

Marian BŁACHUTA

METODY CZASU CIĄGŁEGO W PROJEKTOWANIU CYFROWYCH UKŁADÓW REGULACJI

CZĘŚĆ 1: OPERATORY I TRANSFORMACJE DYSKRETNE *

Streszczenie. W pracy dokonano krytycznego porównania dokładnych metod opisu obiektów ciągłych z ekstrapolatorem (transformacje: \mathcal{Z} , Γ , \mathcal{W}) w zastosowaniu do analizy i syntezy układów regulacji, zwłaszcza przy założeniu wysokiej częstotliwości próbkowania oraz skończonej dokładności obliczeń. Porównania dokonano w aspekcie prostoty pojęciowej, dokładności i efektywności. Omówiono problem stabilności oraz właściwości linii pierwiastkowych i charakterystyk częstotliwościowych układów dyskretnych dla różnych form opisu. Wskazano na możliwie daleko posunięte uproszczenia zastępczego modelu ciągłego, wynikające z właściwości asymptotycznych transformat \mathcal{W} i obowiązuje dla stosunkowo szerokiego zakresu częstotliwości próbkowania. Wyniki mogą być wykorzystane przez projektantów cyfrowych układów regulacji.

CONTINUOUS-TIME METHODS IN THE DIGITAL SYSTEMS DESIGN

PART 1: DISCRETE-TIME TRANSFORMS AND OPERATORS

Summary. A critical comparison of exact discrete-time description methods of continuous-time systems with an extrapolator (\mathcal{Z} , Γ and \mathcal{W} transforms) and their application to the analysis and synthesis of control systems, particularly at high sampling rates and assuming finite accuracy of calculations, is presented. The comparison has been performed taking the simplicity, accuracy and efficiency into account. The problems of stability, and the properties of root loci and frequency plots when using different descriptions are addressed. The possibility of a far going simplification of the equivalent pseudo-continuous-time model, which results from the asymptotic properties of the \mathcal{W} transform and is valid for a wide range of sampling periods, is pointed out.

* Wykonano w ramach projektu BW-419/RAu1/95/3

1. Wprowadzenie

Celem opracowania jest syntetyczne spojrzenie na spotykane w literaturze metody opisu układów regulacji dyskretnej obiektów ciągłych, realizowanych jako cyfrowe, oraz ich ocena w świetle dwu aspektów: stosunkowo wysokiej częstotliwości próbkowania oraz skończonej dokładności obliczeń.

Właściwości dyskretnych algorytmów regulacji oraz poprawny wybór odpowiedniej metody do ich analizy i syntezy są silnie zależne od okresu próbkowania Δ .

Konsekwencją wysokiej częstotliwości próbkowania jest degenerowanie się klasycznych metod opisu opartych na operatorze przesunięcia lub transformacji Z . Manifestuje się to zbliżaniem współczynników modelu dyskretnego do pewnych wartości niezależnych od parametrów obiektu ciągłego. Pociąga to za sobą utratę informacji istotnych dla syntezy regulatora oraz może być przyczyną niepoprawnego działania algorytmów sterowania i błędów symulacji cyfrowej.

Bardzo obszerny przegląd metod projektowania regulatorów dyskretnych znajduje się np. w pracach Isermanna (1980), Ackermanna (1985), Phillipsa i Nagle'a (1990) oraz Franklina, Powella i Workmana (1990).

Śród metod projektowania regulatorów dyskretnych metodami dyskretnymi należy wyróżnić metodę Ragazziniego (Ragazzini, Franklin, 1958), w literaturze polskiej omówioną np. w pracy Błachuty (1994). Metoda ta pozwala na konstrukcję regulatora - w formie funkcji wymiernej zmiennej z - zapewniającego pożądane właściwości statyczne i dynamiczne układu regulacji, przy czym nie nakłada się żadnych wstępnych ograniczeń na rząd i strukturę regulatora. Istotną trudnością tej metody jest konieczność podjęcia przez projektanta decyzji o skreślaniu zer transmitancji przez bieguny regulatora. Podjęcie decyzji niewłaściwej grozi utratą stabilności, tzw. "dzwonieniem" regulatora lub też niewykorzystaniem jego potencjalnych możliwości. Jest to między innymi związane z trudnością rozróżnienia zer transmitancji wnoszonych przez proces próbkowania od zer wnoszonych przez transmitancję części ciągłej. W świetle przedstawionych powyżej rozważań problemy te potęgują się przy zwiększaniu częstotliwości próbkowania. Podobne problemy występują również przy zastosowaniu innych dyskretnych metod projektowania regulatorów cyfrowych. Prowadzi to niekiedy do absurdalnych - jeśli nie stoją za nimi argumenty o ograniczeniach technicznych toru transmisji sygnału, układu pomiarowego lub urządzenia wykonawczego - wniosków o konieczności stosowania odpowiednio długiego okresu próbkowania.

Właściwym rozwiązaniem tego dylematu jest stosowanie metod opisu układów dyskretnych niewrażliwych na skracanie okresu próbkowania. Są nimi znane z literatury (Ra-

gazzini, Franklin, 1958; Kuo, 1970; Houppis, Lamont, 1985; Goodwin et al., 1986; Franklin et al., 1990; Philips, Nagle, 1990) transformacje \mathcal{W} i Γ . W szczególności, modnej obecnie transformacji Γ została poświęcona monografia Middletona i Goodwina (1990), w której lansuje się jej uniwersalne zastosowanie do modelowania, analizy i syntezy układów regulacji.

Operator δ , będący w istocie operatorem ilorazu różnicowego, jest związany z operatorem przesunięcia q następująco:

$$\delta = \frac{q-1}{\Delta}. \quad (1.1)$$

Z kolei transformacja Γ ciągu $f(i)$ jest zdefiniowana jako suma szeregu:

$$\Gamma\{f(i)\} = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)(1 + \gamma\Delta)^{-i} = F(\gamma). \quad (1.2)$$

Zmienne zespolone γ i z są zatem związane relacjami:

$$\gamma = \frac{z-1}{\Delta}, \quad z = 1 + \gamma\Delta. \quad (1.3)$$

Operator Tustina λ jest zdefiniowany poprzez zależność:

$$\lambda x_i = v_i. \quad (1.4)$$

Należy ją traktować jako symboliczny zapis operacji:

$$\frac{1}{\Delta}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}(v_{i+1} + v_i). \quad (1.5)$$

Z (1.4)-(1.5) wynikają oczywiste związki pomiędzy operatorami q i λ :

$$\lambda = \frac{2q-1}{\Delta q+1}, \quad q = (1 + \frac{\Delta}{2}\lambda)/(1 - \frac{\Delta}{2}\lambda) \quad (1.6)$$

oraz w i z :

$$w = \frac{2z-1}{\Delta z+1}, \quad z = (1 + \frac{\Delta}{2}w)/(1 - \frac{\Delta}{2}w). \quad (1.7)$$

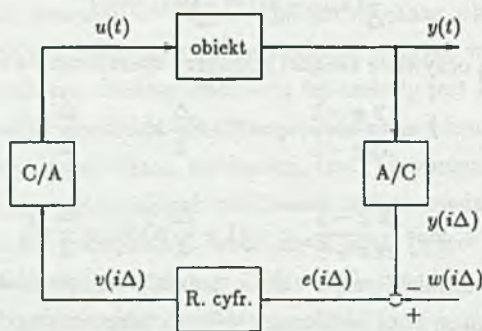
W opracowaniu polemizuje się z tezą o uniwersalnej przydatności transformacji Γ wykazując, że - być może poza problemem obliczeń rekurencyjnych - ustępuje ona transformacji biliniowej \mathcal{W} . Dotyczy to zwłaszcza interpretacji rozkładu pierwiastków i charakterystyk częstotliwościowych oraz właściwości asymptotycznych.

Okazuje się, że dla modeli na płaszczyźnie w możliwe jest stosowanie metod czasu ciągłego, łącznie z analogami ciągłymi metody Ragazziniego (np. Kailath, 1980). Dodatkowym argumentem na rzecz transformacji \mathcal{W} jest możliwość daleko posuniętych uproszczeń modelu na płaszczyźnie w , wynikająca z właściwości asymptotycznych transformacji \mathcal{W} i obowiązująca dla stosunkowo szerokiego zakresu częstotliwości próbkowania.

W granicy układ regulacji dyskretnej zbliża się swymi właściwościami do układu regulacji ciągłej. W związku z tym, gdy próbkowanie jest bardzo częste, jak to ma miejsce w przypadku szybkich regulatorów cyfrowych, wpływ dyskretyzacji na dynamikę układu regulacji jest nieznaczny i wówczas dla celów analizy i syntezy można układ regulacji uważać za ciągły. Największe znaczenie mają przypadki pośrednie, gdy jakościowo zachowanie się układu dyskretnego jest zbliżone do ciągłego ale pogorszenie jakości wskutek próbkowania jest już zauważalne. Do analizy i syntezy układów regulacji można wówczas stosować metody analogiczne do metod stosowanych dla regulacji ciągłej, jednakże odniesione do pewnych pseudociągłych obiektów zastępczych. Metodyka aproksymacji układu dyskretnego układem ciągłym oraz jej związku z transformatą W jest omawiana w części drugiej.

2. Struktura układu regulacji dyskretnej

Układy dyskretne, mimo pewnej straty jakości w stosunku do ciągłych, mogą dawać dodatkowe korzyści. W układach sterowania coraz częściej stosuje się cyfrowe układy regulacji. Możliwa jest wówczas realizacja kilku układów regulacji działających jednocześnie w oparciu o jeden procesor lub też wykorzystywanie procesora równocześnie do innych celów. Układ cyfrowy umożliwia realizację dowolnie złożonych dyskretnych algorytmów regulacji.



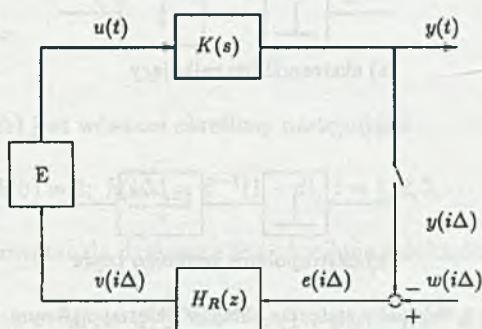
Rys. 1. Schemat ideowy cyfrowego układu regulacji

Fig. 1. Structure of a digital control system

Uproszczony schemat cyfrowego układu regulacji przedstawiono na rys.1, gdzie sygnały analogowe oznaczono linią podwójną, zaś sygnały cyfrowe linią pojedynczą.

Rozważmy schemat zastępczy układu regulacji impulsowej, składającego się z obiektu ciągłego o transmitancji $K(s)$, regulatora dyskretnego o transmitancji $H_R(z)$ oraz ekstra-

polatora E, przedstawiony na rys.2.



Rys. 2. Schemat blokowy układu regulacji dyskretny

Fig. 2. Block diagram of a sampled-data control system

Klucz symbolizuje próbkowanie sygnału ciągłego i przypisywanie tym wielkościom wartości cyfrowych. Zadaniem ekstrapolatora jest zamiana ciągu liczb wypracowanych przez regulator i określonych w dyskretnych chwilach czasu $i\Delta$ na sygnał fizyczny określony dla każdej chwili czasu t .

W teorii układów impulsowych stosuje się często pojęcie impulsatora idealnego, dającego w chwilach próbkowania pseudofunkcje Diraca o całce proporcjonalnej do wartości sygnału wejściowego (lub jego reprezentacji cyfrowej). Za pomocą impulsatora idealnego oraz tzw. członu formującego określonego odpowiednią transmitancją można zamodelować dowolny ekstrapolator. Przykłady przedstawiono na rys.3. Sygnał $v^*(i\Delta)$ jest określony jako ciąg impulsów Diraca o polu powierzchni proporcjonalnym do wartości wyjścia regulatora cyfrowego $v(i\Delta)$, to znaczy: $v^*(i\Delta) = v(i\Delta)\delta(t - i\Delta)$.

Dla celów obliczeniowych transmitancję ekstrapolatora włącza się niekiedy do transmitancji obiektu.

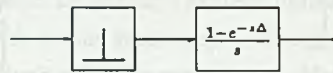
3. Transmitancje dyskretny i ich właściwości

Zbadamy obecnie ogólną strukturę transmitancji dyskretny oraz zależność jej zer i biegunów od struktury i parametrów obiektu ciągłego oraz okresu próbkowania.

Najpierw wyznaczmy transmitancję dyskretną na płaszczyźnie z , a następnie skorzystamy z odpowiednich przekształceń prowadzących do płaszczyzn γ i w .



a) ekstrapolator całkujący



b) ekstrapolator zerowego rzędu

Rys. 3. Schematy zastępcze układów z ekstrapolatorami

Fig. 3. Equivalent block-diagrams of systems with extrapolators

3.1. Płaszczyzna z

Transmitancję dyskretną $H(z)$ definiuje się jako:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(i\Delta)\} = \sum_{i=0}^{\infty} h(i\Delta)z^{-i}, \quad (3.1)$$

gdzie \mathcal{Z} jest symbolem transformacji \mathcal{Z} ciągu $h(i\Delta)$, będącego ciągiem próbek odpowiedzi zestawu ekstrapolator-obiekt na pojedynczy impuls o wartości jednostkowej podany na wejście ekstrapolatora w chwili $t = 0$. Aby model dyskretny układu zamkniętego z regulatorem działającym bez opóźnienia spełniał zasadę przyczynowości, tzn. aby wynik pomiaru w chwili $i\Delta$, nie zależał od sterowania w chwili $i\Delta$, konieczne jest utworzenie ciągu wartości lewostronnych:

$$h(i\Delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(i\Delta - \epsilon), \quad \epsilon > 0. \quad (3.2)$$

Na ogół funkcja $h(t)$ jest ciągła dla $t \geq 0$ i wówczas nie zachodzi potrzeba rozróżniania wartości lewostronnych i prawostronnych. Warto podkreślić, że w niektórych podręcznikach (np. Åström, Wittenmark, 1984, str. 54-55) nie zwraca się uwagi na możliwość nieciągłości funkcji $h(t)$, co prowadzi do błędnych wyników. Na przykład poprawną transmitancją dyskretną dla układu ciągłego o transmitancji $K(s) = 1$ jest $H(z) = z^{-1}$, podczas gdy według algorytmu ze str. 55 cytowanej pracy otrzymuje się $H(z) = 1$.

Dla układu pierwszego rzędu

$$K(s) = \frac{1}{sT + 1} \quad (3.3)$$

odpowieź na pojedynczy impuls z ekstrapolatora zerowego rzędu jest określona zależ-

nością:

$$h(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/T}, & 0 \leq t < \Delta \\ e^{-(t-\Delta)/T} - e^{-t/T}, & t \geq \Delta \end{cases} \quad (3.4)$$

Przyjmijmy oznaczenie:

$$d = e^{-\Delta/T}. \quad (3.5)$$

Poszukiwany ciąg $h(i\Delta)$ jest wówczas określony następująco:

$$h(0) = 0; \quad h(i\Delta) = d^{i-1}(1-d), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

W związku z tym transmitancja dyskretna jest określona zależnością:

$$H(z) = (1-d)z^{-1} + z^{-2}d(1-d) \sum_{i=0}^{\infty} d^i z^{-i} = (1-d)z^{-1} + z^{-2}d(1-d) \frac{z}{z-d}. \quad (3.7)$$

Po prostych przekształceniach:

$$H(z) = \frac{1-d}{z-d}. \quad (3.8)$$

Żałóśmy, że transmitancja obiektu ciągłego jest określona wzorem:

$$K(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (sT_i + 1)}{\prod_{j=1}^n (sT_j + 1)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{sT_i + 1}, \quad (3.9)$$

gdzie $n > m$ oraz $T_i \neq T_j$ dla $i \neq j$.

Korzystając z liniowości transformacji \mathcal{Z} mamy:

$$H(z) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{1-d_i}{z-d_i} = \frac{b_0 z^{n-1} + \dots + b_{n-2} z + b_{n-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}. \quad (3.10)$$

Z powyższego wynika, że różnica stopni mianownika i licznika transmitancji dyskretniej wynosi 1 niezależnie od różnicy stopni mianownika i licznika transmitancji ciągłej.

Współczynniki a_i wielomianu mianownika transmitancji dyskretniej są związane z biegunami d_i transmitancji dyskretniej następująco:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = (z-d_1)(z-d_2) \dots (z-d_n), \quad (3.11)$$

przy czym $d_i = e^{-\Delta/T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Podobnie, dla licznika transmitancji $H(z)$ mamy:

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = b_0 (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n). \quad (3.12)$$

Niestety, ogólne wzory wiążące zera z_j transmitancji $H(z)$ z parametrami układu ciągłego nie istnieją.

Szczególną uwagę poświęcimy możliwości pojawienia się zer leżących na zewnątrz okręgu jednostkowego lub w lewym półkolu blisko okręgu jednostkowego. Posiadają one istotny wpływ na przebieg charakterystyk częstotliwościowych oraz istotne znaczenie dla metodyki syntezy regulatorów dyskretnych.

Obiektem odgrywającym dużą rolę w badaniu właściwości transmitancji dyskretnych jest obiekt o transmitancji:

$$K(s) = 1/s^k. \quad (3.13)$$

Transmitancja dyskretna układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu wyraża się w przypadku obiektu (3.13) wzorem (Åström et al., 1984; Clarke, 1984):

$$H(z) = \frac{\Delta^k B_k(z)}{k! (z-1)^k}, \quad B_k(z) = b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \dots + b_k \quad (3.14)$$

Współczynniki b_i mogą być obliczone za pomocą formuły:

$$b_i = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} j^k \binom{k+1}{i-j}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.15)$$

Przykładowo:

$$\begin{aligned} B_1(z) &= 1 \\ B_2(z) &= z + 1 \\ B_3(z) &= z^2 + 4z + 1 \\ B_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1 \\ B_5(z) &= z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wskutek symetrii współczynników wielomiany $B_k(z)$ posiadają tę własność, że jeśli z_i jest zerem wielomianu, to jest nim również z_i^{-1} . Konsekwencją tego faktu jest to, że dla $k > 1$ każdy z wielomianów $B_k(z)$ posiada zera leżące na okręgu jednostkowym lub na zewnątrz tego okręgu. Inną interesującą i ważną właściwością tych wielomianów jest to, że ich zera leżą w lewej półpłaszczyźnie z i są rzeczywiste ujemne.

Obecnie zbadamy zachowanie się transmitancji dyskretniej dla bardzo małych okresów próbkowania. Wynik pokrywa się z wynikiem Åströma et al. (1984), jest on jednak uzyskany w sposób bardziej prosty i bezpośredni.

Rozwińmy transmitancję $K(s)$, dzieląc licznik przez mianownik w następujący szereg:

$$K(s) = \mu_0/s^{n-m} + \mu_1/s^{n-m+1} + \dots, \quad (3.17)$$

gdzie μ_0, μ_1, \dots są parametrami Markowa oraz

$$\mu_0 = \frac{T_1 T_2 \dots T_m}{T_1 T_2 \dots T_n}. \quad (3.18)$$

Na podstawie (3.6) można napisać:

$$H(z) = \mu_0 \frac{\Delta^{n-m} B_{n-m}(z)}{(n-m)! (z-1)^{n-m}} + \mu_1 \frac{\Delta^{n-m+1} B_{n-m+1}(z)}{(n-m+1)! (z-1)^{n-m+1}} + \dots \quad (3.19)$$

W związku z tym, że kolejne wyrazy szeregu są małymi rzędu wyższego, mamy

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{m-n} H(z) = \frac{\mu_0 B_{n-m}(z)(z-1)^m}{(n-m)! (z-1)^n}. \quad (3.20)$$

Wynik zawarty w zależności (3.20) można sformułować następująco:

Niech n będzie stopniem mianownika, zaś m stopniem licznika transmitancji wymiernej $K(s)$ oraz $m < n$. Wówczas przy okresie próbkowania Δ zmierzającym do zera:

- n biegunów transmitancji zmierza do wartości 1,
- m zer transmitancji zmierza do wartości 1,
- pozostałe $n - m - 1$ zer zmierza do zer $B_{n-m}(z)$, gdzie B_k jest wielomianem zdefiniowanym przez (3.14)-(3.15).

Oznacza to, że przy małych okresach próbkowania oraz $k > 1$ zawsze istnieją zera transmitancji dyskretnej, znajdujące się w pobliżu lub na zewnątrz okręgu jednostkowego, niezależnie od wartości parametrów układu ciągłego. Podobnie zanika związek pomiędzy parametrami układu ciągłego a biegunami transmitancji zbliżającymi się do wartości 1.

Wynika stąd, że w przypadku bardzo małych okresów próbkowania transmitancja dyskretna traci sens i układ można praktycznie traktować jak ciągły. Dzięki relacji $z = e^{s\Delta}$ jest to oczywiste, gdyż:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} H(e^{s\Delta}) = K(s). \quad (3.21)$$

Wzór (3.21) wynika z rozkładu $H(e^{s\Delta})$ na ułamki proste oraz reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c_i \frac{1 - e^{-\Delta/T_i}}{e^{-s\Delta} - e^{-\Delta/T_i}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c_i \frac{1/T_i e^{-\Delta/T_i}}{s e^{-s\Delta} + 1/T_i e^{-\Delta/T_i}} = K(s). \quad (3.22)$$

Należy podkreślić, iż w literaturze (Hersh, 1993) stwierdza się - w oczywisty sposób błędnie - że transmitancja dyskretna nie zmierza do ciągłej. Dalszą interpretację tego zjawiska można znaleźć w następujących punktach.

Obecnie rozważymy zachowanie się transmitancji dyskretnej przy okresie próbkowania bardzo dużym. Załóżmy, że transmitancja obiektu ciągłego jest określona wzorem (3.9), przy czym wszystkie stałe czasowe są dodatnie, tzn. obiekt jest stabilny. Zauważmy, że:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} d_i = \lim_{\Delta \rightarrow 0} e^{-\Delta/T_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

W związku z tym na podstawie (3.10) oraz faktu, że wzmocnienie układu (3.9) jest równe 1, dostaje się (Åström et al., 1984; Clarke, 1984):

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} H(z) = z^{-1} \sum_{i=1}^n c_i = z^{-1} = \frac{z^{n-1}}{z^n}. \quad (3.24)$$

Transmitancja dyskretna degeneruje się zatem do opóźnienia dyskretnego. Wynik ten można również zinterpretować w ten sposób, że zarówno bieguny, jak i zera transmitancji zbiegają do wartości zerowych.

W przypadku stałych czasowych znacznie różniących się, $T_1 > T_2 > \dots > T_k \gg \dots > T_n$, i skończonych wartości Δ transmitancję dyskretną można przybliżyć przyjmując $d_1 > d_2 > \dots > d_k \neq 0$ oraz $d_{k+1} = \dots = d_n = 0$.

Nieco inaczej wygląda sytuacja w przypadku obiektów całkujących o transmitancji:

$$K(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s\tau_i + 1)}{s^k \prod_{j=1}^{n-k} (sT_j + 1)} = \sum_{i=1}^k c_i/s^i + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{c_{i+k}}{sT_i + 1}. \quad (3.25)$$

Odpowiada jej transmitancja dyskretna

$$H(z) = \sum_{i=1}^k c_i \frac{\Delta^i}{i!} \frac{B_i(z)}{(z-1)^i} + \sum_{i=1}^{n-k} c_{i+k} \frac{1-d_i}{z-d_i}. \quad (3.26)$$

Mamy zatem

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\Delta^k}{k!} \frac{B_k(z)}{(z-1)^k} \quad (3.27)$$

i obecnie $k-1$ zer transmitancji zbiega do zer wielomianu $B_k(z)$, zaś k biegunów jest równe 1. Pozostałe zera i bieguny zbiegają do wartości zerowych.

3.2. Płaszczyzna γ

Transformacja Γ (Middleton, Goodwin, 1990), związana z operatorem δ określonym w (1.1), jest zdefiniowana poprzez zmienną zespoloną γ następująco:

$$\gamma = \frac{z-1}{\Delta} \text{ lub } z = 1 + \gamma\Delta, \quad (3.28)$$

co prowadzi do transmitancji dyskretniej $\tilde{K}(\gamma)$ określonej na płaszczyźnie γ zależnością:

$$\tilde{K}(\gamma) = H(z)|_{z=1+\gamma\Delta}. \quad (3.29)$$

Dla obiektu pierwszego rzędu zachodzi

$$\tilde{K}(\gamma) = \frac{1}{\frac{\Delta}{1-d}\gamma + 1}, \quad (3.30)$$

gdzie

$$d = e^{-\Delta/T}. \quad (3.31)$$

Można z łatwością pokazać, że:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{K}(\gamma) = K(s)|_{s=\gamma}. \quad (3.32)$$

Istotnie, korzystając z reguły de l'Hospitala, mamy:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{1 - \exp(-\Delta/T)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{(1/T) \exp(-\Delta/T)} = T. \quad (3.33)$$

Załóżmy, że obiekt o transmitancji:

$$K(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s\tau_i + 1)}{\prod_{j=1}^n (sT_j + 1)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{sT_i + 1}, \quad (3.34)$$

gdzie $n > m$ oraz $T_i \neq T_j$ dla $i \neq j$ współpracuje z ekstrapolatorem zerowego rzędu.

Przyjmijmy oznaczenie $\tilde{T}_i = \Delta/(1 - d_i)$. Wówczas, na podstawie (3.30) mamy:

$$\bar{K}(\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\gamma \tilde{T}_i + 1} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \gamma \tilde{\tau}_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + \gamma \tilde{T}_i)}. \quad (3.35)$$

Transformata Γ pozwala na dalszą analizę właściwości transmitancji dyskretnej.

Na podstawie (3.32), (3.34) oraz (3.35) widać, że zależność graniczna:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{K}(\gamma) = K(s)|_{s=\gamma} \quad (3.36)$$

obowiązuje dla dowolnej transmitancji dyskretnej układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu i oznacza, że przy okresie próbkowania zmierzającym do zera właściwości układu dyskretnego zbliżają się do właściwości układu ciągłego. W związku z tym w transmitancji $\bar{K}(\gamma)$ przy $\Delta \rightarrow 0$ zachodzi $\tilde{T}_i \rightarrow T_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\tilde{\tau}_k \rightarrow \tau_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ oraz $\tilde{\tau}_j \rightarrow 0$, $j = m + 1, \dots, n - 1$. Wynik ten jest również zawarty w artykule Hersha (1993), został on tam jednak otrzymany w sposób nieporównywalnie bardziej złożony. Z kolei przy $\Delta \rightarrow \infty$ zachodzi $\tilde{T}_i \rightarrow \Delta$ oraz, na podstawie (3.35), $\tilde{\tau}_i \rightarrow \Delta$. Zatem:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \bar{K}(\gamma) = \frac{1}{\gamma \Delta + 1}. \quad (3.37)$$

3.3. Płaszczyzna w

Transformacja \mathcal{W} zdefiniowana poprzez

$$w = \frac{2z - 1}{\Delta z + 1} \text{ lub } z = \frac{1 + \frac{1}{2}w\Delta}{1 - \frac{1}{2}w\Delta} \quad (3.38)$$

prowadzi do transmitancji dyskretnej $\bar{K}(w)$ określonej na płaszczyźnie w zależnością:

$$\bar{K}(w) = H(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{1}{2}w\Delta}{1 - \frac{1}{2}w\Delta}}. \quad (3.39)$$

Transformacja ta, zwana biliniową lub Tustina, jest szeroko rozpowszechniona w literaturze. Zgodnie z oryginalną pracą Tustina (1947) służy ona na ogół do aproksymacji dyskretnej układu ciągłego lub aproksymacji ciągłej układu dyskretnego. Dla obydwu tych

zastosowań należy we wzorach (3.38) w miejsce w podstawić s . Aproksymacje te są ważne dla stosunkowo małych okresów próbkowania. W niniejszej pracy takiego utożsamiania nie dokonujemy, zaś transformacja \mathcal{W} jest ważna dla dowolnych okresów próbkowania.

Dla obiektu pierwszego rzędu zachodzi:

$$\bar{K}(w) = \frac{1 - \frac{\Delta}{2}w}{1 - d \frac{\Delta}{2}w + 1}, \quad (3.40)$$

gdzie

$$d = e^{-\Delta/T}. \quad (3.41)$$

Można z łatwością pokazać, że:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{K}(w) = K(s)_{s=w}. \quad (3.42)$$

Istotnie, korzystając z reguły de l'Hospitala, mamy:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 + \exp(-\Delta/T) \frac{\Delta}{2}}{1 - \exp(-\Delta/T) \frac{\Delta}{2}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 + \exp(-\Delta/T) - (\Delta/T) \exp(-\Delta/T)}{(2/T) \exp(-\Delta/T)} = T. \quad (3.43)$$

Załóżmy, że obiekt o transmitancji:

$$K(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s\tau_i + 1)}{\prod_{j=1}^n (sT_j + 1)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{sT_i + 1}, \quad (3.44)$$

gdzie $n > m$ oraz $T_i \neq T_j$ dla $i \neq j$ współpracuje z ekstrapolatorem zerowego rzędu.

Przyjmijmy oznaczenie $T_i^* = \frac{\Delta}{2}$. Wówczas, na podstawie (3.40) mamy:

$$\bar{K}(w) = (1 - w \frac{\Delta}{2}) \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{wT_i^* + 1} = (1 - w \frac{\Delta}{2}) \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1 + wT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + wT_i)}. \quad (3.45)$$

Transformata \mathcal{W} pozwala na dalszą analizę właściwości transmitancji dyskretnej.

Na podstawie (3.42), (3.44) oraz (3.45) widać, że zależność graniczna:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{K}(w) = K(s)_{s=w} \quad (3.46)$$

obowiązuje dla dowolnej transmitancji dyskretnej układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu i oznacza, że przy okresie próbkowania zmierzającym do zera właściwości układu dyskretnego zблиżają się do właściwości układu ciągłego. W związku z tym w transmitancji $\bar{K}(w)$ przy $\Delta \rightarrow 0$ zachodzi $T_i^* \rightarrow T_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\tau_k^* \rightarrow \tau_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ oraz $\tau_j^* \rightarrow 0$, $j = m + 1, \dots, n - 1$. Okazuje się, że przybliżenie $T^* \cong T$ obowiązuje dla szerokiego zakresu częstotliwości próbkowania. Ujmuje to tabela 1.

W związku z tym, że zbieżność $T_i^* \rightarrow T_i$ jest bardzo szybka, prostą i obowiązującą w stosunkowo szerokim zakresie okresów próbkowania aproksymacją $\bar{K}(w)$ jest:

$$\bar{K}(w) \cong (1 - w \frac{\Delta}{2}) \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{wT_i + 1} = (1 - w \frac{\Delta}{2}) K(w). \quad (3.47)$$

Tabela 1

Δ/T	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
T^*/T	1.0008	1.0033	1.0075	1.0133	1.0207	1.0298	1.0405	1.0528	1.0666	1.0820

Dla skorzystania z tej aproksymacji obliczanie $H(z)$ nie jest konieczne i $\bar{K}(w)$ można wyznaczyć wprost na podstawie transmitancji obiektu $K(s)$. Z kolei przy $\Delta \rightarrow \infty$ zachodzi $T_i^* \rightarrow \frac{\Delta}{2}$ oraz, na podstawie (3.47), $\tau_i^* \rightarrow \frac{\Delta}{2}$. Zatem:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \bar{K}(w) = (1 - w \frac{\Delta}{2}) / (1 + w \frac{\Delta}{2}). \quad (3.48)$$

Dla wartości Δ takich, że moduł zera wielomianu $K(z)$ jest równy 1, stopień licznika transmitancji ulega obniżeniu o jeden. Istotnie, jeśli dla $\Delta = \Delta' - \epsilon$ jest $\tau_i > 0$, zaś dla $\Delta = \Delta' + \epsilon$ jest $\tau_i < 0$, gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą, to z ciągłości dla $\Delta = \Delta'$ wynika $\tau_i = 0$. Odpowiada to zeru $z_i = -1$.

4. Ocena stabilności

Na ogół wymaganiem podstawowym stawianym układowi regulacji jest jego stabilność.

W przypadku układów ciągłych warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności jest, aby pierwiastki s_i równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie s :

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

Analiza stabilności i jakości układów na płaszczyźnie z i γ jest bardziej złożona i mniej pogłębiona. I tak dla opisu za pomocą operatora przesunięcia warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności jest, aby pierwiastki z_i równania charakterystycznego leżały wewnątrz okręgu jednostkowego:

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Istnieje wprawdzie cały szereg kryteriów stabilności sprawdzających ten warunek (Ackermann, 1972; Isermann, 1980; Jury, 1966), są one jednak na ogół znacznie bardziej skomplikowane od kryterium Hurwitza. Dlatego też jedną z zalecanych metod badania stabilności układów dyskretnych jest uprzednie dokonanie odwzorowania wnętrza okręgu jednostkowego na lewą półpłaszczyznę. Należy podkreślić, że tę właśnie cechę posiada odwzorowanie \mathcal{W} .

W przypadku stosowania opisu z operatorem δ warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności jest, aby pierwiastki równania charakterystycznego γ_i spełniały zależność:

$$|1 + \gamma_i \Delta| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

lub

$$\frac{\Delta}{2} |\gamma_i|^2 + \operatorname{Re}(\gamma_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Zgodnie z (4.3) obszarem stabilności na płaszczyźnie γ jest wnętrze okręgu o promieniu $1/\Delta$ i środku $(-1/\Delta, j0)$. Jest oczywiste, że sprawdzanie stabilności na płaszczyźnie γ jest jeszcze bardziej złożone i brak jest odpowiednich kryteriów bezpośrednio sprawdzających (4.3) lub (4.4).

W przypadku analizy układu na płaszczyźnie w warunek stabilności jest taki sam jak dla regulacji ciągłej:

$$\operatorname{Re}(w_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

gdzie w_i są pierwiastkami równania charakterystycznego.

Badanie stabilności może być wykonane za pomocą programu komputerowego i wówczas złożoność warunku stabilności nie odgrywa większej roli. Jednakże w przypadku projektowania układu regulacji na podstawie położenia pierwiastków względem granicy stabilności decyzje podejmuje projektant. Niewątpliwie najwygodniejsza pod tym względem jest płaszczyzna w .

Ważne zagadnienia zapasu stabilności na płaszczyźnie zespolonej są omówione w części 2.

5. Linie pierwiastkowe

Linie pierwiastkowe należą do podstawowych narzędzi projektowania układów regulacji (Kuo, 1975; D'Zazzo, Houpsis, 1988; Franklin et al. 1991). Dlatego w niniejszym punkcie omawiamy ich osobliwości dla różnych form opisu układów dyskretnych.

5.1. Płaszczyzna z

Linie pierwiastkowe na płaszczyźnie z wykreśla się na tych samych zasadach jak dla układów ciągłych. Istotną różnicą jest to, że w trakcie projektowania interesuje nas ich przebieg w pobliżu okręgu jednostkowego. Ponieważ stopień licznika transmitancji dyskretniej jest dokładnie o jeden mniejszy od stopnia mianownika, $n-1$ gałęzi linii pierwiastkowych kończy się w skończonych zerach, zaś jedna z gałęzi zmierza do nieskończoności. Zgodnie z zależnościami (3.16), (3.20), przy $\Delta \rightarrow 0$, zarówno zera jak i bieguny układu otwartego przyjmują skończone położenia niezależne od wartości zer i biegunów obiektu ciągłego.

5.2. Płaszczyzna γ

Linie pierwiastkowe na płaszczyźnie γ wykreśla się tak samo jak dla układów ciągłych. Istotną różnicą jest to, że w trakcie projektowania interesuje nas ich przebieg w pobliżu okręgu jednostkowego. Ponieważ stopień licznika transmitancji dyskretny jest dokładnie o jeden mniejszy od stopnia mianownika, $n - 1$ gałęzi linii pierwiastkowych kończy się w skończonych zerach, zaś jedna z gałęzi zmierza do nieskończoności. Istotną korzystną cechą przy $\Delta \rightarrow 0$ jest to, że obecnie bieguny układu dyskretnego zmierzają do biegunów układu ciągłego, część zer układu dyskretnego zmierza do zer układu ciągłego, zaś pozostałe zera zmierzają do nieskończoności. Pozwala to na łatwe rozróżnienie zer obiektu od zer wnoszonych przez operację próbkowania.

5.3. Płaszczyzna w

Cechą linii pierwiastkowych układów dyskretnych na płaszczyźnie w jest to, że przy prawie wszystkich skończonych wartościach Δ ich gałęzie kończą się w skończonych zerach, gdyż zgodnie z (3.43) liczba zer i biegunów transmitancji $\bar{K}(w)$ jest taka sama. Wyjątkiem są takie wartości Δ , dla których dla pewnego τ_i zachodzi $\tau_i = 0$. Wówczas jedno z zer jest w nieskończoności i asymptotą staje się oś rzeczywistych. W przypadku małych wartości Δ zera i bieguny układu dyskretnego są bliskie swym odpowiednikom dla układu ciągłego. Natomiast jedno z zer, a mianowicie $2/\Delta$, leżące w prawej półpłaszczyźnie i wnoszone przez operację próbkowania i ekstrapolacji może mieć dominujące znaczenie dla jakości układu zamkniętego. Umożliwia to prostą analizę jakości układu zamkniętego w zależności od Δ , a tym samym daje podstawy do wyboru właściwej częstotliwości próbkowania.

6. Charakterystyki częstotliwościowe

6.1. Transmitancja $H(z)$

Podobnie jak dla układów ciągłych można zdefiniować charakterystykę częstotliwościową

$$H(e^{j\omega\Delta}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega\Delta}}. \quad (6.1)$$

Ponieważ $e^{j\omega\Delta}$ jest funkcją okresową argumentu $\omega\Delta$ o okresie 2π , więc charakterystyka częstotliwościowa jest również funkcją okresową. Ponadto wykres $H(e^{j\omega\Delta})$ na płaszczyźnie

zmiennej zespolonej jest symetryczny względem osi rzeczywistych. Wynika z tego, że wystarczy wyznaczać przebieg charakterystyki dla zakresu zmian pulsacji $0 \leq \omega \leq \pi/\Delta$.

Dla obydwu skrajnych wartości pulsacji charakterystyka przyjmuje wartości rzeczywiste: $H(1)$ oraz $H(-1)$.

Oprócz opisaney charakterystyki Nyquista można zdefiniować również charakterystyki Bodego: amplitudy $H(\omega\Delta)$ i fazy $\psi(\omega\Delta)$, przy czym:

$$H(e^{j\omega\Delta}) = H(\omega\Delta)e^{j\psi(\omega\Delta)}, \quad (6.2)$$

gdzie

$$H(\omega\Delta) = |H(e^{j\omega\Delta})|, \quad \psi(\omega\Delta) = \text{Arg } H(e^{j\omega\Delta}). \quad (6.3)$$

6.2. Transmitancja $\tilde{K}(\gamma)$

Zgodnie z (3.28) w celu otrzymania charakterystyki częstotliwościowej należy wprowadzić zmienną zespoloną β związaną z ω relacją:

$$\beta = \frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta}. \quad (6.4)$$

Charakterystyka częstotliwościowa jest zatem odwzorowaniem okręgu o promieniu $1/\Delta$ i środku $(-1/\Delta, j0)$.

Interpretacja zmiennej β jest raczej złożona, tak że pod tym względem płaszczyzna γ ustępuje płaszczyźnie w . Dla małych wartości Δ i $\omega\Delta$ zależność (6.4) sugeruje aproksymację $\beta \cong j\omega$. Jej przyjęcie powoduje jednak odkształcenie zarówno charakterystyk Nyquista, jak i Bodego.

6.3. Transmitancja $\tilde{K}(w)$

Analizę właściwości charakterystyk częstotliwościowych układów dyskretnych oraz ich projektowanie jest szczególnie dogodnie prowadzić na płaszczyźnie w . Różnym wartościom pulsacji ω odpowiadają punkty na okręgu jednostkowym leżącym na płaszczyźnie z określonym wzorem $z = e^{j\omega\Delta}$, zaś po zastosowaniu transformacji \mathcal{W} punkty na prostej $w = j\nu$, leżącej na płaszczyźnie w . Zgodnie z transformacją \mathcal{W} jest:

$$e^{j\omega\Delta} = \frac{1 + j\nu\Delta/2}{1 - j\nu\Delta/2} = e^{2j\arctg(\nu\Delta/2)}, \quad (6.5)$$

a zatem ω i ν są związane zależnością:

$$\omega = \frac{2}{\Delta} \arctg\left(\frac{\Delta}{2}\nu\right). \quad (6.6)$$

Zmienna ν nosi nazwę pseudopulsacji. Umożliwia ona traktowanie układów dyskretnych tak jak ciągłych. Jak widać, przy zmianie ν od $-\infty$ do $+\infty$, $\omega\Delta$ zmienia się od $-\pi$ do $+\pi$. Dlatego w zakresie pseudopulsacji $-\infty \leq \nu \leq +\infty$ charakterystyki $\bar{K}(j\nu)$ stają się nieokresowe.

Przebieg charakterystyk Nyquista (amplitudowo-fazowych) układu dyskretnego po zastosowaniu transformacji \mathcal{W} nie ulega zmianie, zmienia się jedynie skala pulsacji, będąca parametrem charakterystyki. W związku z tym np. kryterium Nyquista może być stosowane do układów dyskretnych o transmitancji $\bar{K}(j\nu)$ w taki sam sposób jak do układu ciągłego o transmitancji $\bar{K}(j\omega)$.

Charakterystyki zależne jawnie od pulsacji, np. charakterystyki Bodego, wykreśla się na ogół w zakresie $0 \leq \nu \leq +\infty$, przy czym dla osi pseudopulsacji ν przyjmuje się skalę logarytmiczną.

Dla małych wartości $\nu\Delta$ zależność (6.6) sugeruje $\omega \cong \nu$. Należy podkreślić, że w przeciwieństwie do płaszczyzny γ przyjęcie tej aproksymacji nie zmienia kształtu charakterystyk Nyquista. Deformacji ulegają jedynie, w zakresie większych wartości $\omega\Delta$, charakterystyki Bodego. Wartość okresu próbkowania może być wówczas dobrana tak, aby deformacje w zakresie pulsacji rezonansowych układu regulacji były niewielkie. Wówczas właściwości dynamiczne układu dyskretnego będą zbliżone do właściwości układu ciągłego.

Właściwości charakterystyk częstotliwościowych można najłatwiej zbadać na podstawie transmitancji określonej w wyniku transformacji \mathcal{W} :

$$\bar{K}(w) = (1 - w \frac{\Delta}{2}) \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (w\tau_i^* + 1)}{\prod_{i=1}^n (wT_i^* + 1)}. \quad (6.7)$$

Zauważmy, że

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{K}(j\nu) = -\frac{\Delta \prod_{i=1}^{n-1} \tau_i^*}{2 \prod_{i=1}^n T_i^*}. \quad (6.8)$$

Dla prawie wszystkich wartości Δ oraz dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ zachodzi $\tau_i^* \neq 0$, w związku z czym charakterystyka Nyquista kończy się na osi rzeczywistych poza początkiem układu współrzędnych. Dla izolowanych wartości Δ oraz pewnego i zachodzi $\tau_i^* = 0$. W tym szczególnym przypadku stopień mianownika transmitancji jest o jeden wyższy od stopnia licznika i charakterystyka Nyquista kończy się w zerze.

Weźmy pod uwagę charakterystykę fazy:

$$\bar{\varphi}(\nu) = -\arctg(\nu \frac{\Delta}{2}) + \arctg(\nu\tau_i^*) - \arctg(\nu T_i^*). \quad (6.9)$$

Przyjmijmy, że $\tau_i^* > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $\tau_j^* < 0$ dla $j = k+1, \dots, n-1$. Zgodnie z (6.9) mamy wówczas:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\nu) = -\pi/2 + k\pi/2 - (n-k-1)\pi/2 - n\pi/2 = -(n-k)\pi. \quad (6.10)$$

W związku z tym przyrost fazy układu dyskretnego dla prawie wszystkich wartości Δ jest równy całkowitej wielokrotności $-\pi$.

Porównajmy obecnie charakterystyki częstotliwościowe układu ciągłego i dyskretnego przy wysokiej częstotliwości próbkowania. Przyjmijmy, że transmitancja obiektu ciągłego jest określona wzorem:

$$K(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s\tau_i + 1)}{\prod_{i=1}^n (sT_i + 1)}, n > m. \quad (6.11)$$

Wówczas przy $\Delta \rightarrow 0$ zachodzi $T_i^* \rightarrow T_i$, dla $i = 1, 2, \dots, n$; $\tau_i^* \rightarrow \tau_i$, dla $i = 1, 2, \dots, m$; $\tau_i^* \rightarrow 0$, dla $i = m + 1, \dots, n - 1$. W efekcie charakterystyki Bodego zarówno amplitudy, jak i fazy układu ciągłego o transmitancji $(1 - \frac{\Delta}{2}j\nu)K(j\nu)$ oraz układu dyskretnego o transmitancji $\tilde{K}(j\nu)$ pokrywają się dla szerokiego zakresu częstotliwości. Rozbieżności pojawiają się dopiero dla bardzo wysokich wartości $\nu\Delta$ lub, inaczej mówiąc, dla wartości $\omega\Delta \cong \pi$.

Dla bardzo dużych wartości Δ charakterystyka częstotliwościowa układu dyskretnego zbliża się do charakterystyki przesuwnika fazowego.

7. Podsumowanie

W artykule omówiono trzy podstawowe - teoretycznie równoważne - formy transmitancji dyskretnej układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu, związane z transformacjami \mathcal{Z} , Γ oraz \mathcal{W} . Zbadano ich właściwości graniczne przy okresie próbkowania zmierzającym do zera pokazując, że współczynniki transmitancji określonych zarówno na płaszczyźnie γ , jak i w zmierzają do współczynników transmitancji części ciągłej układu. Rozważania graniczne doprowadziły do sformułowania interesującej aproksymacji transmitancji dyskretnej na płaszczyźnie w otrzymywanej przez prostą modyfikację transmitancji układu ciągłego. Pokazano również w prosty sposób, iż transmitancja określona na płaszczyźnie w ulega degeneracji polegającej na tym, że jej współczynniki zmierzają do pewnych wartości zależnych jedynie od struktury transmitancji ciągłej (rząd oraz względny rząd).

Omówiono również problem stabilności, właściwości linii pierwiastkowych oraz charakterystyk częstotliwościowych układów dyskretnych dla wymienionych transformacji. Wykazano, że we wszystkich przypadkach transmitancje określone za pomocą transformacji \mathcal{W} mają korzystniejsze właściwości od transmitancji określonych za pomocą transformacji Γ , związanej z operatorem δ .

LITERATURA

1. Ackermann J. (1985), *Sampled-Data Control Systems*, Springer-Verlag

2. Åström K. J., P. Hagander and J. Sternby (1984), Zeros of sampled systems, *Automatica*, vol.20, pp. 31-38
3. Błachuta M. (1994), Regulacja dyskretna w czasie, [w:] *Laboratorium Teorii Sterowania i Podstaw Automatyki. Praca zbiorowa pod redakcją M. Błachuty, Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1851, Gliwice*
4. Błachuta M. (1994), Korekcja dyskretnych układów regulacji [w:] *Laboratorium Teorii Sterowania i Podstaw Automatyki. Praca zbiorowa pod redakcją M. Błachuty, Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1851, Gliwice*
5. Clarke D. W. (1984), Self-tuning control of nonminimum phase systems, *Automatica*, vol. 20, pp. 501-517
6. D'Azzo J. D. and C. H. Houpis C.H., *Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern*, McGraw-Hill
7. Franklin G. F. and J. D Powell (1980), *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley
8. Franklin G. F., J. D Powell, and A. Emami-Naeini (1991), *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley
9. Franklin G. F., J. D Powell, and M. L. Workman (1990), *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley
10. Goodwin G. C., C. Lozano-Leal, Mayne D. Q. and R.H. Middleton (1986), Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, vol. 22, pp. 199-207
11. Hersh M. A. (1993), The zeros and poles of delta operator system, *Int. J. Control*, vol 57, pp. 557-575
12. Houpis C. H., G. B. Lamont (1985), *Digital Control Systems*, McGraw-Hill
13. Isermann R. (1980) *Digital Control Systems*, Springer-Verlag
14. Jury E. I. (1966), *Theory and Applications of the z-Transform Method*, Wiley
15. Kuo B. C. (1975), *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall
16. Kuo B. C. (1970), *Discrete-Data Control Systems*, Prentice-Hall

17. Middleton R. H., and G.C. Goodwin (1990), Digital Estimation and Control: A Unified Approach, Prentice-Hall
18. Phillips C. L. and H.T. Nagle (1990), Digital Control Systems Analysis and Design, Prentice-Hall
19. Ragazzini J. R. and G.F. Franklin (1958), Sampled-Data Control Systems, McGraw-Hill
20. Tustin A. (1947), A method of analyzing the behaviour of linear systems in terms of time series, JIEE (London), vol. 94, pt IIA, pp. 130-142

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Duda
AGH Kraków

Wpłynęło do Redakcji dnia 28.11.1994

Abstract

A critical comparison of exact discrete-time description methods of continuous-time systems with an extrapolator (\mathcal{Z} , Γ and \mathcal{W} transforms) and their application to the analysis and synthesis of control systems, particularly at high sampling rates and assuming finite accuracy of calculations, is presented. The comparison has been performed taking the simplicity, accuracy and efficiency into account. The problems of stability, and the properties of root loci and frequency plots when using different descriptions are addressed. The possibility of a far going simplification of the equivalent pseudo-continuous-time model, which results from the asymptotic properties of the \mathcal{W} transform and is valid for a wide range of sampling periods, is pointed out.