ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 84 Energetyka z.11 1963

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki B

OSCYLACJE TEMPERATUROWE W UKŁADZIE LINIOWYM O DWU STOPNIACH SWOBODY

1. Wstęp

W pracy [1] rozpatrywano oscylacje temperaturowe w układzie n ciał, wymieniających ciepło między sobą i z otoczeniem, powstałe wskutek tego, że ciało posiada źródło ciepła, które jest w określonych chwilach załączane i wyłączane. Nawet liniowa teoria tego zjawiska daje rozwiązania skomplikowane. Dlatego przedyskutowano zagadnienie na przykładzie układu dwuskładnikowego, gdzie liczba parametrów jest nieznaczna i rozważania geometryczne mogą być prowadzone w przestrzeni dwuwymiarowej.

Przedyskutowano:

1) równania różniczkowe problemu i własności ich rozwiązań,

2) różne wielkości występujące w równaniach,

3) zagadnienie stanu nieustalonego metodą, a) analityczną b) graficzną, c) funkcji wykładniczych,

4) metodę rozwiązania występujących równań ze względu na czas,

5) zagadnienie stanu ustalonego metodą przestrzeni konfiguracyjnej.

2. Równania różniczkowe i ich przekształcenia

Proces zmiany temperatur ϑ_i składników układu w zależności od czasu można opisać następującym układem równań

$$K_i \, d\vartheta_i/dt + S_i h_i \sum_{k=0}^{2} a_{i,k} (\vartheta_i - \vartheta_k) = N_i, \quad i=1,2 \qquad (1)$$

gdzie:

K_i - pojemność cieplna i-tego ciała,

S_i - powierzchnia i-tego ciała,

h_i - współczynnik wymiany cieplnej i-tego ciała,

$a_{i,k} \geq 0$ - stałe, charakteryzujące konfigurację, własności emisyjne itd. Macierz ich jest na ogół niesymetryczna. Gdy nie ma wymiany między składnikami i,k znikają równocześnie $a_{i,k}$ i $a_{k,i}$,

ϑ_o temperatura otoczenia,

N_i moc źródła ciepła ciała i-tego. Przyjęto, że $N_1 \neq 0$, $N_2 = 0$.

Wprowadzamy następujące zmiany oznaczeń

$$b_i = K_i/(S_i\ h_i), \quad 1=1,2 \tag{2}$$

$$v_i = N_i/(S_i\ h_i)$$

$$(1/b_i) \sum_{k=1}^{2} a_{i,k} = -\alpha_{i,o}$$

$$-a_{i,k}/b_i = \alpha_{i,o}\ \delta_{i,k} \quad i = 1,2 \quad i \neq k$$

Wielkości $\delta_{i,k}$ są ułamkami właściwymi, dodatnimi, niezależnymi od b_i. Równania (1) przybierają następującą postać

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta_1\ dt - \vartheta_1\ \alpha_{1,0} + \vartheta_2\ \alpha_{1,0}\ \delta_{1,2} &= v/b_1 - \vartheta_0\ \alpha_{1,0}\ \delta_{1,0} \\ d\vartheta_2/dt - \vartheta_2\ \alpha_{2,0} + \vartheta_1\ \alpha_{2,0}\ \delta_{2,1} &= -\vartheta_0\ \alpha_{2,0}\ \delta_{2,0} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

3. Rowziazanie układu równań (3) i jego dyskusja

Zakładając warunki początkowe

$$t = 0, \quad \vartheta_i = \vartheta_0, \qquad i = 1,2 \tag{4}$$

otrzymujemy następujące rozwiązanie układu równań (3)

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{2} A_{i,k}\, e^{\alpha_k t} + \theta_i, \quad i = 1,2 \tag{5}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_{1,0})\, v}{b_1 \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_2)} \\
A_{1,2} &= \frac{-(\alpha_2 - \alpha_{2,0}) v}{b_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \\
A_{2,1} &= \frac{-\alpha_{2,0}\, \delta_{2,1}\, v}{b_1 \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_2)} \\
A_{2,2} &= \frac{\alpha_{2,0}\, \delta_{2,1}\, v}{b_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \\
\theta_1 &= \frac{-\alpha_{2,0}\, v}{b_1 \alpha_1 \alpha_2} + \vartheta_0 \\
\theta_2 &= \frac{-\alpha_{2,0}\, v}{b_1 \alpha_1 \alpha_2} + \vartheta_0
\end{aligned} \tag{6}$$

Przez θ_1 i θ_2 oznaczono temperatury ustalone ciał układu. Wielkości α_i, $i = 1,2$ wyznaczono z równania charakterystycznego

$$\begin{vmatrix} \alpha - \alpha_{1,0}, & \alpha_{1,0} & \delta_{1,2} \\ \alpha_{2,0} & \delta_{2,1}, & \alpha - \alpha_{2,0} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

przy czym jest $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $|\alpha_1| < |\alpha_2|$

4. Własności rozwiązań

W pracy [1] wykazano następujące własności rozwiązań (5)

a) dla chwili $t = 0$ jest spełniona zależność $d\vartheta_1/dt = v/b_1$ dla ciała posiadającego źródło oraz $d\vartheta_2/dt = 0$ dla ciała bez źródła ciepła,

b) $(\vartheta_i - \vartheta_0)/v$, $i = 1,2$ nie zależy od v,

c) pierwsza pochodna funkcji ϑ_2 dla ciała nie posiadającego źródła ciepła jest ciągła na granicy dwu krzywych opisujących kolejne procesy,

d) $(\vartheta_i - \vartheta_0)_{og} + (\vartheta_i - \vartheta_0)_{ost} = \sum_{k=1}^{2} A_{ik}\, e\alpha_k(t_1 + t)$, $k=1,2$

gdzie t_1 oznacza czas odpowiadający chwili końcowej ogrzewania (og - ogrzewanie, ost - ostyganie),

e) z ciągłości pierwszej pochodnej ϑ_2 wynika istnienie ekstremów funkcji ϑ_2 (ciała nie posiadającego źródła ciepła) począwszy od pierwszej krzywej ostygania.

5. Różne wielkości występujące w różnych równaniach

Dla dalszego rozważania ważne są poza wielkościami α_i następujące wielkości:

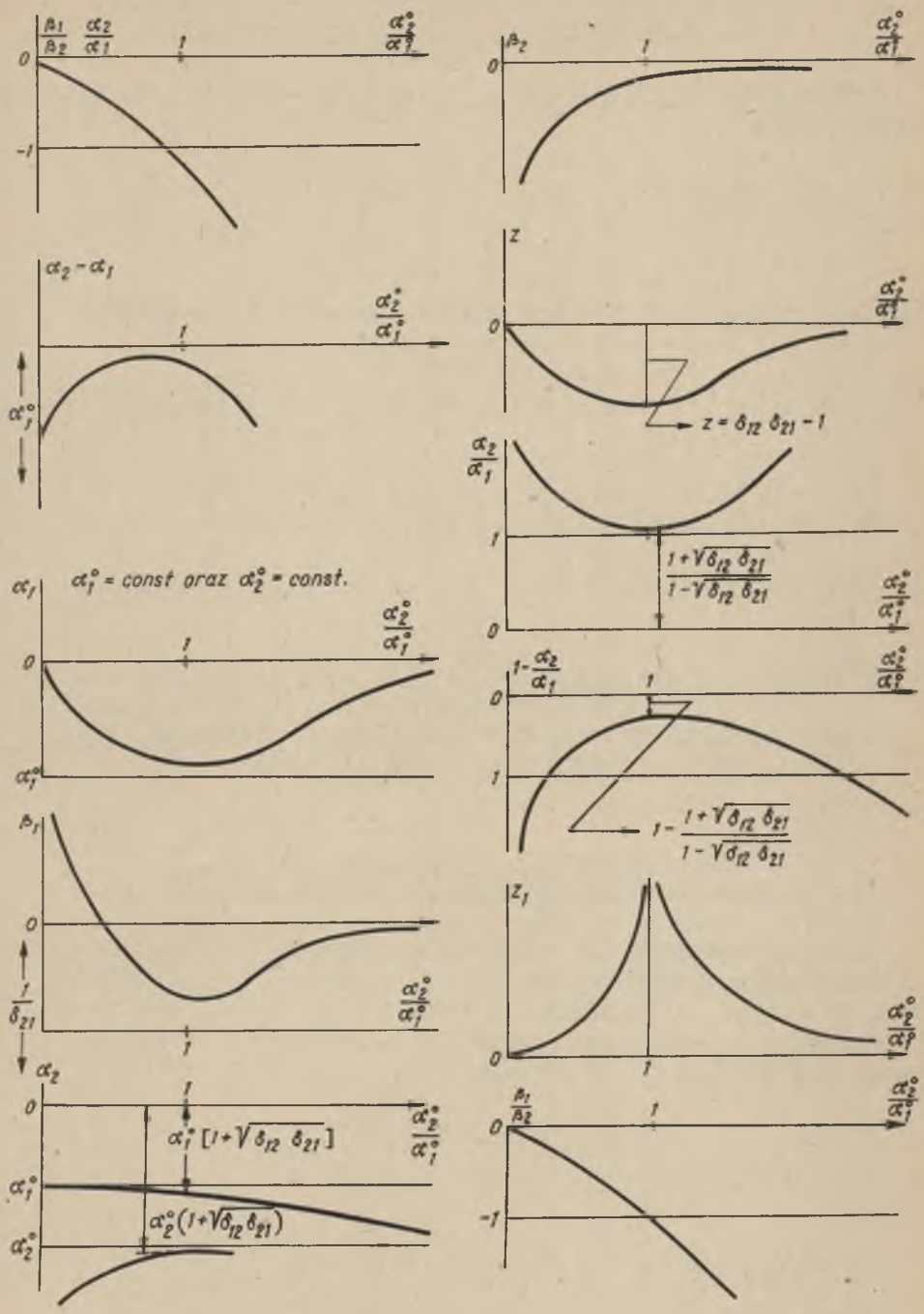
$$\beta_k = -\alpha_1 \delta_{1,2}/(\alpha_k - \alpha_{1,0}) = -(\alpha_k - \alpha_{2,0})/(\alpha_{2,0}\,\delta_{2,1}) \quad (8)$$

przy czym jest $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$. Ponieważ wielkości α_i i β_i występują w różnych formułach w różnych kombinacjach, dlatego przedyskutowano zależność od parametru $\alpha_{1,0}/\alpha_{2,0}$ następujących wielkości: α_1, α_2, β_1, β_2, $\alpha_2 - \alpha_1$, α_2/α_1, $1 - \alpha_2/\alpha_1$, β_1/β_2, $\beta_1\alpha_2/(\alpha_1,\alpha_2)$,

$$z = (\alpha_{2,0}/\alpha_{1,0})(\delta_{1,2}\delta_{2,1} - 1)/(1 + \alpha_{2,0}/\alpha_{1,0})^2$$

$$z_1 = 4(\alpha_{2,0}/\alpha_{1,0})\delta_{1,2}\delta_{2,1}/(1 - \alpha_{2,0}/\alpha_{1,0})^2$$

Wynik dyskusji przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Przebieg zależności od parametru $\alpha_{1,0}/\alpha_{2,0}$ różnych wielkości występujących w równaniach

6. Związki między różnymi wielkościami

Temperatury ciał dla stanu ustalonego związane są ze sobą zależnością

$$(\theta_2 - \vartheta_0)/(\theta_1 - \vartheta_0) = \delta_{2,1} \qquad (9)$$

Ogólnie biorąc temperatury ciał związane są zależnością

$$(\vartheta_1 - \theta_1)/(\vartheta_2 - \theta_2) = -\left[(\theta_1 - \vartheta_0)/(\theta_2 - \vartheta_0)\right]\left[(\alpha_1 - \alpha_{2,0})/\alpha_{2,0}\right] \cdot \frac{\left\{1 - \left[(\alpha_2 - \alpha_{2,0})\,\alpha_1/\alpha_2/\alpha_1 - \alpha_{2,0})\right]\right\} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)\,t}}{\left\{(\alpha_1/\alpha_2) \cdot e^{(\alpha_2 - \alpha_1)\,t} - 1\right\}} \qquad (10)$$

Jest to funkcja malejąca od $(\vartheta_0 - \theta_1)/(\vartheta_0 - \theta_2)$ dla $t = 0$ do $(\theta_1 - \vartheta_0)/(\theta_2 - \vartheta_0)\left[(\alpha_1 - \alpha_{2,0})/\alpha_{2,0}\right]$ dla $t = \infty$

7. Stan nieustalony oscylacji. Metoda analityczna

Stan nieustalony otrzymujemy załączając i wyłączając kolejno źródło ciepła w chwilach t_i, $i = 1,2...$ i badając jak to wpływa na rozwiązania równań (3). Jeżeli procesowi ogrzewania przepiszemy indeks (2s), procesowi ostygania indeks (2s + 1), s=1,2... wtedy otrzymujemy

$$\vartheta_{i(2s)} = \sum_{k=1}^{2} A_{ik}\, \varepsilon_{k(2s)}\, e^{\alpha_k t} + \theta_i$$

$$\vartheta_{i(2s+1)} = \sum_{k=1}^{2} A_{ik}\, \varepsilon_{k(2s+1)}\, e^{\alpha_k t} + \vartheta_0 \qquad (11)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{k(o)} = 1$$

$$\varepsilon_{k(1)} = e^{(\alpha_k t_1)} - 1 \qquad (12)$$

$$\varepsilon_{k(2s+1)} = \varepsilon_{k(2s)} e^{(\alpha_k t_{2s+1})} - 1$$

$$\varepsilon_{k(2s+2)} = \varepsilon_{k(2s+1)} e^{(\alpha_k t_{2s+2})} + 1$$

$$\varepsilon_{k(s)} = e^{\alpha_k (t_1 + \ldots + t_s)} - e^{\alpha_k (t_2 + \ldots + t_s)}$$

$$+ \ldots + (-1)^s . e^{\alpha_k t_s (-1)^s}$$

W celu obliczenia kolejnych funkcji iterowanych, jeżeli znamy dwie wartości między którymi waha się temperatura jednego z ciał (termometr kontaktowy) winniśmy wyznaczyć z równań (11) kolejno czasy t_i, odpowiadające tym temperaturom.

8. Metoda graficzna wyznaczenia czasów t_i

Na rysunku 2 przedstawiono sposób rozwiązania równań typu (5) i (11) ze względu na czas t, gdy znana jest temperatura. Jedno z równań (5) możemy napisać następująco:

$$a + b\,x = x^{(\alpha_2/\alpha_1)} \qquad (13)$$

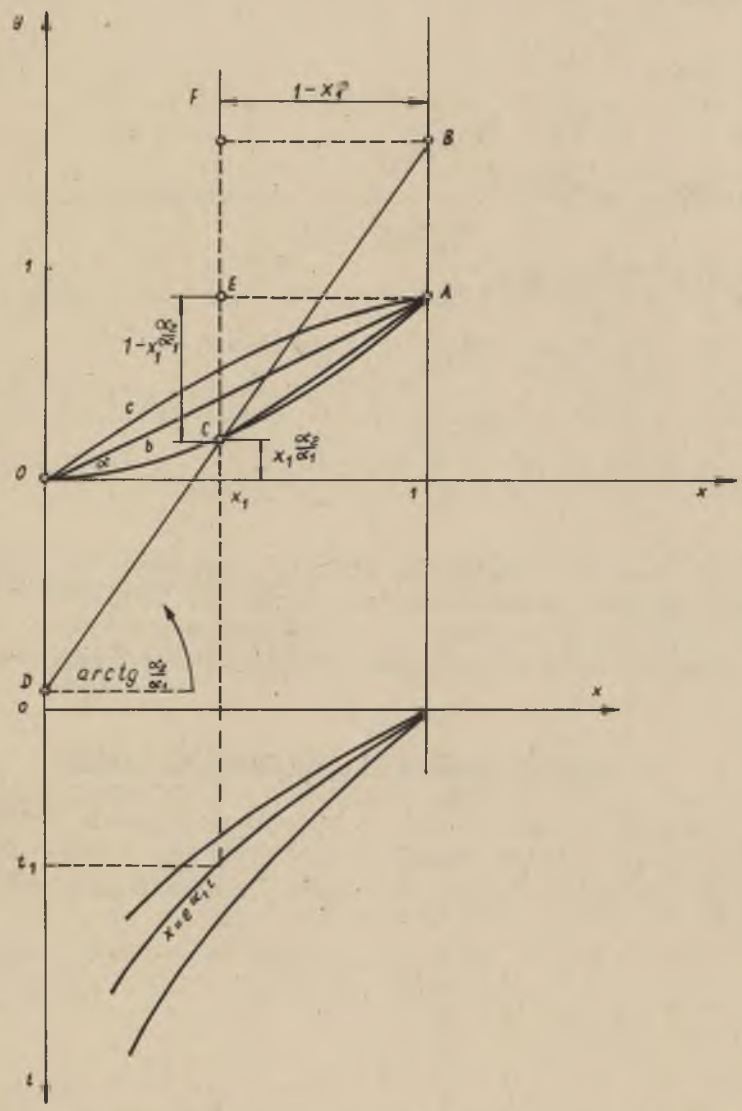
gdzie:

$$a = \left[(\vartheta_2 - \theta_2)/(\vartheta_o - \theta_2)\right]\left[(\alpha_1 - \alpha_2)/\alpha_1\right]$$

$$b = (\alpha_2/\alpha_1) \qquad (14)$$

$$x = e^{\alpha_1 t}$$

Na rysunku krzywe a, b, c odpowiadają różnym parabolom, przedstawiającym prawe strony równania (13) dla $\alpha_2/\alpha_1 \gtrless 1$.



Rys.2. Metoda graficzna rozwiązania równania (5) i (11)

Wpływ zmian temperatury ujawnia się w równoległym przesunięciu prostej przedstawiającej lewą stronę równania (13). Punkt przecięcia oznaczono przez x_1. Odpowiadającą mu wartość czasu t_1 można wyznaczyć z krzywych u dołu wykresu, które są opisane ostatnim równaniem (14).

Podobnie zmieniając znaczenie a i b można wyznaczyć na podstawie znajomości x_1 dla ogrzewania odpowiednią wartość x dla ostygania. Wtedy

$$a = \left[(\vartheta_2 - \vartheta_o)/(\vartheta_2 - \theta_2)\right]\left[(\alpha_1 - \alpha_2)/\alpha_1(x_1^{(\alpha_2/\alpha_1)} - 1)\right]$$
$$b = \alpha_2(x_1 - 1)/\alpha_1(x_1^{(\alpha_2/\alpha_1)} - 1) \qquad (15)$$

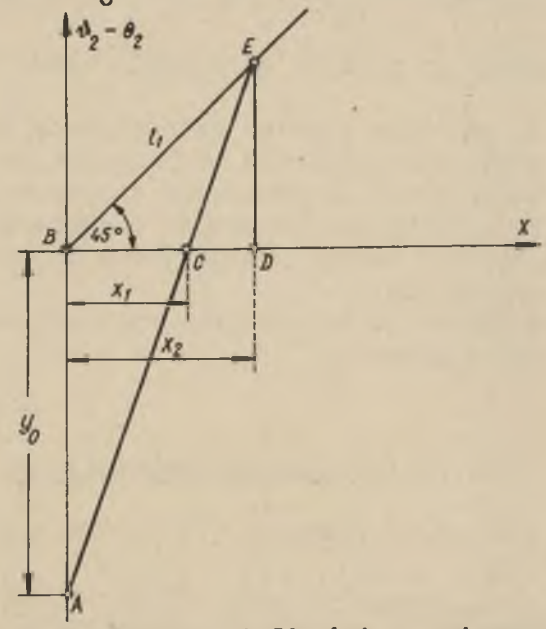
Wielkości $(1-x_1)$ i $(1 - x_1^{(\alpha_2/\alpha_1)})$ dadzą się łatwo wyznaczyć z wykresu.

9. Położenie i wielkość ekstremów

Na wyznaczenie położenia ekstremów otrzymujemy z równania (11) proste zależności, których z braku miejsca nie podano.

10. Oszacowanie wielkości rozwiązania x_1 równania (13)

Na rysunku 3 przedstawiono nieco odmiennie konstrukcję rysunku 2. Rzędna y_o = AD jest wyznaczona przez stałą a.



Rys.3. Metoda oszacowania wielkości rozwiązania z rys.2.

Prosta BE jest położeniem granicznym krzywej $y = x^{(\alpha_2/\alpha_1)}$ dla $\alpha_2/\alpha_1 = 1$ (krzywa b rys.2). Prosta AE przedstawia lewą stronę równania (13). Z elementarnego rozumowania wynika, że rozwiązanie x_1 mieści się między

$$BC = (\alpha_1/\alpha_2 - 1)(\vartheta_2 - \theta_2)/(\vartheta_o - \theta_2)$$
$$BD = (\vartheta_2 - \theta_2)/(\vartheta_o - \theta_2) \qquad (16)$$

11. Stan nieustalony. Metoda funkcji wykładniczych

Z układu równań (5) otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$e^{\alpha_1 t} = \left[1/A_{1,2}(\alpha_2 - \alpha_1)\right]\left[(\vartheta_1 - \theta_1)\alpha_2 - d\vartheta_1/dt\right]$$
$$e^{\alpha_2 t} = \left[1/A_{1,1}(\alpha_2 - \alpha_1)\right]\left[d\vartheta_1/dt - \alpha_1(\vartheta_1 - \theta_1)\right] \qquad (17)$$

i podobnie możemy je wyrazić za pośrednictwem ϑ_2 i jej pochodnej.

W pracy |2| omówiono szerzej metodę postępowania przy wyznaczaniu stanu nieustalonego. Polega ona na wyznaczaniu chwili końcowej procesu na podstawie znajomości wartości temperatury i jej pochodnej w chwili początkowej. Z kolei wyznacza się wartość funkcji temperatury i jej pochodnej dla następnego procesu itd.

Przy dalszych procesach należy przy wielkościach $A_{i,k}$ uwzględnić odpowiednie ε_k.

12. Związek między temperaturami

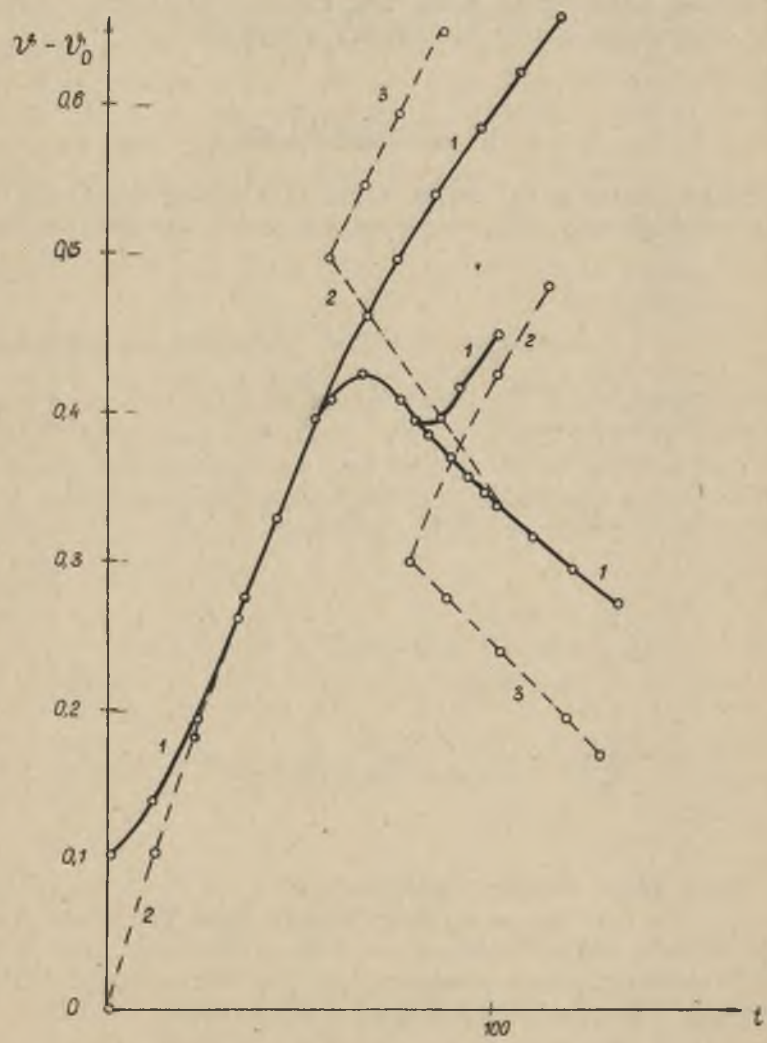
Podobnie jak wyżej [równania (17)] można napisać

$$\vartheta_1 - \theta_1 = (1/\alpha_{2,0}\,\delta_{21})\left\{\alpha_{2,0}(\vartheta_2 - \theta_2) - d\vartheta_2/dt\right\} \qquad (18)$$

nie zależnie od wartości ε_k. Oczywiście dla poszczególnych procesów zmieniają się wartości $\vartheta_2 - \theta_2$ i $d\vartheta_2/dt$.

13. Stan nieustalony. Metoda graficzna

Metoda ta stanowi interpretację geometryczną metody poprzedniej (punkt 12). Z postaci bowiem wzorów (11) wynika,



Rys.4. Graficzna metoda budowy krzywych oscylacji

że można przechodzić od jednej krzywej do następnej, operując wielkościami ϑ_0 i $\sum_{k=1}^{2} A_{i,k} e^{\alpha_k t} - \sum_{k=1}^{2} A_{i,k}$, przy czym w odpowiednich chwilach t_i, $i = 1,2...$ należy do rzędnych krzywej poprzedniego procesu dodawać (lub odejmować) wartości powyższego wyrażenia. Przedstawia to rysunek 4. Na rysunku przyjęto, że w wyrażeniach (5) wielkości A_{ik} mają jednakowy znak. Jako krzywe porównawcze z procesami dla układu jednoskładnikowego przyjęto krzywe dane członem wykładniczym wolniej zanikającym (krzywa 2), natomiast krzywa 1 przedstawia przebieg dany przez sumę dwu funkcji wykładniczych. Krzywe 3 są odpowiednio przesuniętymi krzywymi 1.

14. Stan ustalony

Dyskusję stanu ustalonego oscylacji przeprowadzono w przestrzeni konfiguracyjnej, otrzymanej przez wprowadzenie zmiennych

$$\xi_1 = e^{\alpha_1 t} = (\alpha_1 b_1/v)\Big\{\vartheta_1 - \theta_1 + \Big[(\alpha_2 - \alpha_{2,0})/(\alpha_{2,0}\delta_{21})\Big](\vartheta_2 - \theta_2)\Big\} \tag{19}$$

$$\xi_2 = e^{\alpha_2 t} = (\alpha_2 b_1/v)\Big\{\vartheta_1 - \theta_1 + \Big[(\alpha_1 - \alpha_{2,0})/(\alpha_{2,0}\delta_{2,1})\Big](\vartheta_2 - \theta_2)\Big\}$$

Wartości lewej strony zmieniają się od 1 do 0. Jeżeli punkt $(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0)$ przyjmiemy jako początek prostokątnego układu współrzędnych, wtedy eliminując czas z tych równań (i analogicznie zbudowanych dla dalszych przebiegów) otrzymujemy dla pierwszej krzywej ogrzewania

$$1 - \xi_2 = (1 - \xi_1)^{\varkappa_2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{20}$$

natomiast dla pierwszej krzywej ostygania (zaczynającej się od stanu ustalonego krzywej ogrzewania)

$$\xi_2 = \xi_1^{\varkappa_2} \tag{21}$$

14.1. Przeregulowanie układu

Wszystkie krzywe ogrzewania i ostygania mieszczą się w obrębie soczewkowatego obszaru, ograniczonego pierwszą krzywą ogrzewania i pierwszą krzywą ostygania. Jeżeli obie krzywe łączą oba punkty osobliwe (oba stany ustalone układu), wielkość tego obszaru jest miarodajna dla stanu przeregulowania i im bliższy jest on prostej łączącej punkty osobliwe, tym mniejsze jest przeregulowanie. Z dyskusji pola tego obszaru wynika, że dane jest ono wyrażeniem $\left[(\alpha_2/\alpha_1) - 1\right] / \left[\alpha_2/\alpha_1 + 1\right] = \sqrt{1 + z}$. Wartość ta jest minimalna dla $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,0}$ i wynosi $\sqrt{\delta_{2,1}\ \delta_{1,2}}$, więc nie może być równa zeru.

14.2. Wyznaczenie stanu ustalonego oscylacji

Postulując, że stan ustalony oscylacji jest wyznaczony przez punkty wspólne ustalonej krzywej ogrzewania i ustalonej krzywej ostygania oraz dwu prostych, odpowiadających dwu skrajnym temperaturom osiąganym przez jedno z ciał, otrzymujemy następujący układ równań na wyznaczenie punktów wspólnych (ξ_k^*) oraz (ξ_k^{**}), $k = 1,2$

$$\begin{aligned} (1 - \xi_2^{**})/(1 - \xi_2^*) &= \left[(1 - \xi_1^{**})/(1 - \xi_1^*)\right]^{\varkappa_2} \\ \xi_2^{**}/\xi_2^* &= (\xi_1^{**}/\xi_1^*)^{\varkappa_2} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \theta_{21} &= \sum_{k=1}^{2} A_{2,k}\ \xi_k^* \\ \theta_{22} &= \sum_{k=1}^{2} A_{2,k}\ \xi_k^{**} \end{aligned} \tag{23}$$

Przebieg współczynników występujących w równaniach prostych (23) podano na rysunku 1.

14.3. Wyznaczenie wielkości stanu ustalonego

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\Delta\xi_i = \xi_i^{**} - \xi_i^{*} \tag{24}$$

przy założeniach upraszczających o małości tych wielkości wobec ξ_i^* i $(1 - \xi_i^*)$ znajdujemy

$$\xi_i^* = \theta_{2,1}(\vartheta_0 - \theta_i) + \delta_i, \quad i = 1,2 \tag{25}$$

$$\delta_2 = \varkappa_2 \, \delta_1$$

O wielkości δ_i robimy podobne założenia jak o $\Delta\xi_i$. Rozwiązanie problemu sprowadza się do wyznaczenia δ_1, co jest możliwe za pomocą wielkości występujących w równaniach (22) i (23) przy czym oznaczono

$$\theta_{2,1} - \theta_{2,2} = \Delta\vartheta \tag{26}$$

wtedy

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\Delta\vartheta(\vartheta_2 - \theta_2)(\vartheta_0 - \vartheta_2) / \left[2(\theta_2 - \vartheta_0)^3(\varkappa_2 - 1)\varkappa_2\right]} \tag{27}$$

Jest to funkcja zmiennej α_2/α_1 i przybiera wartości od 0 dla $\alpha_{2,0}/\alpha_{1,0} = 0$ przez maximum proporcjonalne do

$$\sqrt{(1 - \sqrt{\delta_{1,2}\,\delta_{2,1}})/\delta_{1,2}\,\delta_{2,1}} \quad \text{dla } \alpha_{2,0} = \alpha_{1,0}$$

do 0 dla $\alpha_{2,0}/\alpha_{1,0} = \infty$.

14.4. Okres oscylacji ustalonych

Na podstawie znajomości zachowania się układu w stanie ustalonym (25) wyznaczamy okres T oscylacji ustalonych za pomocą równania:

$$T = T_1 + T_2 = \left\{2\delta_1 / \left[\alpha_1(\vartheta_0 - \Theta_2)\right]\right\}\left[1/\Theta_{2,1} - 1/(\vartheta_0 - \Theta_2 - \Theta_{2,1}\right] \tag{28}$$

przy czym

$$T_1/T_2 = -(\vartheta_0 - \Theta_2 - \Theta_{2,1})/\ _{2,1} \tag{29}$$

gdzie

T_1, T_2 czasy trwania procesu ogrzewania i ostygania.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 15.XI.1962 r.

LITERATURA

[1] J ó z e f S z p i l e c k i - Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr.dokt. Wydz.Mech.-Energ. Pol.Śl., 1959 r.

[2] J ó z e f S z p i l e c k i - Temperaturowe oscylacje relaksacyjne w układach liniowych (w druku).

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Резюме

В работе [1] рассмотрены колебания температуры в системе и тел, обменяющих теплоту между собой и с окружающей средой, которые возникают вследствие того, что одно из тел имеет источник теплоты, который в определенных моментах времени включается или выключает. Уже более простая линейная теория этого явления дает громоздкие решения.

Потому проблема рассмотрена на примере двухэлементной системы, ввиду того, что количество параметров малое и геометрические рассуждения ведутся в двухмерном пространстве.

Рассмотрены:

1) дифференциальные уравнения проблемы и особенности их решений,
2) разные величины, выступающие в уравнениях,
3) проблема неустановившегося состояния методом а) аналитическим, б) графическим, в) экспоненциальной функции,
4) метод решения уравнений относительно времени,
5) проблема установившегося состояния методом конфигурационного пространства.

TEMPERATURE OSCILLATIONS IN A LINEAR SYSTEM OF TWO DEGREES OF FREEDOM

S u m m a r y

In the paper [1] has been solved the problem of temperature oscillations in a system of n degrees of freedom (n bodies exchanging heat between them and with a surrounding body), caused by the fact, that one of the elements of the system has a source of heat, set on and out in certain moments of time. Even the linear theory of the process gives complicated solutions. Therefore the discussion of the problem is reduced to the case of two bodies. The number of parameters becomes then small and the geometric considerations can be visualised in two dimensions.

There were discussed:

1) differential equations of the problem and the properties of the solutions,

2) various quantities appearing in the equations,

3) the problem of unsteady state with use of a) analytical, b) graphical, c) exponential function method,

4) the method of solving of the various equation with respect to time,

5) the problem of steady state in a configuration space.