ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996

Seria: AUTOMATYKA z. 120 Nr kol. 1340

Marian BŁACHUTA

CHARAKTERYSTYKI CIĄGŁYCH STOCHASTYCZNYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM DYSKRETNYM W CZASIE *

Streszczenie. Artykuł dotyczy wyznaczania charakterystyk układów ciągłych z zakłóceniem w postaci stacjonarnych procesów gaussowskich o wymiernej gęstości spektralnej, regulowanych za pomocą dyskretnych w czasie algorytmów generujących sygnał stały pomiedzy chwilami próbkowania. Algorytmy te mają postać liniowych sprzężeń zwrotnych od wyjścia filtru Kalmana.

CHARACTERISTICS OF CONTINUOUS-TIME STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS WITH A DISCRETE-TIME FEEDBACK

Summary. In the paper continuous-time systems disturbed by a stationary Gaussian process which has a rational spectral density, controlled by optimal discrete-time algorithms with a zero-order hold are addressed. The algorithms considered have the form of a linear feedback from the Kalman filter. The paper concentrates on the expected value and covariance function of the controled process, whose intersample transients are calculated from recursive formulae developed in the paper.

* *Niniejsza praca została wykonana w ramach Projektu Badawczego KBN nr 3 0683 91 01 w czasie pobytu autora w The University of Birmingham.*

1. Wstęp

Większość stosowanych obecnie algorytmów sterowania jest realizowana jako dyskretne w czasie. Na ogół syntezę regulatora prowadzi się biorąc pod uwagę zachowanie się wyjścia układu ciągłego dla dyskretnych chwil próbkowania zakładając, iż przy odpowiednio małym okresie próbkowania informacja o zachowaniu się układu w chwilach próbkowania jest miarodajna dla własności regulowanego sygnału również pomiędzy tymi chwilami.

Konsekwencją tego założenia jest oparcie syntezy regulatora na dyskretnym modelu procesu, na ogół w postaci modelu ARMAX. Należy tu wymienić nurt zapoczątkowany przez Åströma, [2], obejmujący regulatory minimalno-wariancyjne (MV) oraz uogólnione minimalno-wariancyjne (GMV), [3], konstruowane zarówno dla wskaźników jednokrokowych, jak i wielokrokowych.

Typowymi reprezentantami tej grupy są także algorytmy LQG, [10], i GPC [11], [12]. Są one stosowane dla układów stochastycznych i dlatego interesującą charakterystyką są przebiegi wariancji regulowanego wyjścia i wielkości sterującej. W pracach [6], [7], [20] pokazano, iż stany przejściowe w regulatorach GMV i GPC mogą się istotnie różnić w zależności od rodzaju filtru użytego do ich konstrukcji. Wiele z metod syntezy regulatorów prowadzi - zwłaszcza przy wysokich częstotliwościach próbkowania - do energicznych, zmieniających znak sterowań, prowadzących do znacznych rozbieżności pomiedzy obrazem wyjścia w chwilach próbkowania a rzeczywistym zachowaniem się wyjścia. Również w przypadku dłuższych okresów próbkowania wartości wyjścia układu ciągłego w dowolnej chwili czasu mogą znacznie odbiegać od wartości w chwilach pomiaru dyskretnego.

Projektowaniem układów dyskretnych z uwzględnieniem zjawisk pomiędzy chwilami próbkowania zajmują się De Souza i Goodwin, [13], Lennartson et al., [19] oraz D. Williamson [21]. W [13] wyprowadzono wzory na cyklostacjonarną wariancję wyjścia w dyskretnych chwilach czasu pomiędzy momentami próbkowania dla przypadku regulatora minimalno-wariancyjnego z ustalonym filterm Kalmana. Z kolei Williamson podaje formuły dla wariancji wyjścia układu ciągłego z dowolnym regulatorem dyskretnym; obowiązują one dla dowolnych chwil czasu, jednakże jedynie dla stanów ustalonych. Lennartson et al. analizują wartość całkowego kwadratowego wskaźnika jakości dla dowolnego algorytmu, będącego liniową funkcją stanu - podobnie jak uprzednio jedynie w stanie ustalonym.

Niniejsza praca jednocześnie uogólnia dotychczasowe wyniki uzyskane dla modeli ARMAX, [6], [7], [20] na dowolne momenty pomiędzy chwilami próbkowania w ciągłych układach stochastycznych, jak również wyniki uzyskane w pracach [21], [19] na stany przejściowe w układzie z filtrem optymalnym lub asymptotycznie optymalnym, przy czym jako algorytmy regulacji przyjęto reprezentacje algorytmów GMV, LQG oraz GPC w przestrzeni stanu.

Organizacja artykułu jest następująca. Najpierw przedstawiono modele ciągłych procesów z zakłóceniem stochastycznym. Następnie przedyskutowano modele dyskretno-czasowych obserwacji procesów stochastycznych oraz wynikające z nich modele dyskretne. Następnie wprowadzono sterowanie dyskretne będące liniową funkcją oceny stanu i wyprowadzono komplet równań opisujących stan układu złożonego z obiektu, filtru i regulatora, jak również komplet równań pozwalających na wyznaczenie wartości oczekiwanych i kowariancji zmiennych stanu i wyjścia układu dla dowolnych chwil czasu. Podano również dwa algorytmy symulacji procesu z wyjściem ciągłym.

2. Model ciągłego sterowanego procesu stochastycznego

Stosunkowo szeroką klasę procesów stochastycznych z wejściem sterującym można przedstawić za pomocą układu równań:

$$dx_t = (Ax_t + bu_t)dt, \tag{2.1}$$

$$z_t = d'x_t + cd\xi, \tag{2.2}$$

gdzie z_t jest procesem skalarnym, x_t jest n-wymiarowym wektorem stanu, A jest macierzą o stałych współczynnikach, c, b oraz d są wektorami, u_t jest wejściem sterującym, zaś ξ_t jest standardowym procesem Wienera, [14], [15], [17]. Symbol d oznacza różniczkę. Warunek początkowy x_0 jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_0, Q_0)$.

Równania (2.1)-(2.2) można na ogół traktować jako zwięzły zapis układu równań:

$$dx_t^1 = (Ax_t^1 + b^1u_t)dt, \tag{2.3}$$

$$dx_t^2 = Ax_t^2dt + c^2d\xi_t, \tag{2.4}$$

$$z_t = dx_t^1 + dx_t^2. \tag{2.5}$$

Wówczas pierwsze równanie interpretuje się jako model toru sterowania obiektu regulacji, zaś drugie jako model zakłócenia.

Rozwiązanie równania (2.1) ma postać:

$$x_t = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}bu_s ds + \int_0^t e^{A(t-s)}cd\xi(s). \tag{2.6}$$

Proces z_t opisany równaniami (2.1)-(2.2) jest w pełni scharakteryzowany przez dwa pierwsze momenty, przy czym wartość oczekiwana jest niezależna od wektora c, zaś kowariancje są niezależne od wartości oczekiwanych: stanu początkowego m_0 i sterowania $\bar{u}_t$. Pozwala to na oddzielną analizę równań dla pierwszego i drugiego momentu.

W dalszym ciągu założymy, że
- macierz A^1 jest stabilna, to znaczy dla $i = 1, 2 \ldots n$ zachodzi $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$,
- kowariancja Q_0 jest rozwiązaniem algebraicznego równania Lapunowa:

$$AQ_0 + QA_0' = -cc'. \tag{2.7}$$

Przyjmując, że $u_t = \bar{u}_t$, gdzie $\bar{u}_t$ jest pewną zdeterminowaną funkcją czasu, wartość oczekiwana $\bar{z}_t$ oraz funkcja autokowariancji $\rho_t^2(\tau)$ procesu $z_t - \bar{z}_t$ są określone zależnościami:

$$\bar{z}_t = d'e^{At}m_0 + d'\int_0^t e^{A(t-s)}b\bar{u}_s ds, \tag{2.8}$$

$$\rho_t^2(\tau) = d'Q_0 e^{A'\tau}d. \tag{2.9}$$

Gęstość widmową $\Sigma(\omega)$ można wówczas wyznaczyć z zależności:

$$\Sigma(\omega) = d'(sI - A)^{-1}cc'(-sI - A')^{-1}d|_{s=j\omega}. \tag{2.10}$$

$\Sigma(\omega)$ jest rzeczywistą funkcją wymierną i może być przedstawiona w postaci:

$$\Sigma(\omega) = \frac{C(s)C(-s)}{A(s)A(-s)}|_{s=j\omega} = |\frac{C(j\omega)}{A(j\omega)}|^2, \tag{2.11}$$

gdzie:

$$A(s) = \det(sI - A), \tag{2.12}$$

$$C(s) = d'[\,\mathrm{adj}\,(sI - A)]c. \tag{2.13}$$

Z równania (2.13) widać, że przy zadanej funkcji gęstości widmowej $\Sigma(\omega)$ procesu z_t oraz przy ustalonym wielomianie $A(s)$ istnieje wiele wielomianów $C(s)$, a zatem wiele wektorów c, dla których układ (2.1)-(2.2) jest modelem procesu z_t. Pośród nich zawsze można znaleźć taki wektor c, aby wszystkie pierwiastki wielomianu $C(s)$ leżały w lewej półpłaszczyźnie, [2].

3. Model dyskretnej obserwacji i sterowania procesu stochastycznego

W niniejszej pracy rozpatrujemy układy ze sterowaniami odcinkami stałymi. Zakładając, że $u_s = u_t$=const dla $t < s < t + \tau$, można napisać:

$$x_{t+\tau} = e^{A\tau}x_t + u_t\int_0^\tau e^{Av}bdv + \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}cd\xi(s). \tag{3.1}$$

Sygnał ciągły, będący realizacją procesu ciągłego, jest na ogół próbkowany, to znaczy jest on mierzony w dyskretnych, równo odległych, chwilach czasu $t_i = \Delta i$, gdzie Δ jest okresem próbkowania, zaś i jest liczbą całkowitą.

Oznaczmy $y_i = y(t_i)$ oraz $x_i = x(t_i)$. Równanie pomiaru próbkowanego przyjmie postać:

$$y_i = d'x_i + r_i, \tag{3.2}$$

gdzie r_i jest dyskretnym białym szumem gaussowskim, tzn. $E[r_i r_j] = 0$ dla $i \neq j$ oraz $E[r_i^2] = \rho^2$. Proces r_i pełni tu rolę modelu błędu pomiaru.

Proces y_i jest procesem dyskretnym w czasie i może zostać opisany za pomocą układu dyskretnych równań stochastycznych:

$$x_{i+1} = Fx_i + gu_i + w_i, \tag{3.3}$$
$$y_i = d'x_i + r_i, \tag{3.4}$$

gdzie w_i jest wektorowym białym szumem gaussowskim o macierzy kowariancji W.

F, g, W są określone następująco:

$$F = e^{A\Delta},\ g = \int_0^{\Delta} e^{As} b ds,\ W = \int_0^{\Delta} e^{As} cc' e^{A's} ds. \tag{3.5}$$

Niech Q_0 oznacza macierz kowariancji stacjonarnego procesu dyskretnego x_i, z $u_i = 0, i = 0, 1, \ldots$, spełniającą dyskretne równanie Lapunowa:

$$Q_0 = FQ_0F' + W. \tag{3.6}$$

Ponieważ dla $t_i = i\Delta$ wektory x_t oraz x_i są tymi samymi wektorami, więc ich macierze kowariancji są również równe. Z tej własności wynika sposób obliczenia całki w (3.5). W tym celu można rozwiązać równanie Lapunowa (2.7) względem Q_0, a następnie skorzystać z (3.6) otrzymując:

$$W = Q_0 - FQ_0F'. \tag{3.7}$$

4. Przykładowe algorytmy regulacji

4.1. Cyfrowe algorytmy LQG i GPC

W tym punkcie omówimy pewien kwadratowy wskaźnik jakości prowadzący do algorytmu

$$u_i = -k_i' \hat{x}_{i|i}, \tag{4.1}$$

równoważnego algorytmom tworzonym dla modelu ARMAX.

Niech wskaźnik I_i będzie wskaźnikiem z przesuwnym horyzontem N:

$$I_i = E \sum_{j=i}^{i+N-1} y_{j+1}^2 + \lambda \sum_{j=i}^{i+N_u-1} u_j^2, \tag{4.2}$$

w którym $N_u \leq N$, przy dodatkowym założeniu, że

$$u_j = 0 \text{ dla } j > N_u. \tag{4.3}$$

Horyzont N nazywa się horyzontem kosztu, zaś horyzont N_u horyzontem sterowania. W zależności od wartości N, N_u oraz relacji zachodzących pomiędzy nimi otrzymujemy różne znane prawa sterowania. I tak dla $N_u = N$ otrzymujemy ogólny problem LQ z horyzontem jednokrokowym(dla $N = 1$), [1], [2], [5], [6], [7], wielokrokowym skończonym [10] lub nieskończonym (dla $N \to \infty$) [2], [16]. W przypadku $N_u < N$ otrzymuje się algorytm GPC [11], [12]. Należy podkreślić, że w literaturze algorytm GPC wyprowadza, korzystając z modelu ARMAX.

Sterowanie optymalne u_i jest określone zależnością liniową:

$$u_i = -(\boldsymbol{k}^* + \frac{1}{r}\boldsymbol{d}_1)'\hat{\boldsymbol{x}}_{i|i}, \tag{4.4}$$

gdzie

$$\boldsymbol{k}^* = \frac{\boldsymbol{F}^{*\prime}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{g},}{r + \boldsymbol{g}'\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{g}}, \tag{4.5}$$

zaś $\boldsymbol{P}_0$ jest obliczone z następujących równań rekurencyjnych:

i) Lapunowa dla $j = N - 1, \ldots N_u$

$$\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{F}'\boldsymbol{P}_{j+1}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}', \boldsymbol{P}_N = 0, \tag{4.6}$$

ii) Riccatiego dla $j = N_u - 1, \ldots, 0$

$$\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{F}^{*\prime}(\boldsymbol{P}_{j+1} - \frac{\boldsymbol{P}_{j+1}\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{P}_{j+1}}{r + \boldsymbol{g}'\boldsymbol{P}_{j+1}\boldsymbol{g}})\boldsymbol{F}^* + \boldsymbol{Q}^*. \tag{4.7}$$

Macierz $\boldsymbol{Q}^*$ oraz skalar r są określone następująco:

$$\boldsymbol{Q}^* = \frac{\lambda}{r}\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1', \; r = g_0^2 + \lambda, \tag{4.8}$$

przy czym $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{F}'\boldsymbol{d}$ oraz $g_0 = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{g}$.

Dla problemu z horyzontem nieskończonym macierz $\boldsymbol{P}$ jest dodatnio określonym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}^{*\prime}(\boldsymbol{P} - \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{P}}{r + \boldsymbol{g}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}})\boldsymbol{F}^* + \boldsymbol{Q}^*. \tag{4.9}$$

Dla $\lambda \neq 0$ rozwiązanie równania (4.9) można znaleźć za pomocą metod klasycznych. W przypadku $\lambda = 0$ zachodzi również $\boldsymbol{Q}^* = 0$ i rozwiązanie $\boldsymbol{P} = 0$ jest stabilizujące tylko dla obiektów o stabilnej macierzy $\boldsymbol{F}^*$ (minimalnofazowych). Dla obiektów dyskretnych nieminimalnofazowych do rozwiązania równania (4.9) konieczne jest wówczas stosowanie algorytmów specjalnych, [9],[16].

W przypadku stabilnej macierzy $\boldsymbol{F}$ możliwe jest przyjęcie nieskończonego horyzontu kosztu N również dla algorytmu GPC. Wówczas zamiast rekurencji równania Lapunowa (4.6) należy rozwiązać równanie algebraiczne

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{F} + dd', \tag{4.10}$$

a wynik wykorzystać do zainicjowania rekurencji równania Riccatiego (4.7).

4.2. Algorytmy projektowane metodami hybrydowymi

Wskaźnik jakości (4.2) nie uwzględnia przebiegów między chwilami próbkowania. Bardziej realistyczny jest wskaźnik całkowy $I = \mathrm{E}\,J$, gdzie np.

$$J = \int_0^T (z^2 + \lambda_c u^2)dt = \int_0^T (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{Q}_c\boldsymbol{x} + \lambda_c u^2)dt, \tag{4.11}$$

przy czym $\boldsymbol{Q}_c = dd'$ oraz T jest pewnym horyzontem czasowym, $T = N\Delta$.

Biorąc obecnie pod uwagę, że wartości wektora stanu $\boldsymbol{x}(\tau)$ pomiędzy chwilami próbkowania,tzn. dla $\tau \in [0, \Delta)$, są określone wzorem:

$$\boldsymbol{x}_i(\tau) = \boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{g}(\tau)u_i + \boldsymbol{w}(\tau), \tag{4.12}$$

gdzie

$$\boldsymbol{F}(\tau) = e^{A\tau},\ \boldsymbol{g}(\tau) = \int_0^\tau e^{Av}bds,\ \boldsymbol{w}(\tau) = \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}cd\xi(s), \tag{4.13}$$

możemy wskaźnik całkowy zastąpić równoważnym mu sumacyjnym

$$I = E\{\Delta \sum_{i=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i + 2\boldsymbol{h}'\boldsymbol{x}_i u_i + \lambda u_i^2)\} + I_0(T), \tag{4.14}$$

w którym:

$$\boldsymbol{Q} = \Delta^{-1}\int_0^\Delta e^{A'\tau}\boldsymbol{Q}_c e^{A\tau}d\tau, \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{h} = \Delta^{-1}\int_0^\Delta e^{A'\tau}\boldsymbol{Q}_c\boldsymbol{g}(\tau)d\tau, \tag{4.16}$$

$$\lambda = \lambda_c + \Delta^{-1}\int_0^\Delta [\boldsymbol{g}'(\tau)\boldsymbol{Q}_c\boldsymbol{g}(\tau)]d\tau, \tag{4.17}$$

zaś $I_0(T)$ jest składnikiem niezależnym od sterowania. Warto zauważyć, że $\lambda \neq 0$, nawet gdy $\lambda_c = 0$. Zatem uzyskany w ten sposób wskaźnik dyskretny jest nieosobliwy nawet wtedy, gdy problem ciągły jest osobliwy. Problem minimalizacji wskaźnika (4.14) przy ograniczeniach określonych równaniami obiektu (3.3)-(3.4) ma również rozwiaząnie o postaci (4.1).

4.3. Niezerowa wartość zadana

Powyższe algorytmy mogą być również wykorzystane dla problemu regulacji ze skokowo zmieniającą się wartością zadaną $w_t = w$, przy czym zakłada się , że chwile t, w których zmiany mają miejsce, nie są uprzednio znane.

W stanie ustalonym dla wartości oczekiwanych zachodzi:

$$\begin{aligned} A\bar{x}_\infty &= -b\bar{u}_\infty, && (4.18)\\ d'\bar{x}_\infty &= w, && (4.19)\\ d'A\bar{x}_\infty &= 0, && (4.20)\\ &\vdots \\ d'A^m\bar{x}_\infty &= 0. && (4.21) \end{aligned}$$

Ponieważ rząd macierzy A w przypadku obiektu astatycznego stopnia m wynosi $n-m$, więc dla uzyskania rozwiązania $\bar{x}_\infty$ należy dopisać m równań typu (4.19)-(4.21) i przyjąć $\bar{u}_\infty = 0$. W przeciwnym przypadku $\bar{x}_\infty$ oraz $\bar{u}_\infty$ znajduje się rozwiązując układ dwu równań (4.18), (4.19).

Rozważmy problem sterowania:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Fx_i + gu_i + w_i, \; x_0 \sim \mathcal{N}(0, Q_0), && (4.22)\\ z_i &= d'x_i + r_i, && (4.23) \end{aligned}$$

$$I_i = E \sum_{j=i}^{i+N-1} (y_{j+1} - w)^2 + \lambda \sum_{j=i}^{i+Nu-1} (u_j - \bar{u}_\infty)^2. \quad (4.24)$$

Jest on równoważny problemowi:

$$\begin{aligned} \delta x_{i+1} &= F\delta x_i + g\delta u_i + w_i, \; \delta x_0 \sim \mathcal{N}(-\bar{x}_\infty, Q_0), && (4.25)\\ \delta z_i &= d'\delta x_i + r_i, && (4.26) \end{aligned}$$

$$I_i = E \sum_{j=i}^{i+N-1} \delta y_{j+1}^2 + \lambda \sum_{j=i}^{i+Nu-1} \delta u_j^2, \quad (4.27)$$

odpowiadającemu, po pominięciu symbolu δ, problemowi wyjściowemu dla obiektu (3.3)-(3.4) ze wskaźnikiem (4.2) .

Sterowanie optymalne dla problemu (4.22)-(4.24) można otrzymać za pomocą rozwiązania problemu (4.25)-(4.27) jako

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_\infty + \delta u_i, && (4.28)\\ z_i &= w + \delta z_i. && (4.29) \end{aligned}$$

Sterowanie optymalne dla obiektu astatycznego nie wymaga wyznaczania wielkości $\bar{u}_\infty$; jest zatem wygodniejsze oraz mniej wrażliwe. W przypadku obiektów statycznych można uzyskać taki sam efekt wprowadzając do regulatora element całkujący lub sumujący. W pierwszym przypadku wyjście regulatora jest ciągłe, zaś dla celów syntezy algorytmu element całkujący włącza się do równań różniczkowych obiektu. W drugim przypadku wyjście regulatora jest dyskretne. Dla celów syntezy element sumujący dołącza się do równań różnicowych obiektu dyskretnego. Przypadek ten odpowiada ujęciu problemu LQG i GPC przedstawionemu w pracach [10], [11], [12]. Przyrosty δu_i należy w obydwu przypadkach interpretować jako:

$$\delta u_i = u_i - u_{i-1}. \tag{4.30}$$

5. Filtr Kalmana

Oznaczmy przez $\hat{x}_{i|i-1}$ oraz przez $\hat{x}_{i|i}$ liniowe oceny stanu zapewniające minimum błędu średniokwadratowego stanu x_i przy pomiarach y_{i-1} oraz y_i danych odpowiednio do chwili $i-1$ oraz i. Wówczas filtr Kalmana jest określony równaniami:

$$\hat{x}_{i|i} = \hat{x}_{i|i-1} + h_i(y_i - d'\hat{x}_{i|i-1}), \; \hat{x}_{0|-1} = m_0, \tag{5.1}$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = F\hat{x}_{i|i} + gu_i. \tag{5.2}$$

Wektor h_i wyraża się poprzez kowariancje błędów oceny stanu $S_{i|i}$ oraz $S_{i|i-1}$ następująco:

$$h_i = \frac{S_{i|i-1}d}{\rho^2 + d'S_{i|i-1}d}, \tag{5.3}$$

$$S_{i|i} = S_{i|i-1} - \frac{S_{i|i-1}dd'S_{i|i-1}}{\rho^2 + d'S_{i|i-1}d}, S_{0|-1} = Q_0, \tag{5.4}$$

$$S_{i+1|i} = W + FS_{i|i}F'. \tag{5.5}$$

5.1. Ustalony filtr Kalmana

W zastosowaniach, [18], często zastępuje się równania rekurencyjne algebraicznym równaniem Riccatiego:

$$S = W + F(S - \frac{Sdd'S}{\rho^2 + d'Sd})F'. \tag{5.6}$$

Parametry filtru są wówczas niezależne od czasu i wyrażają się wzorami:

$$h = \frac{FSd}{\rho^2 + d'Sd}, \tag{5.7}$$

$$\sigma^2 = \rho^2 + d'Sd, \tag{5.8}$$

gdzie S jest nieujemnie określonym symetrycznym rozwiązaniem (5.6). Filtr ten jest jedynie filtrem asymptotycznie optymalnym i jest stabilny tylko dla modeli odwracalnych, w przeciwieństwie do filtru o parametrach zmiennych w czasie pracującego poprawnie również dla modeli nieodwracalnych. Ma on jednak duże znaczenie praktyczne, gdyż jego użycie dla celów regulacji prowadzi do regulatorów o parametrach niezależnych od czasu.

Na podstawie (5.1)-(5.2) równania predyktora przyjmą postać asymptotyczną:

$$\hat{x}_{i+1|i} = F\hat{x}_{i|i-1} + gu_i + he_i, \quad \hat{x}_{0|-1} = m_0, \tag{5.9}$$

$$y_i = d'x_i + e_i. \tag{5.10}$$

Warunek początkowy jest obecnie zdeterminowany, co błędnie sugeruje dokładną predykcję stanu. Z kolei model:

$$x_{i+1} = Fx_i + gu_i + he_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(m_0, Q_0^*), \tag{5.11}$$

$$y_i = d'x_i + e_i, \tag{5.12}$$

gdzie:

$$Q_0^* = FQ_0^*F' + hh'\sigma^2 \tag{5.13}$$

można uznać za reprezentację stacjonarnego modelu ARMAX

$$A^*(z)y_i = B^*(z)u_i + C^*(z)e_i, \tag{5.14}$$

w którym wielomiany $A^*(z)$, $B^*(z)$ i $C^*(z)$ operatora wyprzedzenia z są określone za pomocą parametrów opisu (5.11)-(5.12) następująco:

$$A^*(z) = \det(zI - F), \tag{5.15}$$

$$B^*(z) = d' \operatorname{adj}(zI - F)g, \tag{5.16}$$

$$C^*(z) = \det(zI - F + gc'). \tag{5.17}$$

Model ARMAX otrzymany w ten sposób jest odwracalny, tzn. posiada stabilny wielomian $C^*(z)$. Relacje zachodzące pomiędzy modelem (3.3)-(3.4) a modelem ARMAX są obszernie omówione w [8], [9]. Należy również podkreślić, że jeśli przyjąć jako model obiektu równania (5.11)-(5.12), [10], wówczas algorytm (4.3) jest błędny, albowiem nie jest spełnione założenie o niezależności szumu systemowego i pomiarowego, [4]. Problemy te są szerzej omówione w [5].

6. Symulacja

Symulację pracy układu ciągłego (2.1)-(2.2) z równaniem pomiarów próbkowanych (3.2) i sterowaniem dyskretnym (4.1) wykorzystującym filtr Kalmana (5.1)-(5.2) można przeprowadzić na dwa różne sposoby.

Pierwszy z nich polega na wykorzystaniu rozwiązania równania sterowanego procesu dla chwil czasu pomiędzy momentami zmiany sterowania. Przyjmijmy, że chwilom czasowym $t_i = ih$ odpowiadają dyskretne momenty próbkowania i. Wówczas (3.1) można dla $0 \leq \tau \leq \Delta$ zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{x}_i(\tau) = \boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{g}(\tau)u_i + \boldsymbol{w}(\tau), \tag{6.1}$$

gdzie

$$\boldsymbol{F}(\tau) = e^{A\tau},\ \boldsymbol{g}(\tau) = \int_0^\tau e^{Av}\boldsymbol{b}dv,\ \boldsymbol{w}(\tau) = \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}\boldsymbol{c}d\xi(s). \tag{6.2}$$

Z równania (6.1) wynika, że dla $0 \leq \tau \leq \Delta$ zachodzi:

$$z_i(\tau) = \boldsymbol{f}'(\tau)\boldsymbol{x}_i + \gamma(\tau)u_i + \psi(\tau), \tag{6.3}$$

gdzie

$$\boldsymbol{f}(\tau) = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{F}(\tau),\ \gamma(\tau) = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{g}(\tau), \tag{6.4}$$

zaś $\psi(\tau)$ jest białym szumem o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji

$$\sigma_\psi^2(\tau) = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{W}(\tau)\boldsymbol{d}. \tag{6.5}$$

Dysponując zatem wartościami wektora stanu $\boldsymbol{x}_i$ i sterowania $u_i = -\boldsymbol{k}'\hat{\boldsymbol{x}}_{i|i}$ w chwilach próbkowania $t_i = i\Delta$, na podstawie wzoru (6.3) możemy znaleźć również wartości wyjścia $z_i(\tau)$ dla dowolnej chwili $t = i\Delta + \tau$.

Druga metoda może być zastosowana w przypadku, gdy interesują nas wartości wyjścia w N_d równo odległych chwilach czasu znajdujących się pomiędzy chwilami próbkowania. Bazuje ona bezpośrednio na równaniach (3.3)-(3.4). Przyjmując, że dyskretyzacja została dokonana z okresem $\Delta_N = \Delta/N_d$, chwile próbkowania odpowiadają N_d-krotnym wielokrotnościom wskaźnika i. Układ zamknięty symuluje się przyjmując, że w trakcie N_d kroków sterowanie u_i nie ulega zmianie:

$$u_i = -\boldsymbol{k}_j\hat{\boldsymbol{x}}_{j|j},\ j = i \operatorname{div} N_d. \tag{6.6}$$

W obydwu metodach warunek początkowy $\boldsymbol{x}_0$ oraz wektor $\boldsymbol{w}_i$ znajduje się następująco:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{m}_0 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{M}\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{Q}_0 &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}',\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wektory $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$ są wektorami niezależnych zmiennych gausowskich o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji, tzn.:

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}'\} = \boldsymbol{I},\ \mathrm{E}\{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}'\} = \boldsymbol{I},\ \mathrm{E}\{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}'\} = 0.$$

Macierze $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{M}$ mogą być znalezione np. za pomocą dekompozycji Choleskiego lub dowolnej innej metody, dającej symetryczny pierwiastek macierzy symetrycznej.

7. Charakterystyki procesu regulacji w chwilach próbkowania

Podamy obecnie formuły pozwalające na wyznaczenie ewolucji wartości oczekiwanej i kowariancji wektora stanu układu zamkniętego w chwilach próbkowania, co stanowi punkt wyjścia do obliczenia wartości oczekiwanej i wariancji wielkości wyjściowej i sterującej także wewnątrz okresu próbkowania.

Oznaczmy

$$\bar{x}_i = \mathrm{E}(x_i),\ \bar{z}_i = \mathrm{E}(z_i),\ \bar{u}_i = -k_i'\bar{x}_i, \tag{7.1}$$

$$\theta_i = \mathrm{E}(x_i - \bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i)',\ \nu_i^2 = \mathrm{E}(z_i - \bar{z}_i)^2,\ \mu_i^2 = \mathrm{E}(u_i - \bar{u}_i)^2. \tag{7.2}$$

Zakładając, że w układzie regulacji znajduje się filtr Kalmana (5.1)-(5.5), kowariancje stanu θ_i, wariancję wyjścia ν_i^2 oraz wariancję sterowania μ_i^2 można zapisać następująco:

$$\theta_{i+1} = (F - gk_i')\theta_i(F - gk_i') + gk_i'S_{i|i}k_ig' + W, \tag{7.3}$$

$$\nu_i^2 = d'\theta_i d, \tag{7.4}$$

$$\mu_i^2 = k_i'(\theta_i + S_{i|i})k_i. \tag{7.5}$$

Wariant tej formuły, słuszny dla stanu ustalonego, jest zamieszczony w [21].

Formuły (7.3)-(7.5) obowiązują przy założeniu, że $\mathrm{E}(x_i\tilde{x}_{i|i}) = 0$. W przypadku zastosowania ustalonego filtru Kalmana (5.9)-(5.10) w stanach przejściowych założenie to nie jest spełnione.

Obecnie wprowadzimy nieco bardziej złożone formuły, nie wymagające, aby $\mathrm{E}(x_i\tilde{x}_{i|i}) = 0$ oraz nie korzystające z macierzy $S_{i|i}$. Dzięki temu otrzymamy poprawne wyniki również dla przypadku zastosowania filtru ustalonego.

Oznaczmy

$$X = [x_i', \tilde{x}_{i|i-1}]', \tag{7.6}$$

$$\delta X = [(x_i - \bar{x}_i)', \tilde{x}_{i|i-1}]' \tag{7.7}$$

oraz

$$\Theta_i = \mathrm{E}(\delta X_i \delta X_i'). \tag{7.8}$$

Wówczas dla wartości oczekiwanych mamy:

$$\mathrm{E}(\tilde{x}_{i|i-i}) = 0, \tag{7.9}$$

$$\bar{x}_{i+1} = (F - gk_i')\bar{x}_i,\ \bar{x}_0 = m_0. \tag{7.10}$$

Macierz kowariancji Θ_i wynika z rekurencyjnego równania Lapunowa:

$$\Theta_{i+1} = \Omega_i\Theta_i\Omega_i' + \Gamma_i V_i \Gamma_i'. \tag{7.11}$$

Odpowiednimi zależnościami dla wyjścia z_i oraz sterowania u_i są:

$$\bar{z}_i = d'\bar{x}_i, \ \bar{u}_i = -k_i'\bar{x}_i, \tag{7.12}$$

$$\nu_i^2 = d'\Theta_i^{11}d, \tag{7.13}$$

$$\mu_i^2 = k_i'\Theta_i^{11}k_i + l_i'\Theta_i^{22}l_i + 2k_i'\Theta_{12}l_i + (\alpha_i)^2\rho^2, \tag{7.14}$$

gdzie

$$l_i = k_i - \alpha_i d, \ \alpha_i = k_i'h_i. \tag{7.15}$$

Macierze Ω_i, Γ_i oraz V_i są macierzami blokowymi o następujących elementach:

$$\Omega_i^{11} = F - gk_i', \ \Omega_i^{12} = gk_i'(I - h_i d'), \ \Omega_i^{21} = 0, \ \Omega_i^{22} = F(I - h_i d') \tag{7.16}$$

$$\Gamma_i^{11} = I, \qquad \Gamma_i^{12} = -gk_i', \qquad \Gamma_i^{21} = I, \qquad \Gamma_i^{22} = -F \tag{7.17}$$

$$V_i^{11} = W, \qquad V_i^{12} = 0, \qquad V_i^{21} = 0, \qquad V_i^{22} = h_i h_i'\rho^2. \tag{7.18}$$

Macierz Θ_0 jest również macierzą blokową:

$$\Theta_0^{11} = \Theta_0^{22} = \Theta_0^{12} = \Theta_0^{21} = Q_0, \tag{7.19}$$

przy czym Q_0 jest rozwiązaniem równania Lapunowa (2.7). Równania te wyprowadza się następująco:

Równania systemu (3.3)-(3.4) sterowanego za pomocą algorytmu (4.1) korzystającego z filtru (5.1)-(5.2) można zapisać w postaci zwartej:

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} F - gk_i' & gk_i'(I - h_i d') \\ 0 & F(I - h_i d') \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} I - gk_i' \\ I - F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ h_i r_i \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

lub

$$X_{i+1} = \Omega_i X_i + \Gamma_i v_i \tag{7.21}$$

oraz

$$u_i = -k_i'x_i + k_i'(I - h_i d')\tilde{x}_{i|i-1} - k_i'h_i r_i. \tag{7.22}$$

Obecnie, biorąc pod uwagę fakt, że $\mathrm{E}\{w_i\} = 0$, $\mathrm{E}\{r_i\} = 0$ oraz $\mathrm{E}\{\tilde{x}_{0|-1}\} = 0$, dostajemy (7.10)-(7.11) oraz:

$$\delta X_{i+1} = \Omega_i \delta X_i + \Gamma_i v_i, \tag{7.23}$$

stąd otrzymuje się (7.11) oraz (7.13)-(7.18). Analogicznie, dla wariancji mamy:

$$\nu_i^2 = d'\Theta_i^{11}d, \tag{7.24}$$

$$\mu_i^2 = k_i'[\Theta_i^{11} + (I - h_i d')\Theta_i^{22}(I - dh_i') + 2\Theta_i^{12}(I - dh_i') + h_i h_i'\rho^2]k_i. \tag{7.25}$$

Formuła (7.25) może być przekształcona do efektywniejszej numerycznie postaci (7.14).

8. Charakterystyki procesu regulacji pomiędzy chwilami próbkowania

Z zależności (6.1) widać, że wartości oczekiwane i kowariancje dla chwil wewnątrz okresu próbkowania można wyznaczyć na podstawie odpowiednich wielkości w chwilach próbkowania. Podsumowuje to następujący wynik:

Wartość średnia i wariancja wyjścia $z_i(\tau)$ wyrażają się wzorami:

$$\bar{z}_i(\tau) = f_i^1(\tau)'\bar{x}_i, \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}\nu_i^2(\tau) &= f_i^{1\prime}(\tau)\Theta_i^{11}f_i^1(\tau) + f_i^{2\prime}(\tau)\Theta_i^{22}f_i^2(\tau) + 2f_i^{1\prime}(\tau)\Theta_i^{12}f_i^2(\tau)\\ &+ d'W(\tau)d + \rho^2[\gamma_i^{12}(\tau)]^2,\end{aligned} \tag{8.2}$$

gdzie $\bar{x}_i$ oraz Θ_i są określone wzorami (7.10)-(7.11). Pozostałe wielkości są określone następująco:

$$f_i^1(\tau) = f(\tau) - \gamma(\tau)k_i,\ f_i^2(\tau) = \gamma(\tau)l_i,\ \gamma_i^{12}(\tau) = \gamma(\tau)\alpha_i \tag{8.3}$$

$$W(\tau) = \int_0^\tau e^{As}cc'e^{A's}ds \tag{8.4}$$

oraz

$$f(\tau) = d'F(\tau),\ \gamma(\tau) = d'g(\tau),\ \alpha_i = k_i'h_i,\ l_i = k_i - \alpha_i d. \tag{8.5}$$

9. Podsumowanie

Badanie zachowania się pomiędzy chwilami próbkowania ciągłych układów stochastycznych sterowanych za pomocą regulatorów dyskretno-czasowych daje znacznie więcej informacji o właściwościach układu regulacji niż zawężanie uwagi jedynie do chwil próbkowania.

W artykule wyprowadzono narzędzia do wyznaczania istotnych charakterystyk dla dowolnych chwil czasu zarówno dla stanów stacjonarnych, jak i przejściowych niezależnie od typu użytego filtru.

Reprezentacja modelu obiektu w przestrzeni stanu okazała się efektywna dla syntezy regulatora, prowadząc do ujednoliconego podejścia do syntezy powszechnie stosowanych algorytmów sterowania także dla obiektów ciągłych w czasie oraz obliczania istotnych charakterystyk.

10. Podziękowanie

Autor wyraża wdzięczność p. Profesorowi Mieczysławowi Brdysiowi z The University of Birmingham za stworzenie znakomitych warunków do pracy w School of Electronic & Electrical Engineering.

LITERATURA

1. Anderson B. D. O. and J. Moore (1979), Optimal Filtering, Prentice-Hall

2. Åström K. J. (1970), Introduction to Stochastic Control Theory, Academic

3. Åström K. J. and B. Wittenmark (1990), Computer-Controlled Systems, Theory and Design, Prentice-Hall

4. Bar-Shalom Y. and E. Tse (1973) Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control, IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-19, no. 5, pp. 494-500

5. Błachuta M., (1987) Comments on 'Design of stochastic discrete-time linear optimal regulators', Int. J. Systems. Sci, vol. 18, no. 7, pp. 1387-1390

6. Błachuta M. and A. Ordys (1987), Optimal and asymptotically optimal linear regulators resulting from a one-stage performance index, Int. J. Systems Sci., vol. 18, no. 7, pp. 1377-1385

7. Błachuta M. and A. Ordys (1988), Porównanie algorytmów Clarke'a, Hastings- Jamesa i Kalmana, Podstawy Sterowania, vol. 18, no. 3-4, pp. 251-278

8. Błachuta M. and A. Polański (1987), On time invariant representations of discrete random processes, IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-32, pp. 1125-1127

9. Błachuta M. and A. Polański (1990), Reprezentacje dyskretnych procesów Gaussa-Markowa a symetryczne rozwiązania równania Riccatiego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, vol. 35, pp. 177-189

10. Clarke D. W., P. P. Kanjilal and C. Mohtadi (1985), A generalized LQG approach to self-tuning control, Part I and II, Int.J. Control, vol. 41, no. 6, pp. 1509-1564

11. Clarke D. W., C. Mohtadi and P. S. Tuffs (1987), Generalized Predictive Control, Part I and II, Automatica, vol. 23, no. 2, pp. 137-160

12. Clarke D. W. and C. Mohtadi (1989), Properties of Generalized Predictive Control, Automatica, vol. 55, no. 2, pp. 137-148

13. De Souza C. E. and G. C. Goodwin (1984), Intersample variances in discrete minimum-variance control, IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-29, pp. 759-761

14. Gikhman I. I. and A. V. Skorokhod (1969), Introduction to the Theory of Random Processes, Saunders

15. Gikhman I. I. and A. V. Skorokhod (1972), Stochastic Differential Equations, Springer

16. Kučera V. (1972), State space approach to discrete optimal control, Kybernetika, vol. 8, pp. 233-251

17. Kushner H.(1972), Introduction to Stochastic Control, Holt, Rinehart and Winston

18. Kwakernaak H. and R. Sivan (1972), Linear Optimal Control Systems, Wiley

19. Lennartson B., T. Söderström and S. Zeng-Qi (1989), Inter-sample behaviour as measured by continuous-time quadratic criteria, Int. J. Control, vol. 49, pp. 2077-2083

20. Ordys A. (1993), Model-system parameter mismatch in GPC control, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 7, pp. 239-253

21. Williamson D. (1991), Digital Control and Implementation - Finite Worthlength Considerations, Prentice Hall

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Duda
AGH Kraków

Wpłynęło do Redakcji dnia 02.11.1994

Abstract

In the paper continuous-time systems disturbed by a stationary Gaussian process which has a rational spectral density, controlled by optimal discrete-time algorithms with a zero-order hold are addressed. The algorithms considered have the form of a linear feedback from the Kalman filter. The paper concentrates on the expected value and covariance function of the controled process, whose intersample transients are calculated from recursive formulae developed in the paper.