ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 84 Energetyka z.11 1963

STANISŁAW JERZY GDULA

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

PERIODYCZNA WYMIANA CIEPŁA W CIAŁACH STAŁYCH BEZ ŹRÓDEŁ WEWNĘTRZNYCH

Rozpatrzono problem wymiany ciepła w ciele stałym przy periodycznych zmianach temperatury ośrodka lub powierzchni ciała.

Równania (1) - (6) formułujące problem, sprowadzono do postaci bezwymiarowej (1a) - (6a) wprowadzając wielkości zredukowane (b) - (h).

Otrzymano równania określające zmienność w czasie temperatury w dowolnym punkcie ciała (16), natężenia przepływu ciepła przez powierzchnię ciała (19) oraz ilość ciepła wymienianego w czasie jednego periodu (20). Równania te sprowadzają rozwiązanie problemu periodycznej wymiany ciepła do zagadnienia wymiany ciepła w ciele o tym samym kształcie, przy stałej temperaturze ośrodka lub powierzchni (równania (10) i (18)).

Jeżeli w ciele stałym nie ma wewnętrznych źródeł ciepła, to periodyczna wymiana ciepła odbywać się w nim może jedynie wskutek periodycznego działania na powierzchni ciała. W niniejszej pracy rozpatrzymy dwa przypadki tego rodzaju działań:

1) periodyczna zmiana temperatury ośrodka otaczającego ciało, przy założonej na powierzchni konwekcyjnej wymianie ciepła,

2) periodyczna zmiana temperatury powierzchni.

Założymy przy tym, że zmiany te są jednakowe na całej powierzchni ciała.

Rozważania przeprowadzimy dla ciała o dowolnym kształcie, wykluczając jedynie półprzestrzeń.

Periodyczna wymiana ciepła w ciele stałym charakteryzująca się periodycznością zmian temperatury w dowolnym jego punkcie, ustala się po odpowiednio długim czasie od momentu rozpoczęcia periodycznego oddziaływania na powierzchni ciała.

Ten proces ustalania się periodyczności odpowiada procesowi wyrównywania się temperatury ciała (przy nagrzewaniu lub ostyganiu) do stałej temperatury ośrodka (przyp. 1) lub powierzchni (przyp.2). Ponieważ w półprzestrzeni nigdy nie dochodzi do wyrównania się temperatury - nieskończenie odległy od powierzchni punkt posiada zawsze temperaturę początkową - więc też nie może dojść do ustalenia się periodyczności przepływu ciepła.

Nie ograniczając więc, poza tym jednym zastrzeżeniem, kształtu ciała, przyjmiemy, że jest ono jednorodne, izotropowe, a jego współczynnik przewodzenia ciepła λ, ciepło właściwe c i gęstość ϱ nie zależą od temperatury.

Temperatura ciała $\vartheta(\bar{r},\tau)$ w dowolnym jego punkcie o współrzędnej $\bar{r}$ i w dowolnej chwili τ spełnia równania Fouriera-Kirchhoffa [4]

$$\frac{\partial\vartheta(\bar{r},\tau)}{\partial\tau} = a\nabla^2\vartheta(\bar{r},\tau) \qquad (1)$$

Nadto punkty leżące na powierzchni ciała s spełniają warunek brzegowy

$$-\lambda\frac{\partial\vartheta(\bar{r},\tau)}{\partial n} = \alpha\left[\vartheta(\bar{r},\tau) - t(\tau)\right], \quad \bar{r}\in s \qquad (2)$$

gdzie n oznacza normalną zewnętrzną do elementu powierzchni ciała. Warunek powyższy obejmuje oba rozpatrywane przez nas przypadki periodycznych działań na powierzchni ciała. W szczególności, dla periodycznych zmian temperatury powierzchni otrzymamy, kładąc $\alpha = \infty$ $\left(\frac{1}{\alpha} = 0\right)$

$$\vartheta(\bar{r},\tau) = t(\tau), \quad \bar{r}\in s$$

Na funkcję $t(\tau)$ nałożony jest warunek okresowości

$$t(\tau + \tau_0) = t(\tau)$$

gdzie τ_0 oznacza długość okresu. Z fizykalnego sensu funkcji $t(\tau)$ wynika, że jest ona całkowalna. Wprowadźmy oznaczenia:

t_1 - najwyższa temperatura ośrodka (lub powierzchni),

t_2 - najniższa temperatura ośrodka (lub powierzchni),

t_m - średnia temperatura ośrodka.

Wybór średniej temperatury jest dowolny i wpływa co najwyżej na pojawienie się addytywnej stałej w końcowych wynikach. Najwygodniej jest przyjąć średnią całkową

$$t_m = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} t(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

Dla obliczenia natężenia przepływu ciepła przez powierzchnię ciała oraz ilości ciepła wymienianego w czasie jednego okresu, wprowadźmy pojęcie średniej temperatury ciała ϑ_m

$$\vartheta_m(\tau) = \frac{1}{v} \int_V \vartheta(\bar{r}, \tau) dv \tag{4}$$

gdzie v oznacza objętość ciała.

Natężenie przepływu ciepła przez powierzchnię ciała lub krócej, strumień ciepła $\dot{q}$ jest proporcjonalne do szybkości zmian średniej temperatury ciała

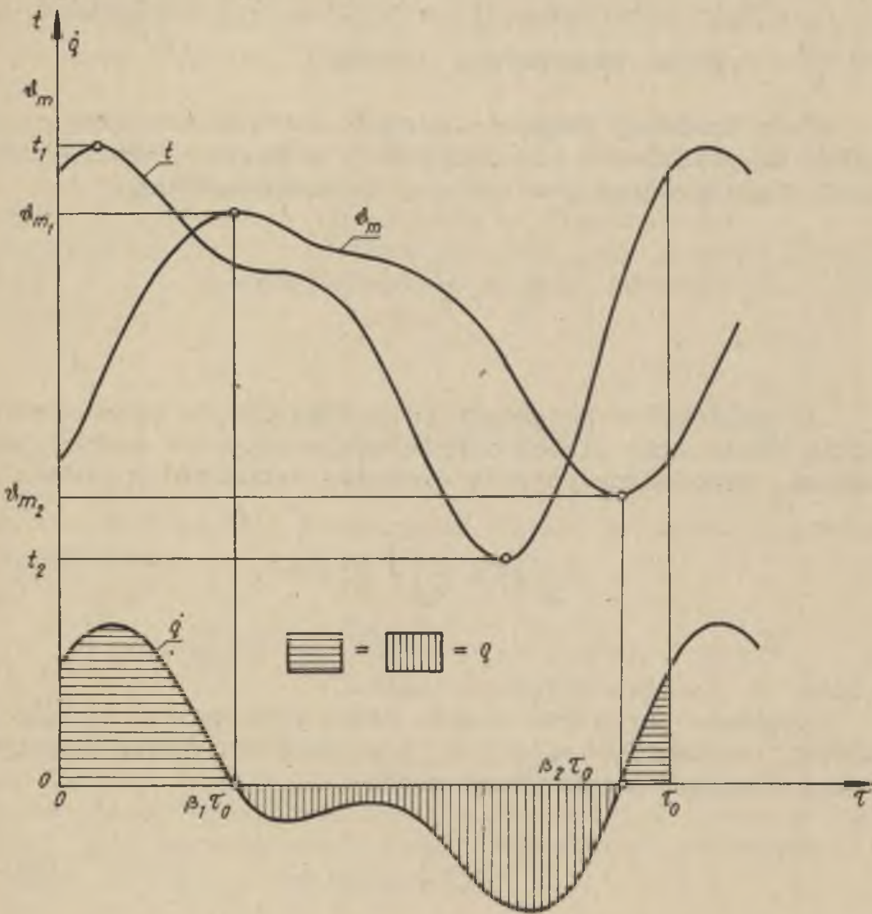
$$\dot{q}(\tau) = W \dot{\vartheta}_m(\tau) \tag{5}$$

Współczynnikiem proporcjonalności jest pojemność cieplna ciała

$$W = m\,c$$

Oczywistym jest, że periodyczne działanie na powierzchni ciała wywołuje periodyczną zmienność wszystkich wyżej określonych funkcyj $\vartheta(\bar{r}, \tau)$, $\vartheta_m(\tau)$, $\dot{q}(\tau)$, z tym samym okresem τ_0.

Przy periodycznej wymianie ciepła nie akumuluje się ono w sposób trwały w ciele. Przez pewną część okresu ciepło dopływa do ciała ($\dot{q}>0$), przez pozostałą część okresu odpływa ($\dot{q}<0$) w tej samej ilości. Powyższy fakt ilustruje rys.1.



Rys.1. Temperatura ośrodka t, średnia temperatura ciała ϑ_m i strumień ciepła $\dot{q}$ jako funkcje czasu

Ilość ciepła q wymienianego w czasie jednego okresu jest proporcjonalna do różnicy ekstremalnych średnich temperatur ciała. Jeśli przez ϑ_{m1} i ϑ_{m2} oznaczymy odpowiednio największą i najmniejszą średnią temperaturę ciała, to

$$q = W(\vartheta_{m_1} - \vartheta_{m_2}) \qquad (6)$$

Ekstrema średniej temperatury ciała wypadają w chwilach, w których następuje zmiana kierunku przepływu ciapła ($\dot{q} = 0$)

$$\vartheta_{m_1} = \vartheta_m(\beta_1 \tau_o)$$
$$\vartheta_{m_2} = \vartheta_m(\beta_2 \tau_o) \qquad (a)$$

Oznaczmy przez l_o liniowy wymiar charakterystyczny ciała i wprowadźmy następujące bezwymiarowe wielkości zredukowane: zredukowane współrzędne

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}}{l_o}, \quad N = \frac{n}{l_o} \qquad (b)$$

zredukowaną powierzchnię i objętość

$$S = \frac{s}{l_o^2}, \quad V = \frac{v}{l_o^3} \qquad (c)$$

zredukowane temperatury

$$\theta = \frac{\vartheta - t_m}{t_1 - t_2}, \quad T = \frac{t - t_m}{t_1 - t_2} \qquad (d)$$

zredukowany czas[1)]

$$u = \frac{a\tau}{l_o^2}, \quad Fo \equiv u_o = \frac{a\tau_o}{l_o^2} \qquad (e)$$

---

1) Przyjęte powszechnie oznaczenie liczby Fouriera wprowadziliśmy jedynie dla okresu. W trakcie rozważań matematycznych używać będziemy jednak, dla uproszczenia pisowni i uniknięcia nieporozumień, oznaczenia u_o wprowadzając symbol Fo jedynie do końcowych wzorów.

zredukowane warunki brzegowe (liczba Biota)

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha l_o}{\lambda} \tag{f}$$

zredukowany strumień ciepła

$$\dot{Q} = \frac{\dot{q}}{q_{max}} = \frac{\dot{q}}{W(t_1 - t_2)} \tag{g}$$

zredukowaną ilość ciepła wymienianego za period

$$Q = \frac{q}{q_{max}} = \frac{q}{W(t_1 - t_2)} \tag{h}$$

Wielkość q_{max} jest maksymalną ilością ciepła jaką ciało wymieniałoby w czasie jednego okresu, gdyby nagrzewało się w każdym okresie do temperatury t_1 i ostygało do temperatury t_2. W wypadku periodycznych zmian temperatury powierzchni zachodziłoby to przy $\lambda = \infty$.

Korzystając ze stałości l_o, t_1, t_2, t_m, a, można równania (1), (2), (4), (5) i (6) przekształcić do postaci

$$\frac{\partial \theta(\bar{R},u)}{\partial u} = \nabla^2 \theta(\bar{R},u) \tag{1a}$$

$$-\frac{\partial \theta(\bar{R},u)}{\partial N} = \mathrm{Bi}\left[\theta(\bar{R},u) - T(u)\right], \quad \bar{R} \in S \tag{2a}$$

$$\theta_m(u) = \frac{1}{V}\int_V \theta(\bar{R},u)\,dV \tag{4a}$$

$$\dot{Q}(u) = \theta_m(u) \tag{5a}$$

$$Q = \theta_{m_1} - \theta_{m_2} \tag{6a}$$

W celu rozwiązania zagadnienia brzegowego (1a), (2a) zastosujemy dla funkcyj okresowych $\theta(R,u)$ i $T(u)$ uogólnione przekształcenie Laplace'a-Carsona [2] względem zmiennej u. Przekształcenie to definiuje się następująco

$$\text{dla } u>0 \qquad \bar{f}_+(p) = p\int_0^{\infty} f(u)\, e^{-pu} du, \quad p = \sigma_1 + i\omega, \quad \sigma_1 > \sigma_{1_0} \tag{7}$$

$$\text{dla } u<0 \qquad \bar{f}_-(p) = p\int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-pu} du, \quad p = \sigma_2 + i\omega, \quad \sigma_2 < \sigma_{2_0}$$

Dla funkcyjn ograniczonych, a takimi są funkcje θ i T, odcięte zbieżności $\sigma_{1_0} = \sigma_{2_0} = 0$. Przekształcenie odwrotne określone jest równaniem

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{1}{p}\bar{f}_+(p)\, e^{pu} dp + \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{1}{p}\bar{f}_-(p)\, e^{pu} dp\right] \tag{8}$$

Jeśli funkcja f(u) jest funkcją okresową, to funkcje $\bar{f}_+(p)$ i $-\bar{f}_-(p)$ są wzajemnie przedłużeniami analitycznymi i przedstawiają w płaszczyźnie zespolonej jedną funkcję

$$\bar{f}(p) = \bar{f}_+(p) = -\bar{f}_-(p)$$

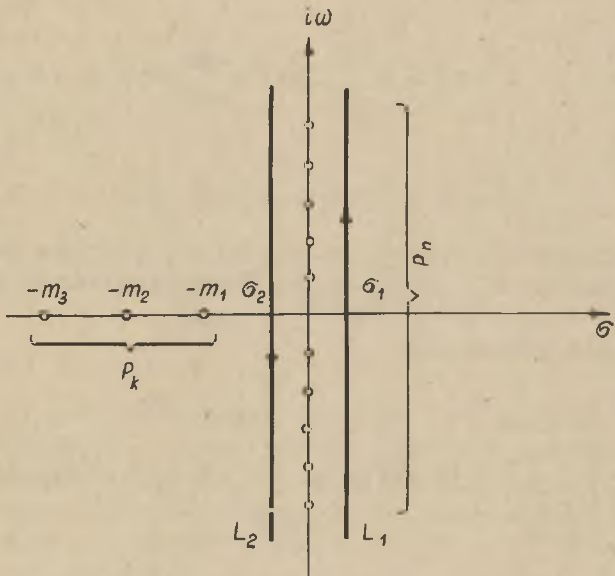
Równanie (8) można więc napisać w postaci

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\sigma_1 - \alpha_\infty}^{\sigma_1 + \alpha_\infty} \frac{1}{p}\bar{f}(p)\, e^{pu} dp + \int_{\sigma_2 - \alpha_\infty}^{\sigma_2 + \alpha_\infty} \frac{1}{p}\bar{f}(p)\, e^{pu} dp\right] \tag{8a}$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L_1} \frac{1}{p}\bar{f}(p)\, e^{pu} dp + \int_{L_2} \frac{1}{p}\bar{f}(p)\, e^{pu} dp\right]$$

Proste całkowania L_1 i L_2 tworzą zamknięty kontur L okrążający oś urojoną (rys.2), w związku z czym

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{p} \bar{f}(p)\, e^{pu} dp \qquad (8b)$$



Rys.2. Płaszczyzna zespolona zmiennej p

Ponieważ funkcja $\bar{f}(p)$ jest zwykłą jednostronną transformatą Laplace'a-Carsona, więc $\bar{f}(p)$ oblicza się jako taką właśnie transformatę. Również i tok postępowania przy rozwiązywaniu równania różniczkowego jest taki sam. Różnica tkwi tylko w transformacji odwrotnej.

Po dokonaniu transformacji równanie (1a) i warunek brzegowy (2a) przyjmując postać

$$p\,\bar{\theta}(\bar{R},p) - p\,\bar{\theta}(\bar{R},0) = \nabla^2 \bar{\theta}(\bar{R},p) \qquad (1b)$$

$$-\frac{\partial \bar{\theta}(\bar{R},p)}{\partial N} = Bi\left[\bar{\theta}(\bar{R},p) - \bar{T}(p)\right], \quad R \in S \qquad (2b)$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia brzegowego można, na zasadzie superpozycji warunków brzegowych i początkowych [3], przedstawić w postaci

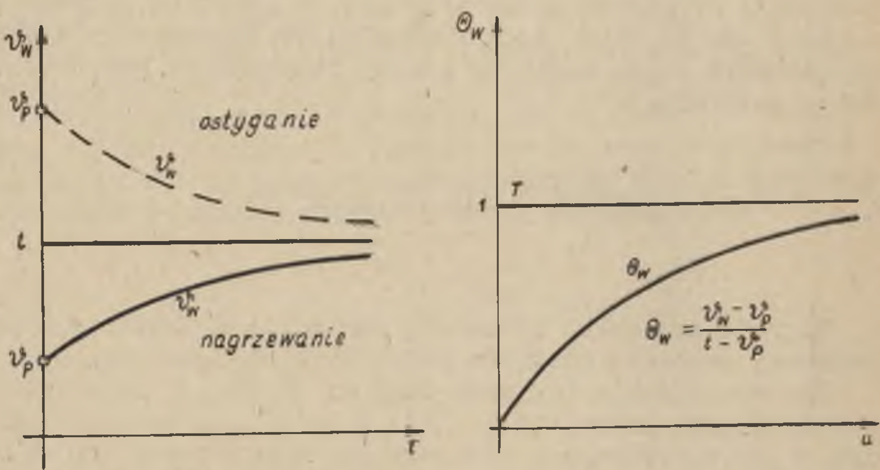
$$\bar{\theta}(\bar{R},p) = \bar{F}(\bar{R},p) + \bar{G}(\bar{R},p)$$

Funkcja $\bar{F}(R,p)$ jest rozwiązaniem równania (1b) przy $\theta(\bar{R},0) = 0$ i warunku brzegowym (2b), natomiast $G(R,p)$ jest rozwiązaniem równania (1b) przy warunku brzegowym $\bar{\theta}(\bar{R},p) = 0$ $(\bar{R} \in S)$.

Funkcja $\bar{F}(\bar{R},p)$ jest więc transformatą funkcji przedstawiającej przebieg temperatury w ciele nagrzewającym się w ośrodku o zmiennej w czasie temperaturze $T(u)$ (lub, w przyp.2, przy zmiennej w czasie temperaturze powierzchni), od temperatury początkowej $\bar{\theta}(\bar{R},0) = 0$. Transformata ta da się zawsze przedstawić w postaci [3]

$$\bar{F}(\bar{R},p) = \bar{T}(p)\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p)$$

gdzie $\bar{\theta}_w(\bar{R},u)$ jest funkcją opisującą zjawisko wyrównywania się temperatury ciała do stałej temperatury ośrodka (lub powierzchni) $T = 1$, od tej samej temperatury początkowej $\bar{\theta}_w(\bar{R},0) = 0$.



Rys.3. Temperatura ciała jako funkcja czasu, w przypadku stałej temperatury ośrodka

Funkcja $G(\bar{R},u)$ jest rozwiązaniem problemu nieustalonego przepływu ciepła w ciele o nierównomiernym początkowym rozkładzie temperatury $\theta(\bar{R},0)$, na powierzchni którego utrzymuje się stała temperatura $T = 0$.

Po uwzględnieniu powyższego, transformata poszukiwanej przez nas okresowej funkcji $\theta(\bar{R},u)$ wyrazi się równaniem

$$\bar{\theta}(\bar{R},p) = \bar{T}(p)\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p) + \bar{G}(\bar{R},p)$$

a sama funkcja

$$\theta(\bar{R},u) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{p}\;\bar{T}(p)\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p) + \bar{G}(\bar{R},p)\;e^{pu}dp$$

lub

$$\bar{\theta}(\bar{R},u) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{p}\,\bar{T}(p)\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p)e^{pu}dp + \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{p}\,\bar{G}(\bar{R},p)e^{pu}dp$$

Druga z całek jest równa zeru, gdyż funkcja $\bar{G}(\bar{R},p)$ nie posiada biegunów wewnątrz konturu całkowania L (na osi urojonej). Gdyby bieguny takie istniały, funkcja $G(\bar{R},u)$ posiadała by składniki periodyczne, a przecież ze wzrostem u dąży ona do zera (ze wzrostem czasu temperatura w dowolnym punkcie ciała zdąża do stałej temperatury powierzchni). Wobec powyższego.

$$\bar{\theta}(\bar{R},u) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{p}\,\bar{T}(p)\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p)\;e^{pu}dp \qquad (9)$$

Wartość tej całki równa się sumie residuów funkcji podcałkowej względem biegunów położonych wewnątrz konturu L.

Dla znalezienia biegunów funkcji $\bar{\theta}_w(\bar{R},p)$ skorzystamy z twierdzenia Boussinesqa [1]. W myśl tego twierdzenia funkcja $\theta_w(\bar{R},u)$ opisująca zjawisko nagrzewania się lub ostygania ciała przy stałej temperaturze ośrodka (lub powierzchni)

$T = 1$, od temperatury początkowej $\theta_w(\bar{R},0) = 0$, da się zawsze (wyłączając półprzestrzeń) przedstawić w postaci

$$\theta_w(\bar{R},u) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\bar{R}) e^{-m_k u} \qquad (10)$$

przy czym funkcje własne $v_k(\bar{R})$ spełniają równanie

$$\nabla^2 v_k(\bar{R}) + m_k v_k(\bar{R}) = 0$$

przy warunku brzegowym

$$-\frac{\partial v_k(\bar{R})}{\partial N} = Bi\left[v_k(\bar{R}) - 1\right]$$

a ciąg wartości własnych spełnia nierówność

$$0 < m_1 < m_2 < m_3 < \dots$$

Współczynniki A_k, wartości własne m_k oraz funkcje własne v_k zależą ponadto od liczby Biota tkwiącej w warunku brzegowym. Zależność ta oczywiście znika jeśli dana jest temperatura powierzchni ciała, bo wówczas $Bi = \infty$.

Prawą stronę równania (10) można przekształcić do postaci dogodniejszej dla obliczenia transformaty $\bar{\theta}_w$. Skorzystajmy w tym celu z warunku początkowego $\theta_w(\bar{R},0) = 0$.

$$0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\bar{R})\, e^{-m_k 0}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\bar{R}) = 1$$

Uwzględniwszy to w równaniu (10), otrzymamy

$$\theta_w(\bar{R},u) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\bar{R})(1 - e^{-m_k u}) \tag{10a}$$

Obliczmy transformatę tak przedstawionej funkcji θ_w

$$\bar{\theta}_w(\bar{R},p) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\bar{R}) \frac{m_k}{p + m_k} \tag{11a}$$

Biegunami funkcji $\bar{\theta}_w(\bar{R},p)$ są więc wartości własne wzięte ze znakiem minus

$$p_k = - m_k$$

Bieguny funkcji $\bar{T}(p)$ najprościej jest wyznaczyć z rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji $T(u)$

$$T(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i \frac{2n\pi}{u_o} u) \tag{12}$$

przy czym współczynniki c_n określone są wzorem

$$c_n = \frac{1}{u_o} \int_0^{u_0} T(u) \exp(-i \frac{2n\pi}{u_o} u)\, du, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{13}$$

Z równania (12) wynika

$$\bar{T}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{p}{p - i \frac{2n\pi}{u_o}} \tag{14}$$

a stąd bieguny funkcji $\bar{\bar{T}}(p)$

$$p_n = i\,\frac{2n\pi}{u_o}$$

dla wszystkich n, przy których $c_n \neq 0$.

Na rys.2 przedstawiono rozmieszczenie biegunów funkcji podcałkowej w płaszczyźnie zespolonej. Wewnątrz konturu L znajdują się tylko bieguny p_n. Po podstawieniu równania (14) do równania (9) i po wykonaniu całkowania, otrzymamy poszukiwaną funkcję $\theta(\bar{R},u)$

$$\theta(\bar{R},u) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{p}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{p}{p - i\,\frac{2n\pi}{u_o}}\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p)e^{pu}dp$$

$$\theta(\bar{R},u) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i \operatorname*{Res}_{p_n = i\frac{2n\pi}{u_o}} \frac{c_n}{p - i\,\frac{2n\pi}{u_o}}\,\bar{\theta}_w(\bar{R},p)\,e^{pu}$$

$$\theta(\bar{R},u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\bar{\theta}_w\left(\bar{R}, i\,\frac{2n\pi}{u_o}\right)\exp\left(i\,\frac{2n\pi}{u_o}\,u\right) \tag{15}$$

Każde dwa wyrazy szeregu (15) o przeciwnych wskaźnikach n są liczbami zespolonymi sprzężonymi. Wyraz zerowy równy jest zeru, bo na mocy (3) $c_o = 0$. Dzięki temu równanie (15) można napisać w postaci

$$\theta(\bar{R},u) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\bar{\theta}_w\left(\bar{R},\ i\,\frac{2n\pi}{u_o}\right)\exp\left(i\,\frac{2n\pi}{u_o}\,u\right) \tag{15a}$$

Wielkości zespolone c_n, $\bar{\theta}_w(\bar{R}, i\frac{2n\pi}{u_o})$ oraz $\exp(i\frac{2n\pi}{u_o}u)$ można rozbić na części rzeczywiste i urojone, w następujący sposób

$$c_n = c_n' + i\,c_n''$$

$$\bar{\theta}_w(\bar{R}, i\frac{2n\pi}{u_o}) = \bar{\theta}_w'(\bar{R}, \frac{2n\pi}{u_o}) + i\,\bar{\theta}_w''(\bar{R}, \frac{2n\pi}{u_o})$$

$$\exp\left(i\frac{2n\pi}{u_o}u\right) = \cos\frac{2n\pi}{u_o}u + i\sin\frac{2n\pi}{u_o}u$$

otrzymując w wyniku kolejną postać równania (15)

$$\theta(\bar{R},u) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(c_n'\bar{\theta}_w' - c_n''\bar{\theta}_w'')\cos\frac{2n\pi}{u_o}u - (c_n'\bar{\theta}_w'' + c_n''\bar{\theta}_w')\sin\frac{2n\pi}{u_o}u \tag{15b}$$

Funkcję $T(u)$ można również rozwinąć w szereg Fouriera względem sinusów i cosinusów

$$T(u) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{u_o}u + b_n\sin\frac{2n\pi}{u_o}u \tag{12a}$$

przy czym współczynniki jego związane są ze współczynnikami szeregu (12) zależnością

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad (n = 0,1,2,3,\dots)$$

Z zależności tej wynika

$$c_n = \frac{a_n}{2}, \qquad c_n = -\frac{b_n}{2}$$

Ostatecznie więc

$$\begin{aligned}\theta(\bar{R},u) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \bar{\theta}'_w + b_n \bar{\theta}''_w) \cos \frac{2n\pi}{u_o} u \\ + (b_n \bar{\theta}'_w - a_n \bar{\theta}''_w) \sin \frac{2n\pi}{u_o} u\end{aligned} \tag{16}$$

Całkując po całej objętości ciała wszystkie wyżej wypisane równania na $\theta(\bar{R},u)$ otrzymamy, na mocy (4a), analogiczne równania na średnią temperaturę ciała $\theta_m(u)$. Przepiszemy tu tylko to ostatnie, wynikowe

$$\begin{aligned}\theta_m(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \bar{\theta}'_{w_m} + b_n \bar{\theta}''_{w_m}) \cos \frac{2n\pi}{u_o} u \\ + (b_n \bar{\theta}'_{w_m} - a_n \bar{\theta}''_{w_m}) \sin \frac{2n\pi}{u_o} u\end{aligned} \tag{17}$$

przy czym, podobnie jak poprzednio

$$\bar{\theta}'_{w_m} = \bar{\theta}'_{w_m} \left(\frac{2n\pi}{u_o}\right) = \operatorname{Re} \bar{\theta}'_{w_m} \left(i \frac{2n\pi}{u_o}\right)$$

$$\bar{\theta}''_{w_m} = \bar{\theta}''_{w_m} \left(\frac{2n\pi}{u_o}\right) = \operatorname{Im} \bar{\theta}_{w_m} \left(i \frac{2n\pi}{u_o}\right)$$

Funkcja $\theta_{w_m}(u)$ podaje przebieg średniej temperatury ciała nagrzewającego się w ośrodku o stałej temperaturze lub przy stałej temperaturze powierzchni. Funkcję tę otrzymamy z równania (10), jeśli obustronnie je scałkujemy w granicach objętości ciała

$$\theta_{w_m}(u) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-m_k u} \qquad (18)$$

$$B_k = A_k \frac{1}{V}\int_V v_k(R)dV$$

W przypadku nagrzewania się lub ostygania ciała przy stałej temperaturze powierzchni, współczynniki B_k zależą tylko od kształtu ciała a w przypadku konwekcyjnej wymiany ciepła na powierzchni, zależą również od liczby Biota.

Po zróżniczkowaniu względem u równania (17) otrzymamy, w myśl (5a), równanie na strumień ciepła

$$\dot{Q}(u) = \frac{2\pi}{u_o}\sum_{n=1}^{\infty} n\Big[(b_n\bar{\theta}'_{w_m} - a_n\bar{\theta}''_{w_m})\cos\frac{2n\pi}{u_o}u - (a_n\bar{\theta}'_{w_m} + b_n\bar{\theta}''_{w_m})\sin\frac{2n\pi}{u_o}u\Big] \qquad (19)$$

Dla wyznaczenia ilości ciepła wymienianego w czasie jednego okresu, obliczmy ekstremalne średnie temperatury ciała

$$\theta_{m_1} = \theta_m(\beta_1 u_o) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\bar{\theta}'_{w_m} + b_n\bar{\theta}''_{w_m})\cos n\pi\beta_1 + (b_n\bar{\theta}'_{w_m} - a_n\bar{\theta}''_{w_m})\sin n\pi\beta_1$$

$$\theta_{m_2} = \theta_m(\beta_2 u_o) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\bar{\theta}'_{w_m} + b_n\bar{\theta}''_{w_m})\cos n\pi\beta_2 + (b_n\bar{\theta}'_{w_m} - a_n\bar{\theta}''_{w_m})\sin n\pi\beta_2$$

Po podstawieniu powyższego do równania (6a) i dokonaniu prostych przekształceń, otrzymamy

$$Q = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi(\beta_1 - \beta_2)\Big[(b_n \bar{\theta}'_{w_m} - a_n \bar{\theta}'_{w_m})\cos n\pi(\beta_1+\beta_2) - (a_n \bar{\theta}'_{w_m} + b_n \bar{\theta}''_{w_m})\sin n\pi(\beta_1+\beta_2)\Big] \tag{20}$$

Jeśli rozpatrujemy wymianę ciepła przy periodycznych zmianach temperatury ośrodka, to funkcja θ_{w_m} zależy parametrycznie od liczby Biota tkwiącej w warunku brzegowym. Ta sama zależność pojawia się więc w funkcjach $\bar{\theta}'_{w_m}$ i $\bar{\theta}''_{w_m}$

$$\bar{\theta}'_{w_m} = \bar{\theta}'_{w_m}\left(Bi, \frac{2n\pi}{Fo}\right)$$

$$\bar{\theta}''_{w_m} = \bar{\theta}''_{w_m}\left(Bi, \frac{2n\pi}{Fo}\right)$$

Zależność funkcjonalną Q można więc w skrócie zapisać następująco

$$Q = f(Bi, Fo)$$

Jeśli rozpatrujemy periodyczne zmiany temperatury powierzchni, znika zależność od liczby Biota, wskutek podstawienia $Bi = \infty$

$$Q = f(Fo)$$

Równania (16), (17), (19) i (20) rozwiązują problem sformułowany na wstępie pracy. Rozwiązanie sprowadza się do znalezienia funkcyj $\theta_w(\bar{R},u)$ i $\theta_{w_m}(u)$ opisujących zjawisko nieustalonego ruchu ciepła w ciele stałym o tym samym kształcie, przy stałej temperaturze ośrodka lub powierzchni. Zjawisko to jest dobrze znane i szeroko opisywane w literaturze poświęconej wymianie ciepła. Dla wielu regularnych kształtów ciał podane są ściśle rozwiązania analityczne, przy czym ich transformaty Laplace'a-Carsona mają postać skończoną. Dla ciał o nieregularnych kształtach można zastosować którąś z przybliżonych lub graficznych metod rozwiązywania. Gdy wszystko to zawiedzie, można uciec się do eksperymentu (bezpośredniego lub przy użyciu analogii), jest on jednak znacznie prostszy od doświadczalnego badania wprost zjawisk periodycznych.

Przy doświadczalnym wyznaczaniu funkcji θ_W należy ją mierzyć w tych punktach, dla których chcemy znać przebieg temperatury periodycznej. Jeśli chodzi nam tylko o określenie strumienia ciepła Q lub ilości ciepła wymienianego za okres Q, to wystarczy eksperymentalnie ustalić zmienność w czasie średniej temperatury ciała $\theta_{w_m}(u)$ przy nagrzewaniu względnie ostyganiu w ośrodku o stałej temperaturze. Temperaturę tę można wyznaczyć pośrednio, mierząc ilość ciepła pobieranego (oddawanego) przez ciało podczas nagrzewania (ostygania). Między dwoma tymi wielkościami istnieje prosty związek.

Jeśli ciało po pewnym czasie nagrzało się do średniej temperatury ϑ_{w_m}, od temperatury początkowej ϑ_p, to pochłonęło ciepło w ilości

$$q_w = W(\vartheta_{w_m} - \vartheta_p)$$

Maksymalną ilość ciepła pochłonie po czasie nieskończenie długim nagrzawszy się do temperatury ośrodka $\vartheta_{w_m} = t$

$$q_{w_{max}} = W(t - \vartheta_p)$$

Biorąc stosunek obu tych wielkości, otrzymamy

$$\frac{q_w}{q_{w_{max}}} = \frac{\vartheta_{w_m} - \vartheta_p}{t - \vartheta_p}$$

lub inaczej

$$Q_w(u) = \theta_{w_m}(u) \qquad (21)$$

Przy opracowywaniu wyników pomiarów należy poszukiwać funkcyj θ_w i θ_{w_m} w postaci szeregów (10) i (18), biorąc oczywiście sumę skończonej ilości wyrazów. Dla przypadków najczęściej spotykanych w praktyce szeregi te są szybkozbieżne i uwzględnienie kilku pierwszych wyrazów daje zupełnie zadowalającą dokładność.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 26.I.1963 r.

LITERATURA

[1] J. Boussinesq - "Theorie analitique de la chaleur", Paris 1901.

[2] M.I. Kontorowicz - "Operacionnoje isczislenije i niestacjonarnyje jawlenija w elektriczeskich cepjach", GITTL Moskwa 1953.

[3] A.W. Łykow - "Tieorija tiepłoprowodnosti", GITTL Moskwa 1952.

[4] S. Ochęduszko - "Teoria maszyn cieplnych" cz.III, PWN Warszawa 1954.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ

Р е з ю м е

Рассмотрена задача теплопередачи в твердом теле при периодических изменениях температурн окружающей среды или поверхности тела. Формулирующие задачу уравнения (1) ÷ (6) приведено к безразмерному виду (Ia) ÷ (6a), введя критерия подобия (b) ÷ (h).

Полученны уравнения определяющие изменение во времени температуры в произвольной точке тела (16), теплового потока чарез поверхность тела (19) и количество тепла обменяемого телом за один период (20). Эти уравнения сводят проблему решения задачи теплообмена при периодических воздействиях к решению задачи теплообмена в теле той же самой конфигурации при постоянной температуре среды или поверхности тела [уравнения (10) и (18)].

PERIODICAL HEAT EXCHANGE IN THE SOLID BODIES WITHOUT INTERNAL SOURCES

S u m m a r y

Heat exchange problem in a solid body at periodical temperature variations of a medium or a surface had been taken into consideration. Equations (1) - (6) formulating the problem had been verified up to dimensionless form (1a)-(6a) by introducing similarity criteria (b) -(h).

Equations defining mutability of temperature in time at an arbitrary point of the body (16), heat stream across the surface of a body (19) and the quantity of heat exchanged during one period (20), had been achieved.

These equations bring the solution of periodical heat exchange to the solution of the problem of heat exchange in a body of the same shape at constant temperatures of the medium or of the surface [Eq.(10)-(18)].