ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 84 Energetyka z.11 1963

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki B

PROJEKTOWANIE UKŁADÓW APERIODYCZNIE STATECZNYCH

Streszczenie. Celem pracy jest, opierając się częściowo na pracy [1] podać równania, pozwalające zaprojektować układ, w którym odbywają się oscylacje relaksacyjne, jeżeli wiadomo jest, jakie skrajne wartości przybiera wielkość zmienna jednego z ciał np. regulatora, czujnika itd.

Rozpatrzono 4 zagadnienia:

1) Stan rozruchu

a) zagadnienie przeregulowania,
b) czas ustalenia się oscylacji.

2) Stan ustalony

a) wyznaczenie amplitudy,
b) wyznaczenie okresu.

Zagadnienie stanu ustalonego (punkt 2a) rozwiązano metodą inną niż w [1], sprowadzając problem przestrzeni n wymiarowej do n-1 problemów płaskich.

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest problem zaprojektowania układu o określonych z góry własnościach. Przyjęto, że w układzie tym odbywają się oscylacje relaksacyjne wielkości y_i, opisujących zachowanie się układu, których zależność od czasu t dana jest równaniami typu

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} e^{\alpha_k t} + Y_i, \qquad i = 1, \dots n \tag{1}$$

gdzie A_{ik}, Y_i, α_k stałe rzeczywiste.

Układ nazywamy aperiodycznie statecznym, jeżeli pierwiastki α_i równania charakterystycznego układu są rzeczywiste, ujemne i różne od siebie.

Przy projektowaniu należy rozpatrzeć następujące zagadnienia:

1) Rozruch układu

a) zagadnienie przeregulowania. W wielu układach zależy nam na tym, by odchylenie od stanu równowagi w początkowej fazie oscylacji było możliwe małe,

b) wyznaczenie czasu rozruchu. Jest to czas, po którym następuje stan ustalony,

2) Stan ustalony

a) wyznaczenie amplitudy ustalonej,

b) wyznaczenie okresu oscylacji ustalonych.

W pracy [1] rozpatrzono całość powyższego zagadnienia. W niniejszym komunikacie korzystano z wyników tej pracy oraz w odmienny sposób rozwiązano zagadnienie stanu ustalonego.

2. Idea metody i najważniejsze zależności

Jeżeli równanie (1) przedstawia pierwszy proces, wówczas następne procesy, odpowiadające załączeniu lub wyłączeniu zewnętrznego czynnika wymuszającego, można napisać w postaci następującej [1].

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_{i,k} e^{\alpha_k t} + Y_i, \quad i = 1 \ldots\ldots n \quad (2)$$

gdzie stałe ε_k przedstawiają "historię" procesu, więc są zależne od czasów załączania i wyłączania czynnika wymuszającego. Otrzymujemy je z postulowania ciągłości funkcji typu (2) dla kolejnych stadiów procesu.

Jeżeli podstawimy

$$\varepsilon_k e^{\alpha_k t} = \xi_k \quad (3)$$

możemy w miejsce równania (2) napisać

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\, \xi_k + Y_i, \qquad i = 1.....n \tag{4}$$

Układ ten rozwiązany ze względu na ξ_k daje

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}\,(y_k - Y_k), \qquad i = 1.....n \tag{5}$$

gdzie $B_{i,k}$ oznaczają stałe. Przy pewnych założeniach dotyczących wielkości $A_{i,k}$ [1] jest to możliwe.

3. Geometryczna interpretacja

Równanie (4) albo (5) przedstawia transformację zmiennych y_i na ξ_k. Układ osi ξ_k przyjmujemy prostokątny oraz n wymiarowy. Wtedy osie układu y_i tworzą na ogół układ skośnokątny, przy czym w kierunku poszczególnych osi następuje odkształcenie (transformacja affiniczna). W układzie ξ_k równanie (4) przedstawia hiperpłaszczyznę.

Eliminując czas z dwu równań (dla indeksu k i 1) otrzymuję się

$$\xi_k = C_k\, \xi_1^{\varkappa_k} \qquad k = 2,...n \tag{6}$$

gdzie

$$\varkappa_k = \alpha_k / \alpha_1$$

Dla pierwszego procesu stałe C_k są równe 1.

Jest to równanie pewnej krzywej w przestrzeni n wymiarowej, której rzutem na płaszczyznę (ξ_1, ξ_k) jest parabola. Stałe C_k wyznacza się z warunku przechodzenia krzywej przez dany punkt np. w chwili początkowej.

W układzie współrzędnych (ξ_i) wyróżnić można dwa punkty: P_1 i P_2 odpowiadające stanowi ustalonemu krzywych y_i przedstawiających dwa kolejne stadia procesu. Dla pierwszego procesu stałe $C_k = 1$ i rzuty odległości punktów $\overline{P_1 P_2}$ wynoszą

$$\xi_{k,o} = 1 \qquad k = 1,\ldots\ldots n$$

Przez punkty P_1 i P_2 prowadzimy dwa układy współrzędnych o osiadach odpowiednio równoległych. Proces rozpatrujemy w układzie współrzędnych (ξ_k), przechodzącym przez punkt P_2 ($y_i = y_{i,o}$, wartość ustalona przy wyłączonym źródle). Wtedy w przypadku załączenia źródła można napisać

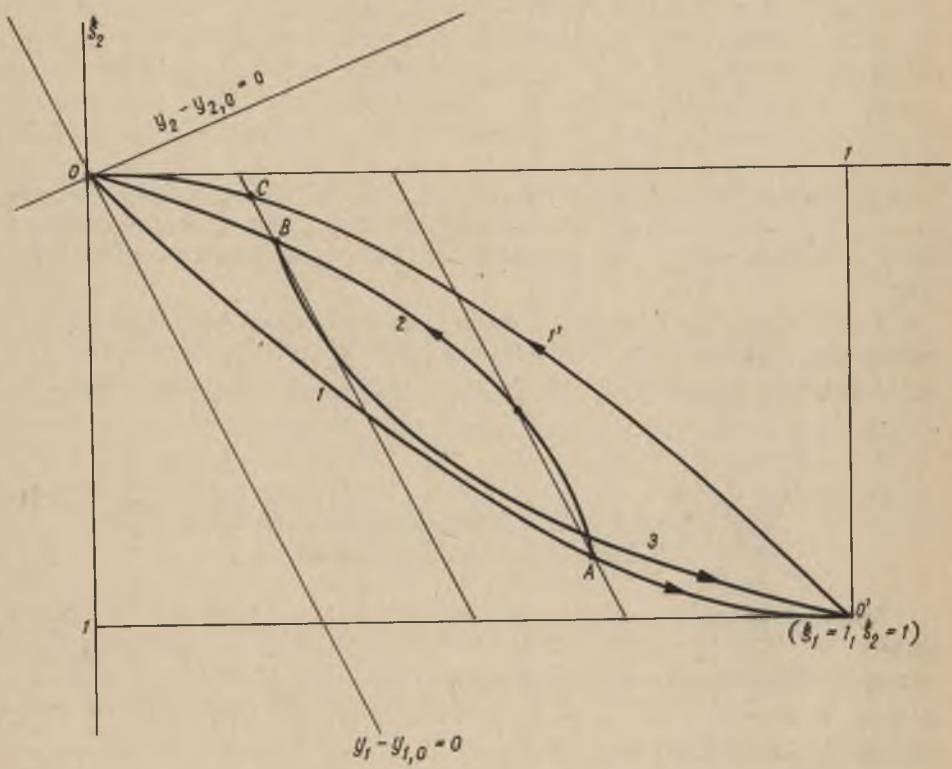
$$(1 - \xi_k)/(1 - \xi_k^*) = \left[(1 - \xi_1)/(1 - \xi_1^*)\right]^{\varkappa_k} \quad k=1,\ldots n \tag{7}$$

zaś w przypadku wyłączenia źródła energii

$$\xi_k / \xi_k^{**} = (\xi_1 / \xi_1^{**})^{\varkappa_k}, \quad k = 2,\ldots\ldots n \tag{8}$$

gdzie

ξ_k^* i ξ_k^{**}, $k = 1,\ldots\ldots n$ oznaczają współrzędne punktu, przez który krzywa przechodzi. W przypadku pierwszych krzywych, jeżeli obie przechodzą przez oba punkty osobliwe P_1 i P_2 należy w równaniach (7) i (8) przyjąć wartość 1 w mianownikach. Charakterystyczną cechą wyrażeń (7) i (8) jest, że odpadają w nich współczynniki ε_k, zależne od historii procesu. Przebieg krzywych (7) i (8) daje rysunek 1, przy czym krzywe 1 i 1' odnoszą się do pierwszego procesu (z załączonym źródłem energii i bez niego).



Rys.1. Przedstawienie problemu stanu ustalonego w płaszczyźnie konfiguracyjnej

Aby nie komplikować rysunku, nie zaznaczono na nim cięciwy AC, o której mowa w tekście. Punkty A i B wyznaczają stan ustalony oscylacji

4. Położenie rzutów osi współrzędnych układu y_i na płaszczyzny (ξ_1, ξ_k)

Równanie osi y_i w układzie współrzędnych (ξ_k) dane jest przez n-1 równań rzutów, zawierających n niewiadomych. Otrzymujemy je, gdy początek układu y_i przyjmie się w punkcie $y_i = Y_i$, $i = 1,\ldots,n$, rozwiązując układ równań

$$\sum_{k=1}^{n} A_{s,k}\, \xi_k = 0, \quad s = 1,\ldots,n \quad s \neq i \qquad (9)$$

Przeliczenie dokonane w [1] wykazuje, że w przypadku osi y_1, odpowiadającej ciału posiadającemu źródło energii

$$\xi_r = (\alpha_r / \alpha_1)\,\xi_1 \quad r = 2,\ldots n \tag{10}$$

w przypadku wielkości odnoszących się do innych ciał układu (osie y_i, $i = 2\ldots n$) współczynnik równania (10) należy mnożyć przez różny dla różnych wartości indeksu współczynnik $M_{r,i}$.

W ten sposób rysunek 1, który został wykonany dla przypadku dwu składników, może być wykorzystany do przedstawienia układu złożonego z n ciał w rzucie na płaszczyznę (ξ_1, ξ_k).

5. Położenie osi współrzędnych układu y_i przesuniętych równolegle

Przypuśćmy, że układ współrzędnych y_i przechodzi przez punkt $y_i = Y_i$, $i = 1,\ldots n$ przy czym $i \neq k$ oraz $y_k - Y_k \neq 0$, wtedy wprowadzając symbol Kroneckera $\delta_{k,s}$ równy 0 dla $k \neq s$ i równy 1 dla $k = s$, możemy napisać podobnie do równania (9) równanie osi y_i

$$\sum_{k=1}^{n} A_{s,k}\,\xi_k = (y_k - Y_k)\,\delta_{k,s}, \quad s = 1,\ldots n \quad s \neq i \tag{11}$$

Równania rzutów możemy napisać w postaci

$$\xi_r / \xi_1 = (\alpha_r / \alpha_1)\,L_{1,r,i} + \left[(y_k - Y_k) / \xi_1\right] \cdot L_{2,r,i}$$

$$i \neq k, \quad k = 1,\ldots n \quad r = 2,\ldots n \tag{12}$$

Wyrażenia na współczynniki $L_{1,r,i}$ i $L_{2,r,i}$ są zbudowane podobnie jak w przypadku równania (10)

6. Sformułowanie zagadnienia oscylacji

Przypuśćmy, że wielkość y_k pewnego ciała np. czujnika układu regulacyjnego zmienia się (wskutek bezwładności i innych przyczyn) w granicach od $y_{k,1}$ do $y_{k,2}$. Przy osiągnięciu jednej z tych wielkości następuje włączenie albo wyłączenie źródła energii. Na skutek tego powstają w układzie oscylacje. W celu zbadania oscylacji wielkości y_i, odpowiadających składnikom układu, należy wyznaczyć jak zmieniają się te wielkości dla $i = 1,\ldots n$, oraz $i \neq n$.

7. Warunki określające stan ustalony

Stan ustalony oscylacji określony jest wspólnymi punktami dwu dowolnych kolejnych krzywych, przedstawionych równaniami (7) i (8) oraz jeżeli są dane dwa równania typu (4), w których y_n jest równe odpowiednio $y_{n,1}$ lub $y_{n,2}$. Wartości $y_{n,1}$ i y_{n2} odpowiadają wartościom $y_{k,1}$ i $y_{k,2}$.

8. Wyniki dotyczące rozwiązania problemu

8.1. Wyniki dotyczące stanu nieustalonego

Wielkość przeregulowania jest zależna od długości "cięciwy", poprowadzonej w obszarze soczewkowatym (rys.1) ograniczonym przez dwie pierwsze krzywe, odpowiadające załączonemu i wyłączonemu źródłu energii. Ponieważ wszystkie dalsze krzywe mieszczą się w obrębie omawianego obszaru, zmniejszenie pola "soczewki" winno wpłynąć korzystnie na zmniejszenie przeregulowania. Ponieważ pole to jest określone wyrażeniem

$$(\varkappa_k - 1) / (\varkappa_k + 1) \qquad (13)$$

za pomocą wielkości $\varkappa_k$ możemy wpływać na wielkość przeregulowania.

Ponieważ, jak wykazano w [1] wszystkie krzywe możemy rysować w tym samym układzie współrzędnych, gdyż wielkości ε_k nie występują w tej konstrukcji stan ustalony powinien nastąpić już od pierwszej krzywej odpowiadającej wyłączonemu

źródłu energii. Podobna sytuacja występuje, gdy oscylująca wielkość zmienia się według pojedynczej krzywej wykładniczej. Przy rozpatrywaniu stanu ustalonego należy przyjąć, że wartości $y_{n,1}$ i $y_{n,2}$, które mogą być na ogół w stanie nieustalonym zmienne, posiadają wartość stałą.

8.2. Matematyczne sformułowanie zagadnienia stanu ustalonego

Podane w [1] warunki możemy napisać następująco:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_k^* / \xi_k^{**} = (\xi_1 / \xi_1^{**})^{\varkappa_k} \qquad k = 2,\ldots,n \\
&(1 - \xi_k^*) / (1 - \xi_k^{**}) = \left[(1 - \xi_1^*)/(1 - \xi_1^{**})\right]^{\varkappa_k} \\
&y_n - Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\, \xi_k^* \\
&y_n + \Delta y_n - Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\, \xi_k^{**}
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

gdzie

$$\Delta y_n = y_{n,2} - y_{n,1}$$

Tak sformułowane zagadnienie zostało rozwiązane w [1] dwoma metodami. Posiadają one niedogodność, polegającą na tym, że dwa ostatnie równania (14) przedstawiają hiperpłaszczyzny przestrzeni n wymiarowej, co jest niedogodne zwłaszcza przy stosowaniu metody graficznej rozwiązania problemu. Dlatego w podanej dalej metodzie sprowadzono problem do problemu płaskiego. Metodę tę można stosować w każdej z płaszczyzn (ξ_1, ξ_k), $k = 2,\ldots,n$.

8.3. Zmodyfikowane sformułowanie zagadnienia stanu ustalonego

W nowym sformułowaniu pozostają bez zmian dwa pierwsze równania (14), zaś dwa pozostałe równania zastąpić należy

przez równania rzutów obranej osi y_1 na płaszczyznę (ξ_1, ξ_k), $k = 2,\ldots n$

$$\left.\begin{aligned} \xi_k^*/\xi_1^* &= (\alpha_k/\alpha_1)L_{1,k,1} + \left[(y_{n,1} - Y_n)/\xi_1^*\right] L_{2,k,1} \\ \xi_k^{**}/\xi_1^{**} &= (\alpha_k/\alpha_1)L_{1,k,1} + \left[(y_{n,2} - Y_n)/\xi_1^{**}\right] L_{2,k,1} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Zaletą tak postawionego zagadnienia jest fakt, że w każdej płaszczyźnie daje się ono rozwiązać niezależnie. Jako jedyny warunek otrzymuje się, że wartość ξ_1 powinna być we wszystkich płaszczyznach ta sama.

8.4. Graficzna metoda rozwiązania problemu

Wprowadzając wielkości

$$z_i = \xi_i^{**}/\xi_i^*, \quad i = 1,2,\ldots n \qquad (16)$$

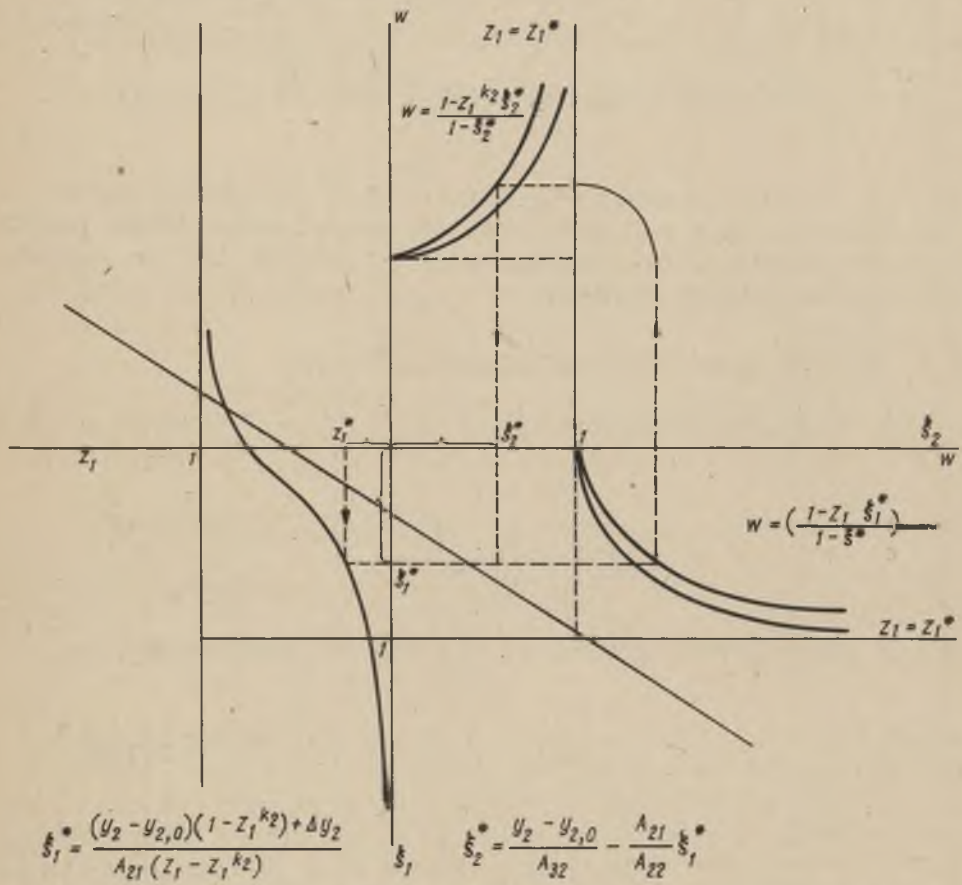
można dwa pierwsze równania (14) napisać następująco

$$\left.\begin{aligned} z_i &= z_1^{\varkappa_i} \\ w &= (1 - z_1\,\xi_1^*)/(1 - \xi_1^*) = \left[(1 - z_1\,\xi_i^*)/(1 - \xi_i^*)\right]^{\varkappa_k} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

przy czym dla wygodnej interpretacji wprowadzono wielkość w, zdefiniowaną przy pomocy drugiego równania (17).

W pracy [1] przedstawiono graficzną metodę (rys.2) znalezienia rozwiązania w przypadku dwu ciał (przestrzeń dwuwymiarowa). Rysunek 2 przedstawia cztery płaszczyzny (w, z_1) (w, ξ_2), (ξ_1, ξ_2), (ξ_1, z_1). Posługując się równaniami (17) narysowano w dwu pierwszych płaszczyznach krzywe dla różnych wartości parametru z_1. Wybraną dla z_1 wartość oznaczono na

rysunku 2 przez z_1. W trzeciej płaszczyźnie kreślimy jedną z prostych (15). Równanie krzywej w czwartej płaszczyznie otrzymuje się przez eliminację z obu równań (15) wielkości ξ_k, przy założeniu, że $k = 2$.



Rys.2. Graficzna metoda rozwiązania problemu wyznaczenia stanu ustalonego

Metoda rozwiązania polega na próbnym przyjęciu pewnej wartości z_1 i wyznaczeniu na tej podstawie kolejno wielkości: ξ_1, w, ξ_2. Sprawdzenia, czy otrzymana para rozwiązań ξ_1, ξ_2 jest rozwiązaniem problemu dokonujemy przy pomocy prostej w trzeciej płaszczyźnie. Z odchyleń wnioskuje się jak należy zmienić z_1, by otrzymać lepszą zgodność.

8.5. Dyskusja rozwiązania

Uzyskane wartości ξ_i, $i = 1, 2$ dają wynik w postaci nieco nieprzejrzystej. W pracy [1] wykazano, że stan ustalony znajduje się w pobliżu prostej (rys.1), łączącej punkty P_1 i P_2, przy czym w przypadku, gdy punkty ξ^*_k, ξ^{**}_k $k=1,2...n$ znajdą się na tej prostej, oscylacje są niemożliwe. Wyrażając wyniki przez wielkości y_i można napisać dla stanu ustalonego

$$(y_i-Y_i)/(y_o-Y_i) = (y_1-Y_1)/(y_o-Y_1) \qquad i = 2....n \tag{18}$$

8.6. Wyznaczenie okresu ustalonych oscylacji

Na podstawie równań stanu ustalonego (14) otrzymuje się

$$\xi^{**}_i = \xi^*_i \, e^{\alpha_i t_1}, \qquad i = 1,2....n \tag{19}$$

$$1 - \xi^*_i = (1-\xi^{**}_i)e^{\alpha_i t_2}$$

przy czym wartości ξ^*_i, ξ^{**}_i, $i = 1,2$ otrzymane zostały metodą z punktu 8.4. Okres oscylacji ustalonych wynosi

$$T = t_1 + t_2 \tag{20}$$

przy czym t_1, t_2 oznaczają czasy trwania poszczególnych procesów (ze źródłem energii i bez niego).

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 8.XI.1962 r.

LITERATURA

[1] J ó z e f S z p i l e c k i - Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr. doktorska, Wydz. Mechaniczno-Energetyczny Politechniki Śląskiej, 1959 r.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ АПЕРИОДИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе рассматривается, ссылаясь на (I) уравнение, дающее возможность проектировать систему, в которой имеют место релаксационные осцилляции, если известные значения одной переменной, принадлежащей к одному элементу системы, на пример, управляющего или измерительного элемента, четыре проблемы:

1) неустановившееся состояние,
   а) проблема перерегулировки,
   б) время установления осцилляций,
2) установившееся состояние,
   а) определение амплитуды,
   б) определение периода осцилляций.

Проблема установившегося состояния решена другим методом, как в (I), дающим возможность заместить проблему -мерного пространства -I проблемами двухмерной плоскости.

THE PROJECTING OF APERIODICALLY STABILES SYSTEMS

Summary

It is the purpose of the paper to give, using partially the results of the paper [1], the equations for projecting a system, undergoing relaxation oscillations. These oscillations are caused by variation of the values of the variable, characterising one of the elements of the system (for example the control element) between two known extremal values. The following problems are discussed:

1) unsteady state,
   a) problem of overcontrol,
   b) time of stabilisation of oscillations,
2) steady state,
   a) determination of amplitude,
   b) determination of period of oscillations.

The problem of steady state (2a) is solved in different way, than in [1] i.e. the problem of n-dimensional space is replaced by n-1 problem in two-dimensional space.