ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 84 Energetyka z.11 1963

TADEUSZ J.ŚWIERZAWSKI

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

EFEKTYWNE PRZEKROJE CZYNNE W TERMICZNYCH REAKTORACH JĄDROWYCH

Streszczenie. W pracy wyjaśniono metodę C.H. Westcotta, obliczania efektywnych przekrojów czynnych dla reakcji neutronów z pochłaniaczami nie podlegającymi prawu 1/v, w reaktorach o strumieniu będącym kombinacją neutronów rozkładu Maxwella-Boltzmanna i rozkładu epitermicznego 1/E. Jako przykład ważności neutronów epitermicznych może być fakt, że w dobrze moderowanym reaktorze około 5-30% rozszczepień uranu U-235 powodują właśnie neutrony epitermiczne. Podano sposób stosowania efektywnych przekrojów czynnych Westcotta w bilansach neutronów i w równaniach krytycznych.

1. Określenie strumienia

Westcott zakłada, że rozkład strumienia neutronów pod względem energetycznym, może być przedstawiony jako suma rozkładu termicznego Maxwella-Boltzmanna

$$\left(\frac{d\Phi}{dE}\right)_{MB} = \Phi_{MB} \frac{E}{(kT)^2} e^{-E/kT} = (\Phi(E))_{MB} \qquad (1)$$

i rozkładu epitermicznego 1/E

$$\left(\frac{d\Phi}{dE}\right)_{epi} = \Phi_{MB}\ \beta\Delta/E = (\Phi(E))_{epi} \qquad (2)$$

tak, że

$$\frac{d\Phi}{dE} = \Phi_{MB}\left[\frac{E}{(kT)^2}e^{-E/kT} + \frac{\beta\Delta}{E}\right] = \Phi(E) \quad (3)$$

gdzie $\Delta = 1$ dla energii powyżej obcięcia epitermicznego równego μkT oraz $\Delta = 0$ dla wszystkich niższych energii. Westcott zaleca stosowanie wartości $\mu = 5$. T - oznacza temperaturę makswelowskiego rozkładu neutronów.

Liczba β jest wskaźnikiem względnej wartości wkładu epitermicznego i makswelowskiego do strumienia neutronów. Może ona być wyrażona jako stosunek gęstości neutronów epitermicznych do gęstości neutronów termicznych.

Gęstość neutronów epitermicznej grupy energetycznej n_{epi} wynosi

$$n_{epi} = \int_{\mu kT}^{\infty}\left(\frac{d\Phi}{dE}\right)_{epi}\frac{dE}{v(E)} = \int_{\mu kT}^{\infty}\frac{\beta\Phi_{MB}}{E}\frac{dE}{\sqrt{2E/m}} = \beta\Phi_{MB}\sqrt{\frac{2m}{\mu kT}} \quad (4)$$

Gęstość neutronów podlegających rozkładowi Maxwella-Boltzmanna jest równa

$$n_{MB} = \int_0^{\infty}\left(\frac{d\Phi}{dE}\right)_{MB}\frac{dE}{v(E)} = \int_0^{\infty}\Phi_{MB}\frac{E}{(kT)^2}e^{-E/kT}\frac{dE}{\sqrt{2E/m}} = \Phi_{MB}\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \quad (5)$$

Stosunek gęstości epitermicznych neutronów do gęstości neutronów termicznych jest równy

$$\frac{n_{epi}}{n_{MB}} = \beta b \quad (6)$$

gdzie:

$$b = 4/\sqrt{\pi\mu} \quad (7)$$

Dla wartości $\mu = 5$, jaką zaleca Westcott, b = 1,01.

2. Efektywne przekroje czynne

Efektywny przekrój czynny $\hat{\sigma}$ został zdefiniowany przez Westcotta jako taki, który pomnożony przez całkowitą gęstość neutronów n (ze spektru Maxwella-Boltzmanna i epitermicznego) i przez standardową szybkość v_o = 2200 m/sec, da na wynik tę część nukleonów, które wejdą w określonego typu reakcję z neutronami w jednostce czasu. Na przykład część atomów U-235, które ulegają rozszczepieniu wynosi $\hat{\sigma}_f(25) n v_o$. Wartość $\hat{\sigma}$ będziemy nazywali efektywnym przekrojem czynnym dla strumienia neutronów o szybkości 2200 m/sec. Na podstawie definicji $\hat{\sigma}$ można przedstawić w postaci równania

$$\hat{\sigma} n v_o = \int_0^\infty \sigma(E) \frac{d\Phi}{dE} dE \tag{8}$$

Przy posługiwaniu się równaniami dyfuzji dla neutronów termicznych będzie wymagana znajomość wartości efektywnego przekroju czynnego $\bar{\sigma}$, który po pomnożeniu przez strumień neutronów termicznych da na wynik tę samą ilość reakcji przypadających na jednostkę czasu jak wartość $\hat{\sigma}$ pomnożona przez strumień neutronów nv_o. Zatem zależność pomiędzy $\hat{\sigma}$ i $\bar{\sigma}$ ma postać

$$\hat{\sigma} n v_o = \bar{\sigma} \Phi_{MB} \tag{9}$$

lecz

$$n = n_{MB} + n_{epi} \tag{10}$$

$$\Phi_{MB} = n_{MB} \bar{v}_{MB} \tag{11}$$

$$\bar{v}_{MB} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{12}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{2kT_o}{m}} \tag{13}$$

$$T_o = 293,6\ {}^oK \tag{14}$$

wobec tego równanie (9) przyjmie postać

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma}\left(1 + \frac{n_{epi}}{n_{MB}}\right)\sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}} = \hat{\sigma}(1 + b\beta)\sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}} \qquad (15)$$

3. Tablice wartości

Westcott podał zestawienia wartości $\hat{\sigma}$ dla pochłaniaczy często spotykanych w technice reaktorowej, które nie podlegają prawu 1/v (U-235, U-238, Pu-240, Pu-241, Xe-135 i Sm-149). Wartość $\hat{\sigma}$ wyrażona jest jako suma dwu członów

$$\hat{\sigma} = (g + rs)\,\sigma_o \qquad (16)$$

gdzie:

σ_o - jest przekrojem czynnym dla rozpatrywanej reakcji przy prędkości neutronów 2200 m/sec,

g i s - są funkcjami temperatury. Są one różne dla różnych reakcji.

Wartość r jest powiązana z wartością β poprzez zależność

$$r = \frac{\beta}{1 + b\beta} \qquad (17)$$

Iloczyn br jest stosunkiem gęstości neutronów epitermicznych do całkowitej gęstości neutronów. Podstawiając równanie (17) do równania (15) można również wyrazić $\bar{\sigma}$ przez wartość r

$$\bar{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}\left[\frac{\pi T_o}{4T}\right]^{1/2}}{1 - br} = \frac{0.887\,\hat{\sigma}\left[\frac{T_o}{T}\right]^{1/2}}{1 - 1,01\ r} \qquad (18)$$

Równanie (18) jest podstawą do obliczenia wartości efektywnego przekroju czynnego dla strumienia Maxwella-Boltzmanna przy użyciu tablic Westcotta.

Wzory dla wyznaczenia wartości g i s można wyprowadzić z definicyjnego równania (8) na $\hat{\sigma}$, które można napisać w postaci

$$\hat{\sigma} = \frac{\int\limits_0^\infty \sigma(E)\,\frac{d\Phi}{dE}\,dE}{v_o n} \tag{19}$$

Całkowitą gęstość neutronów n można obliczyć na podstawie równania (4), (5) i (13)

$$n = n_{MB} + n_{epi} = n_{MB}\left(1 + \frac{n_{epi}}{n_{MB}}\right) = \frac{\Phi_{MB}}{\bar{v}_{MB}}(1 + b\beta) \tag{20}$$

Podstawiając do równania (19) zależności (3) i (20) uzyskamy

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{v}_{MB}}{v_o}\;\frac{\int\limits_0^\infty \sigma(E)\,\frac{E}{(kT)^2}\,e^{-E/kT}\,dE + \beta\int\limits_{\mu kT}^\infty \sigma(E)\,\frac{dE}{E}}{1 + b\beta} \tag{21}$$

lub w innej postaci

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{v}_{MB}}{v_o}\int\limits_0^\infty \sigma(E)\,\frac{E}{(kT)^2}\,e^{-E/kT}\,dE \; +$$

$$+\;\frac{\bar{v}_{MB}}{v_o}\,\frac{\beta}{1+b\beta}\left[\int\limits_{\mu kT}^\infty \sigma(E)\,\frac{dE}{E} - b\int\limits_0^\infty \sigma(E)\,\frac{E}{(kT)^2}\,e^{-E/kT}\,dE\right] \tag{22}$$

Ponieważ Westcott wyraża wartość $\hat{\sigma}$ w postaci

$$\hat{\sigma} = \sigma_o\,(g + rs) \tag{23}$$

i ponieważ $\frac{\beta}{1+b\beta} = r$, na podstawie równania (22) możemy napisać

$$g = \frac{\bar{v}_{MB}}{v_o \sigma_o} \int_o^{\infty} \sigma(E) \frac{E}{(kT)^2} e^{-E/kT} dE \qquad (24)$$

oraz

$$s = \frac{\bar{v}_{MB}}{v_o \sigma_o} \left[\int_{\mu kT}^{\infty} \sigma(E) \frac{dE}{E} - b \int_o^{\infty} \sigma(E) \frac{E}{(kT)^2} e^{-E/kT} dE \right] =$$

$$= \frac{\bar{v}_{MB}}{v_o \sigma_o} \int_{\mu kT}^{\infty} \sigma(E) \frac{dE}{E} - bg \qquad (25)$$

Równania (24) i (25) były podstawą do obliczenia wartości g i s występujących w tablicach.

W przypadku pochłaniaczy podlegających prawu 1/v, g=1 i s = 0. Można to sprawdzić w następujący sposób:

$$\sigma(E) = \sigma_o v_o / v\,(E) = \sigma_o v_o \sqrt{m/2E} \qquad (26)$$

co po podstawieniu do zależności (24) i po uwzględnieniu (12) daje na wynik

$$g = \frac{\bar{v}_{MB}}{v_o \sigma_o} \int_o^{\infty} \sigma_o v_o \sqrt{\frac{m}{2kT}} \sqrt{\frac{E}{kT}}\, e^{-E/kT} \frac{dE}{kT} = \bar{v}_{MB} \sqrt{\frac{m}{2kT}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \qquad (27)$$

W podobny sposób podstawiając równanie (26) do (25) otrzymamy

$$s = \bar{v}_{MB} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mu kT} \frac{dE}{E^{3/2}} - bg = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sqrt{\frac{2m}{\mu kT}} - \frac{4}{\sqrt{\pi \mu}} = 0 \qquad (28)$$

Takie rozbicie wartości $\hat{\sigma}$ na człony g i rs pozwala również na podział wartości $\bar{\sigma}$, określonej zależnością (18), w ten sposób że w rezultacie otrzyma się osobne wyrażenie ważne dla reakcji z neutronami rozkładu MB, a osobne wyrażenie dla neutronów epitermicznych:

$$\bar{\sigma}_{MB} = \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}}\, g\, \sigma_o \qquad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{epi} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{MB} = \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}}\, r\, \frac{s + bg}{1 - br}\, \sigma_o \qquad (30)$$

Jeżeli strumień neutronów termicznych Φ_{MB}, które podlegają rozkładowi MB pomnożymy przez wartość $\bar{\sigma}_{MB}$ określoną równaniem (29) otrzymamy ilość reakcji z neutronami grupy MB w jednostce czasu, a pomnożenie powyższego strumienia przez wartość σ_{epi} równ. (30) da na wynik ilość reakcji z neutronami epitermicznymi w jednostce czasu.

4. Obliczanie r

Stosowanie tablic Westcotta wymaga znajomości obliczenia wartości r dla rozpatrywanego układu. Wartość r została zdefiniowana w następujący sposób

$$r = \frac{\sqrt{\pi\mu}}{4}\, \frac{n_{epi}}{n_{MB} + n_{epi}} \qquad (31)$$

W dalszych rozważaniach zostanie wykazane, że r można określić na podstawie zależności

$$r = \frac{A\, g_f}{1 - As_f} \qquad (32)$$

gdzie g_f oraz s_f są współczynnikami Westcotta dla przekrojów czynnych na rozszczepienie, odnoszącymi się do jąder rozszczepialnych znajdujących się w rozpatrywanym reaktorze.

Wartość A jest równa

$$A = \frac{\nu \varepsilon p e^{-B^2\tau} \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}}\; N_f\, \sigma_{of}\, V'}{\Psi_{epi}\, \xi \sum_s V''} \tag{33}$$

gdzie oznaczają:

ν, ε, p, $e^{-B^2\tau}$ - wielkości omówione w kursie teorii reaktorów jądrowych,

N_f - ilość atomów rozszczepialnych w 1 cm^3 paliwa,

σ_{of} - przekrój czynny na rozszczepianie jądra rozszczepialnego przy szybkości neutronów 2200 m/sec,

V' - objętość paliwa,

V" - objętość moderatora,

Ψ_{epi} - współczynnik "niekorzyści" dla neutronów epitermicznych.

$$\Psi_{epi} = n''_{epi}/n'_{epi} \tag{34}$$

gdzie podwójny apostrof odnosi się do moderatora a pojedynczy do paliwa,

$\xi \sum_s$ - zdolność moderacji.

Wyprowadzenie równania (32) jest następujące:
Produkcję neutronów rozszczepieniowych przedstawia zależność

$$\nu \varepsilon N_f\, \hat{\sigma}_f\, n' v_o\, V'$$

gdzie n' jest gęstością neutronów w paliwie. Gęstość spowalniania w moderatorze q_o, przy energii rozszczepieniowej, wyraża się tą wielkością podzieloną przez objętość moderatora

$$q_o = \nu \varepsilon N_f \hat{\sigma}_f n' v_o V'/V'' \tag{35}$$

Gęstość spowalniania przy energii epitermicznej E wynosi

$$q(E) = p(E)\, e^{-B^2\tau(E)}\, q_o \tag{36}$$

W celu uproszczenia rozważań założymy, że $p(E)$ oraz $\tau(E)$ posiadają wartości odpowiadające energii termicznej i że $p(E)$ odnosi się tylko do pochłaniania rezonansowego w U-238. Wówczas możemy napisać zależność

$$q = \nu \varepsilon p\, e^{-B^2\tau} N_f \hat{\sigma}_f n' v_o V'/V'' \tag{37}$$

którą można traktować jako niezależną od energii. Założenie takie oznacza, że pochłanianie epitermiczne, które nas interesuje, występuje przy energiach bliskich energii termicznej poniżej najniższego rezonansu w U-238. Założenie takie jest do przyjęcia w przypadku Pu-239, Pu-240 oraz Xe-135 lecz w przypadku U-235 jest obarczone większym błędem. W każdym przypadku jednak błąd popełniany nie jest duży jeżeli p oraz $e^{-B^2\tau}$ mają wartości bliskie jedności.

Składowa epitermiczna strumienia neutronów w moderatorze wynosi

$$\left(\frac{d\Phi''}{dE}\right)_{epi} = \frac{q}{\xi \Sigma_s E} = \frac{\nu \varepsilon p e^{-B^2\tau} v_o N_f \hat{\sigma}_f n' V'}{\xi \Sigma_s E V''} \tag{38}$$

Gęstość neutronów epitermicznych w moderatorze określa równanie

$$n''_{epi} = \int_{\mu kT}^{\infty} \frac{1}{v(e)} \left(\frac{d\Phi''}{dE}\right)_{epi} dE = \frac{\nu \varepsilon p e^{-B^2\tau} v_o N_f \hat{\sigma}_f n' V' \sqrt{\frac{2m}{\mu kT}}}{\xi \Sigma_s V''} \tag{39}$$

Gęstość neutronów epitermicznych w paliwie można wyznaczyć z zależności (39) biorąc pod uwagę współczynnik "niekorzyści" dla neutronów epitermicznych określony równaniem (34)

$$n'_{epi} = \frac{\nu \varepsilon p e^{-B^2\tau} v_o N_f \hat{\sigma}_f n' V' \sqrt{\frac{2m}{\mu kT}}}{\Psi \xi \Sigma_s V''} \qquad (40)$$

teraz możemy zastąpić wartość $\hat{\sigma}_f$ wyrażeniem Westcotta

$$\hat{\sigma} = \sigma_{fo}(g_f + rs_f) \qquad (41)$$

oraz skorzystać z zależności

$$v_o = \sqrt{\frac{2\,kT_o}{m}}$$

oraz

$$n'_{epi} = \frac{4}{\sqrt{\pi\mu}} rn' , \qquad (42)$$

Wspólny wyraz n' odpadnie gdy porównamy wyrażenie (40) z wyrażeniem (42) i w rezultacie otrzymamy

$$\frac{4}{\sqrt{\pi\mu}} r = \frac{\nu \varepsilon p e^{-B^2\tau} N_f \sigma_{fo} (g_f + rs_f) V' \sqrt{\frac{4T_o}{\mu T}}}{\Psi \xi \Sigma_s V''} \qquad (43)$$

Dzieląc to ostatnie równanie przez $4/\sqrt{\pi\mu}$ dostaniemy zależność

$$r = A(g_f + rs_f) \qquad (44)$$

Jedyną wielkością wymagającą omówienia jest współczynnik niekorzyści dla neutronów epitermicznych. W przypadku reaktorów jednorodnych $\Psi_{epi} = 1$. Ponieważ założyliśmy, że pochłanianie epitermiczne lub rezonansowe zachodzi zasadniczo w U-238 wobec tego $\psi_{epi} = 1$ również w przypadku reaktorów niejednorodnych pracujących na uranie wysoko wzbogaconym.

Dla reaktorów niejednorodnych ψ_{epi} oblicza się jako jeden z kolejnych kroków przy wyznaczeniu prawdopodobieństwa uniknięcia wychwytu rezonansowego zgodnie z wytycznymi zawartymi w podręcznikach omawiających fizykę reaktorów jądrowych [4], [5].

Jak wynika z praktyki, w dobrze moderowanych reaktorach ψ_{epi} różni się tylko o kilka procent od jedności, co nie zawsze dotyczy wartości współczynnika niekorzyści dla neutronów termicznych. Dlatego w przypadku reaktorów niejednorodnych, dla których ψ_{epi} nie było jeszcze liczone, można przyjąć w pierwszym przybliżeniu $\psi_{epi} = 1$.

W przypadku reaktora jednorodnego w którym $V' = V''$ oraz $\psi_{epi} = 1$, równanie (43) można napisać w postaci

$$\frac{4}{\sqrt{\pi\mu}}\, r = br = \frac{\nu \varepsilon p e^{-B^2 \tau} N_F \hat{\sigma}_f(F) \sqrt{\frac{4T_o}{\mu T}}}{\xi \Sigma_s} \tag{43a}$$

Ale

$$\eta(F) = \nu \frac{\hat{\sigma}_f(F)}{\hat{\sigma}_a(F)} \tag{45}$$

oraz

$$f(F) = \frac{N_F \hat{\sigma}_a(F)}{\Sigma_a} = \frac{\hat{\Sigma}_a(F)}{\Sigma_a} \tag{46}$$

gdzie

$$\hat{\sigma}_x(F) = \left[\sigma_{2200 \text{ dla x-tej reakcji}}\right]\left[g_x + rs_x\right]$$

oraz

N_F - ilość atomów materiału rozszczepialnego w 1 cm^3

$$\Sigma_a = N_{28}\ \sigma_{o,a}(28)\, g_{28} + \sum_{i \neq 28} N_i\ \sigma_{o,a}(i)\left[g_i + rs_i\right] \tag{47}$$

indeks i w sumowaniu oznacza wszystkie materiały w reaktorze z wyjątkiem U-238. Pochłaniania epitermicznego w U-238 nie uwzględniono osobno gdyż wyraz (1-p) uwzględnia już to pochłanianie.
Równanie (43) można napisać w postaci

$$r = \frac{\nu \frac{\hat{\sigma}_f(F)}{\hat{\sigma}_a(F)} \varepsilon p e^{\frac{-B^2\tau N_F \hat{\sigma}_a(F)}{\Sigma_a}} \hat{\Sigma}_a \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}}}{\xi \Sigma_s} \tag{48}$$

lub podstawiając zależności (45) i (46) otrzymamy

$$r = \frac{\eta \varepsilon p f e^{-B^2\tau} \hat{\Sigma}_a \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}}}{\xi \Sigma_s} = \frac{k_\infty e^{-B^2\tau}}{\xi \Sigma_s} \hat{\Sigma}_a \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}} \tag{49}$$

Jeżeli równanie (18) przedstawimy w postaci

$$\bar{\Sigma}_a = \hat{\Sigma}_a \sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}} \cdot \frac{1}{1 - br} \tag{50}$$

i podstawimy do równania (49) otrzymamy zależność

$$r = k_\infty \, e^{-B^2\tau} \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma_s} (1 - br) \tag{51}$$

lub

$$\frac{r}{1-br} = k_\infty e^{-B^2\tau} \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma_s} \tag{52}$$

Równanie (52) ma postać podobną do tej jaką wyprowadził Westcott w swej pracy [6] dla nieskończenie dużego reaktora krytycznego. (Westcott rozpatrywał tylko część makswellowską widma przy obliczaniu Σ_a).

Równanie (51) można też napisać w postaci

$$r = \frac{k_\infty e^{-B^2\tau}\bar{\Sigma}_a}{\xi\Sigma_s + \frac{4}{\sqrt{\pi\mu}} k_\infty e^{-B^2\tau}\bar{\Sigma}_a} \qquad (53)$$

Jeżeli rozpatrywać będziemy nieskończenie duży reaktor krytyczny

$$k_\infty e^{-B^2\tau} = 1$$

i równania (52) oraz (53) przybiorą postać

$$\frac{r}{1-br} = \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi\Sigma_s} \qquad (54)$$

$$r = \frac{\Sigma_a/\xi\Sigma_s}{1+b\Sigma_a/\xi\Sigma_s} \qquad (55)$$

W równaniach tych $\bar{\Sigma}_a$ wyznacza się jak poprzednio z zależności (50).

W przypadku krytycznego reaktora o nieskończenie dużych wymiarach, dla którego r jest bardzo małą wartością, równanie (54) przyjmie postać

$$r = \frac{\bar{\Sigma}_a}{\Sigma_s} \qquad (56)$$

Równania (54) i (56) wskazują, że wartość r zależy w stosunku odwrotnym od zdolności moderacji.

5. Przekroje czynne Westcotta w bilansach neutronów i w równaniach krytycznych

Dla stanu ustalonego równanie bilansu neutronów MB podlegających rozkładowi Maxwella-Boltzmanna w ośrodku rozmnażającym ma postać

$$\text{produkcja MB} - \text{pochłanianie MB} - \text{ucieczka MB} = 0 \tag{57}$$

gdzie wyraz źródła określony jest równaniem:

Źródło neutronów MB = neutrony rozszczepieniowe - ucieczka podczas spowalniania do energii termicznych - pochłanianie rezonansowe w U-238 - pochłanianie epitermiczne (58)

Pochłanianie neutronów MB oraz neutronów epitermicznych można połączyć w jedno wyrażenie stosują przekroje czynne Westcotta. Należy podkreślić, że ucieczka neutronów epitermicznych figuruje w równaniu (58).

Dla stanu ustalonego równanie dyfuzji neutronów MB ma postać:

$$D\nabla^2 \phi_{MB}(r) - \hat{\Sigma}_a \phi_{2200}(r) + pq(r\tau_{th}) = 0 \tag{59}$$

gdzie oznaczają

$\phi_{MB} = n_{MB}\,\bar{v}_{MB}$,

$\phi_{2200} = n\,v_{2200}$,

Σ_a - całkowity przekrój czynny na pochłanianie.

Gęstość spowalniania neutronów w źródle wynosi

$$q_o = q\,(r,o) = \nu\varepsilon\hat{\Sigma}_f(F)\phi_{2200} \tag{60}$$

Załóżmy, że

$$q(r,\tau) = \nu\varepsilon\sum_f(F)\,\phi_{2200}\,g(\tau) \qquad (61)$$

gdzie $\sum_f(F)$ jest makroskopowym przekrojem czynnym na rozszczepianie materiału F.
Stosujemy równanie wieku Fermiego

$$\nabla^2 q - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \qquad (62)$$

Podstawiając równanie (61) do równania (62) i dzieląc wynik przez q otrzymamy

$$\frac{\nabla^2\phi_{2200}}{\phi_{2200}} = \frac{1}{g(\tau)}\,\frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau} \qquad (63)$$

Ponieważ lewa strona równania (63) jest tylko funkcją współrzędnych x,y,z, a lewa strona jest tylko funkcją τ, można każdą ze stron przyrównać do wartości stałej, którą oznaczymy przez $-B^2$

$$\frac{\nabla^2\phi_{2200}}{\phi_{2200}} = -B^2 \qquad (64)$$

$$\frac{dg(\tau)}{g(\tau)\,d\tau} = -B^2 \qquad (65)$$

Wartość $g(\tau)$ można uzyskać przez całkowanie ostatniego równania w granicach od 0 do τ. W rezultacie otrzymamy

$$\left[\ln g(\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau} = -B^2\tau$$

a ponieważ $g(0) = 1$

$$g(\tau) = e^{-B^2\tau} \qquad (66)$$

Podstawiając równanie (66) do zależności (61) otrzymamy

$$q(r,\tau) = \nu\varepsilon \hat{\Sigma}_f(F)\, \phi_{2200} e^{-B^2\tau} \tag{67}$$

a po podstawieniu równania (67) do równania (59)

$$D\nabla^2 \phi_{MB} - \hat{\Sigma}_a(\tau)\, \phi_{2200} + p\nu\varepsilon \hat{\Sigma}_f(F)\, \Phi_{2200}\, e^{-B^2\tau} = 0 \tag{68}$$

Stosując definicję strumienia napiszemy

$$D\nabla^2 \bar{v}n_{MB} - \hat{\Sigma}_a nv_{2200} + p\nu\varepsilon \hat{\Sigma}_f(F)\, nv_{2200}\, e^{-B^2\tau} = 0 \tag{69}$$

Z drugiej strony jednak na podstawie zależności (12) i (13) mamy

$$D\nabla^2 \bar{v}n_{MB} = D\sqrt{\frac{4T}{\pi T_o}}\, v_{2200}\ \nabla^2 n_{MB} \tag{70}$$

a na podstawie (10), (31) oraz (63)

$$n = n_{MB} + n_{epi} = n_{MB}\left(1 + \frac{n_{epi}}{n_{MB}}\right) = n_{MB}\left(1 + \frac{br}{1-br}\right) = \frac{n_{MB}}{1-br} \tag{71}$$

Podstawiając zależności (70) i (71) do równania (69) otrzymamy

$$D\sqrt{\frac{4T}{\pi T_o}}\, \nabla^2 n_{MB} - \hat{\Sigma}_a \frac{n_{MB}}{1-br} + p\nu\varepsilon \hat{\Sigma}_f(F)\, \frac{n_{MB}}{1-br}\, e^{-B^2\tau} = 0$$

$$\nabla^2 n_{MB} + \left(\frac{p\nu\varepsilon e^{-B^2\tau}\hat{\Sigma}_f(F) - \hat{\Sigma}_a}{D}\right) \frac{\sqrt{\frac{\pi T_o}{4T}}}{1 - br}\, n_{MB} = 0 \tag{72}$$

Stosując równanie (18) dla określenia $\bar{\Sigma}$ oraz $\hat{\Sigma}$ zależność (72) przybierze postać:

$$\frac{\nabla^2 n_{MB}}{n_{MB}} + \frac{p\,\nu\,\varepsilon\, e^{-B^2\tau}\,\bar{\Sigma}_f(F) - \bar{\Sigma}_a}{D} = 0 \qquad (73)$$

Ze względu na równania (64) i (73) możemy napisać zależność

$$\frac{\nabla^2 n_{MB}}{n_{MB}} = \frac{(v_{2200})\left(\frac{1}{1 - br}\right)\nabla^2 n_{MB}}{(v_{2200})\left(\frac{1}{1 - br}\right) n_{MB}} = \frac{\nabla^2 \phi_{2200}}{\phi_{2200}} = -B^2 \qquad (74)$$

Po podstawieniu tego ostatniego równania do równania (73) otrzymamy

$$p\,\nu\,\varepsilon\, e^{-B^2\tau}\,\bar{\Sigma}_f(F) = \bar{\Sigma}_a + DB^2$$

lub

$$\frac{p\,\nu\,\varepsilon\, e^{-B^2\tau}\,\bar{\Sigma}_f(F)}{\bar{\Sigma}_a + DB^2} = \frac{\nu\,\frac{\bar{\sigma}_f(F)}{\bar{\sigma}_a(F)}\,\varepsilon\, p e^{-B^2\tau} N_F\, \bar{\sigma}_a(F)}{\bar{\Sigma}_a + DB^2} = 1 \qquad (75)$$

które można zredukować do wyrażenia

$$\frac{\eta_F\,\varepsilon\, p e^{-B^2\tau}\,\bar{\Sigma}_a(F)}{\bar{\Sigma}_a + DB^2} = 1 = k_{ef} = \frac{\eta_F\,\varepsilon\, p e^{-B^2\tau}\,\hat{\Sigma}_a(F)}{\hat{\Sigma}_a + DB^2(1-br)\sqrt{\frac{4T}{\pi T_o}}} \qquad (76)$$

Równanie (76) oznacza, że w reaktorze krytycznym produkcja neutronów (w liczniku) musi być równa pochłanianiu i ucieczce (mianownik).

Dzieląc równanie (76) przez $\hat{\Sigma}_a$ oraz wprowadzając wartość współczynnika wykorzystania neutronów termicznych

$$f = \frac{\bar{\Sigma}_a(F)}{\bar{\Sigma}_a} = \frac{\hat{\Sigma}_a(F)}{\hat{\Sigma}_a} \tag{77}$$

otrzymamy

$$\frac{\eta_F \; \varepsilon \, pfe^{-B^2\tau}}{1 + \frac{D}{\hat{\Sigma}_a} B^2} = \frac{k_\infty \; e^{-B^2\tau}}{1 + \frac{D}{\hat{\Sigma}_a} B^2} = 1 \tag{78}$$

Jest to równanie krytyczne zgodne z teorią wieku i przybliżeniem dyfuzyjnym. Równanie (78) można też napisać w postaci

$$\frac{k_\infty \; e^{-B^2\tau}}{1 + B^2 \frac{D}{\bar{\Sigma}_a} \left[(1-br)\sqrt{\frac{4T}{\pi T_o}}\right]} = 1 = k_{ef} \tag{79}$$

W ten sposób wszystkie przekroje czynne Westcotta $\hat{\Sigma}_a$ mogą być zamienione na efektywne przekroje czynne $\bar{\Sigma}_a$ i na odwrót.

Jeżeli oznaczymy

$$\frac{D}{\bar{\Sigma}_a} = \bar{L}^2 \tag{80}$$

oraz

$$\frac{D}{\hat{\Sigma}_a} = \hat{L}^2 \tag{81}$$

wówczas

$$\hat{L}^2(1-br)\sqrt{\frac{4T}{\pi T_o}} = \bar{L}^2 \tag{82}$$

i równania (78) oraz (79) można napisać w postaci

$$\frac{k_{\infty}\, e^{-B^2\tau}}{1+\bar{L}^2\, B^2} = 1 = k_{ef} \tag{83}$$

Należy pamiętać, że przekroje czynne Westcotta zostały zastosowane tu w pierwszym rzędzie po to, by wziąć pod uwagę produkcję neutronów rozszczepieniowych i zmniejszenie się wyrazu źródła neutronów MB na skutek pochłaniania neutronów epitermicznych oraz uwzględnić wpływ odstępstwa przekrojów czynnych od prawa 1/v.

Zamiennik $(1-br)\sqrt{4T/\pi T_o}$ występuje w równaniu krytycznym (76) w związku z wyrazem DB^2 określającym ucieczkę neutronów termicznych. Przekroje czynne Westcotta Σ można stosować również w równaniach reakcji neutronowych i w równaniach bilansu nuklidów, które występują przy rozpatrywaniu cykli paliwowych. W tym przypadku należy zmodyfikować, znów tylko człon określający ucieczkę neutronów termicznych, biorąc pod uwagę średnią szybkość neutronów termicznych.

LITERATURA

[1] K a p l a n I. - Notes for 22.22 Nuclear Physics I, MIT Nuclear Engineering Department, 1958.

[2] M a s o n E.A. - Notes for 22.22 (supl.), MIT, Nucl. Engg. Dept. 1960.

[3] W e s t c o t t C.H. - Effective Cross Section Values for Well Moderated Thermal Reactor Spectra, Atomic Energy of Canada Ltd., Nov., 1960.

[4] G l a s s t o n e S., E d l u n d M.C. - The Elements of Nuclear Reactor Theory, D.Van Nostrand Co., 1952.

[5] Ś w i e r z a w s k i T. - Teoria reaktorów jądrowych (skrypt), Sekcja Wyd. Nauk. Politechniki Śląskiej, 1962.

[6] W e s t c o t t C.H., W a l k e W.H., A l e k s a n d e r T.K. - Effective Cross Section and Cadmium Ratios for the Neutron Spectra of Thermal Reactors, Proceedings of Second International Conference in the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 16, p. 70, United Nations, Geneva, 1958,

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ В РЕАКТОРЕ НА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНАХ

Р е з ю м е

В работе выяснен метод Ц.Г.Уэсткотта, расчета эффективных поперечных сечений для нейтронных реакции с поглотителями не подчиненными закону 1/v в ядерных реакторах, поток которых является комбинацией нейтронов распределения Максвелла - Больцмана и эпитеплового распределения 1/E. В виде примера следует отметить, что в хорошо модерированном реакторе приблизительно 5-30% делений урана U-235 вызнвают эпитепловые нейтроны. В работе подан способ использования эффективных поперечных сечений Уэсткотта в балансах нейтронов и в критических уравнениях.

EFFECTIVE CROSS SECTIONS FOR NUCLEAR THERMAL REACTORS

S u m m a r y

The purpose of the paper is to explain the method developed by C.H. Westcott for evaluating the effective cross sections for reaction of neutrons with non- 1/v absorbers in a reactor whose flux is a combination of a Maxwell-Boltzmann distribution and a 1/E epithermal distribution. As an example of the importance of these epithermal contributions, it may be noted that from 5 to 30% of the fissions of U-235 in a well moderated reactor are caused by epithermal neutrons. The paper tells also how to use the Westcott cross sections in neutron balance and criticality equations.