4. PRZYKŁAD

Przykład ten dotyczy przypadku, gdy liczba d, będąca w mianowniku skróconego ułamka niewłaściwego q (3), jest liczbą parzystą. Dane podstawowe projektowanego uzwojenia są następujące:

$$Q_s = 30\,, \qquad p = 4\,, \qquad m = 3\,.$$

Liczba żłobków na biegun i fazę wynosi w tym przypadku:

$$q = \frac{Q_s}{6p} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4} = \frac{t}{d}\,.$$

Wobec tego pojedynczy nawias (8) reprezentujący powtarzalny segment uzwojenia ma postać:

$$(2, 1, 1, 1).$$

Suma zezwojów takiego segmentu jest równa $t = 5$, a liczba grup zezwojów, z których się składa, wynosi $d = 4$. Liczba segmentów w powyższej postaci, z których składa się całe uzwojenie, jest równa:

$$w = \frac{Q_s}{t} = 6\,.$$

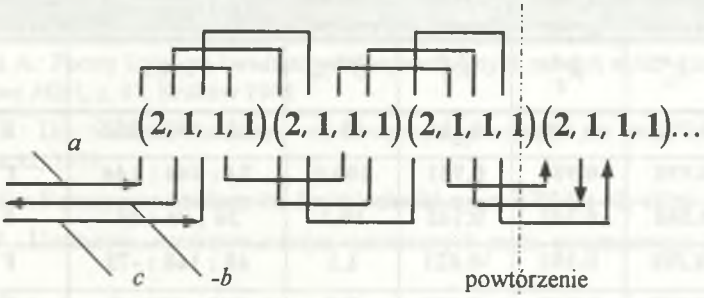
Zredukowana liczba par biegunów dla d parzystego zgodnie z (22) wynosi

$$p' = \frac{2p}{d} = \frac{8}{4} = 2\,.$$

Na podstawie wzorów (22) można także przewidzieć spodziewane spektrum składowych harmonicznych przepływu:

$$\rho = k\,p' = 2k = 2,4,6,\ldots$$

Po wyliczeniach tych parametrów uzwojenia można już utworzyć podstawowy schemat uzwojenia opierając się na wzorcu (12):



(35)

Schemat uzwojenia (35) przedstawia tylko połowę uzwojenia, jako że ze względu na $p' = 2$ następuje pełne powtórzenie narysowanej części. Schemat ten dla uzwojeń dwuwarstwowych pozwala już na utworzenie macierzy więzów, ponieważ zawiera ona tylko jeden (górny bok) każdego zezwoju.

Najpierw zostanie jednak określony poskok zezwoju, co, poza wykonaniem pełnego schematu uzwojenia, pozwoli na obliczanie współczynników skrótu

$$Y = \frac{Q_s}{2p} = \frac{30}{8} = 3.75 \text{ , stąd przyjęto } Y_Q = 4.$$

Macierz więzów, w związku z powtarzalnością wynikającą z $p' = 2$, składa się także z dwóch identycznych części, dlatego zostanie przedstawiona z piętnastoma kolumnami oznaczonymi podwójną numeracją, która dotyczy obu połówek uzwojenia.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathbf{C} = \begin{array}{c} a \\ -b \\ c \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & -1 & & & & 1 & & & & -1 & & \\ & & -1 & & & 1 & 1 & & & -1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & -1 & & & 1 & 1 & & & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Poskok żłobkowy (27) wynosi $\tau_s = 12^\circ$, stąd wektor struktury zezwojowej uzwojeń (28) ma postać:

$$\bar{\mathbf{w}}^{\rho} = \left[1 \quad e^{j\rho 12^\circ} \quad e^{j\rho 24^\circ} \ldots \quad \ldots e^{j\rho 348^\circ}\right].$$

Wykonanie iloczynu wektorowego (31) i obliczenia na podstawie zależności (32) współczynników grupy oraz współczynników skrótu pozwalają na wyznaczenie ze wzoru (33) względnych wartości amplitud przepływu pasm fazowych i położenia kątowego osi tych przepływów. Wyniki tej analizy są zestawione w tabeli:

Uzwojenie dwuwarstwowe: $Q_s = 30$; $p = 4$; $m = 3$

Numer harm. przepł.	Współczynnik skrótu	Współczynnik grupy	Współczynnik uzwoj.	Względ. wartość przepł.	Położenie osi przepływów	Składowe symetr.
ρ	k_s^{ρ}	k_g^{ρ}	k_u^{ρ}	θ^{ρ} %	$\phi_{a,-b,c}$	
2	0.743	0.149	0.111	23.3	12 ; 132 ; 252	Γ^-
4	0.995	0.957	0.951	100.0	24 ; 264 ; 144	Γ^+
6	0.588	0.247	0.145	10.2	36 ; 36 ; 36	0
8	-0.208	0.102	-0.021	1.1	48 ; 168 ; -72	Γ^-
10	-0.867	0.200	-0.173	7.3	240 ; 120 ; 0	Γ^+
12	-0.951	0.647	-0.616	21.6	72 ; 72 ; 72	0
14	-0.407	0.109	-0.045	1.3	84 ; 204 ; -36	Γ^-
16	0.407	0.109	0.145	1.2	-84 ; 156 ; 36	Γ^+
18	0.951	0.647	0.616	14.4	-72 ; -72 ; -72	0

W tabeli można też zaobserwować symetrię wyników względem liczby $a = Q_s/2$, a oś symetrii zaznaczono w tabeli podwójną grubą linią.

5. UWAGI KOŃCOWE

Uzwojenia ułamkowe są stosowane nie tylko w małych maszynach, ale także w wolnobieżnych maszynach dużej mocy. Ponadto ich stosowanie pozwala na ograniczenie oprzyrządowania technologicznego do wykonania blach stojanów maszyn. Do pełniejszego wykorzystania takich możliwości potrzebne jest jednak lepsze rozwiązanie szeregu problemów związanych z usuwaniem ich wad, to znaczy:

- optymalizacja uzwojeń pod względem widma i amplitud harmonicznych przepływu,
- ograniczenie momentów pasożytniczych,
- pełniejsze rozeznanie i ocena sił promieniowych,
- redukcja drgań i hałasu.

Problemy te, nie uwzględnione w artykule ze względu na na jego zakres, są w znacznym stopniu rozważane w pracy [7].

LITERATURA

1. Heiles F.: Wiklungen elektrischer Maschinen .Springer Verlag 1953.
2. Hickiewicz J., Łukaniszyn M., Szymaniec s., Wach P.: On reducing the vibrations and noise level of induction motors with integral and fractional slot windings. Archiv für Elektrotechnik 73 (1990), 163-171, Springer Verlag.
3. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Momenty pasożytnicze w indukcyjnych silnikach klatkowych. Polskie Tow. Elektr. Teoret. i Stosowanej, Warszawa-Gliwice 1993.
4. Puchała A.: Formy liniowe i kwadratowe niesymetrycznych maszyn elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH, z .87, Kraków 1964.
5. Punga F.: Die Nutenharmonischen von Drehstromgeneratoren mit Bruchlochwiklungen. ETZ Bd 52, 1931.
6. Rasch: Ein Beitrag zum Studium der Bruchlochwiklungen. ETZ Bd 47, 1926.
7. Wach P.: Uzwojenia ułamkowe maszyn elektrycznych prądu przemiennego (w przygotowaniu).
8. Zawiślak J.: Uzwojenia zmiennobiegunowe maszyn elektrycznych prądu przemiennego. Prace Naukowe Inst. Układów Elektromaszynowych, 37, seria: Monografie, z. 7, Politechnika Wrocławska 1986.

Recenzent: Dr hab. inż. Krzysztof Kluszczyński, prof. Politechniki Śląskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia: 15 marca 1996 r.

Abstract

The essence of the paper is a 'parentheses method' of designing the fractional slot windings, stated in (12). A single parenthesis (8) consists of h elements and is the smallest repetitive part of the winding. Each element of the parenthesis represents a group of coils. The total number of coils in the parenthesis is u. Both u and h stem from the v fraction (5). The string of parentheses (12) allows to form a matrix of constraints (24), which is the base for a MMF analysis by means of (30), and (31), as well as a detailed design of the winding.