ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA z. 120 Nr kol. 1340

К.М. ОБЕЛЕВСКАЯ

Я.І. ЛИСКЕВИЧ

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СИММЕТРИЧНОГО КАНАЛА БЕЗ ПАМЯТИ С ДВУМЯ ГРАДАЦИЯМИ ВЕРНОСТИ

Резюме. Предложена формула для определения пропускной способности дискретного симметричного канала без памяти с двумя градациями верности через основание алфавита, вероятности ошибочного приема с присвоением высшей и низшей градации верности и через отношения вероятностей правильного и ошибочного приема для приема с высшей и низшей градациями верности.

JAKOŚĆ TRANSMISJI W DYSKRETNYM SYMETRYCZNYM TORZE PRZESYŁU Z DWOMA POZIOMAMI WIARYGODNOŚCI

Streszczenie. W pracy rozpatrzono szczególny przypadek zależności jakości transmisji w dyskretnym torze symetrycznym bez pamięci z dwoma poziomami wiarygodności. Ustalając prawdopodobieństwo poprawnego odbioru przesyłanego sygnału dla obu poziomów wiarygodności zbudowano macierz prawdopodobieństw przejść P.

Korzystając z definicji przepustowości symetrycznego toru łączności jako maksimum z różnicy odpowiednich entropii, wyprowadzono zależność na przesył sygnału w dyskretnym symetrycznym torze, bez pamięci, z dwoma poziomami wiarygodności.

TRANSMISSION QUALITY IN DISCRETE SYMMETRIC CHANNEL WITH TWO LEVELS OF LIKELIHOOD

Summary. In the paper a special case of transmission quality evaluation in discrete symmetric memoryless channel with two levels of likelihood is considered. Assuming probability of correct reception of the transmitted signal for both likelihood levels a transition probability matrix. A definition of a transmittancy for symmetric communication channel as a maximum of a difference of respective enthropies is introduced. Using this definition quality of the signal transmission in discrete symmetric memoryless channel with two levels of likelihood is evaluated.

При анализе систем передачи данных возникает необходимость определения пропускной способности каналов связи. Поскольку получение простых формул, определяющих эти величины для произвольного канала связи не удается [1], целесообразно нахождение их для частных случаев.

В настоящей работе рассмотрен дискретный симметричный канал без памяти, в котором для каждого выходного символа определяется степень его верности. Предусмотрены две градации верности принимаеых сигналов: высшая градация (ВГ) и низшая (НГ). Прием с двумя градациями верности широко используется в системах передачи данных с решающей обратной связью с посимвольным переспросом [2].

Обозначим через X множество входных, а через Y – множество выходных сигналов дискретного m–ичного по входу канала связи.

$$X = \{x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_m\},\ Y = \left\{\begin{matrix} \hat{y}_1, \check{y}_1, \ldots \hat{y}_j, \check{y}_j, \ldots \hat{y}_m, \check{y}_m, \end{matrix}\right\},$$

причем $\hat{y}_j$ получено в результате приема с высшей градацией верности, а $\check{y}_j$ - в результате приема с низшей градацей верности .

Матрица переходных вероятностей P дискретного m–ичного канала без памяти с двумя градациями верности имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} p(\hat{y}_1/x_1) \ldots p(\hat{y}_j/x_1) \ldots p(\hat{y}_m/x_1)\ p(\check{y}_1/x_1) \ldots p(\check{y}_m/x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p(\hat{y}_1/x_i) \ldots p(\hat{y}_j/x_i) \ldots p(\hat{y}_m/x_i)\ p(\check{y}_1/x_i) \ldots p(\check{y}_m/x_i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p(\hat{y}_1/x_m) \ldots p(\hat{y}_j/x_m) \ldots p(\hat{y}_m/x_m)\ p(\check{y}_1/x_m) \ldots p(\check{y}_m/x_m) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $p(\hat{y}_i/x_i)$, $p(\check{y}_i/x_i)$ - вероятности правильного приема с присвоением соответственно высшей и низшей градаций верности; $p(\hat{y}_j/x_i)$, $p(\check{y}_j/x_i)$ - вероятности ошибочного приема с присвоением соответственно высшей и низшей градаций верности.

Предположим, что для каждого передаваемого символа вероятность правильного приема с высшей градацией верности одинакова и равна Рвг,

$$p\left(\hat{y}_i / x_i\right) = \text{Рвг}, \; i = 1,2,...m, \tag{2}$$

вероятность правильного приема с присвоением низшей градации верности одинакова и равна Рнг,

$$p\left(\check{y}_i / x_i\right) = \text{Рнг}, \; i = 1,2,...m, \tag{3}$$

вероятность ошибочного приема с присвоением высшей градации верности одинакова и равна Pmax,

$$p\left(\hat{y}_j / x_i\right) = \text{Pmax}, \; i \neq j, \; i = 1,...m, \; j = 1, ...m, \tag{4}$$

вероятность ошибочного приема с присвоением низшей градации верности одинакова и равна Pmin ,

$$p\left(\check{y}_j / x_i\right) = \text{Pmin}, \; i \neq j, \; i = 1, ...m, \; j = 1,...m \tag{5}$$

С учетом условий (2) – (5) матрица переходных вероятностей P_1 размерностью (mx2m) для рассматриваемого канала примет вид

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{ВГ} P_{max} ... P_{max} ... P_{max} P_{НГ} P_{min} ... P_{min} ... P_{min} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{max} P_{max} ... P_{ВГ} ... P_{max} P_{min} P_{min} ... P_{НГ} ... P_{min} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{max} P_{max} ... P_{max} ... P_{ВГ} P_{min} P_{min} ... P_{min} ... P_{НГ} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Разобьем множество Y выходных сигналов на два непересекающихся подмножества Y_1 и Y_2 . $Y_1 = \left\{\hat{y}_1, ... \hat{y}_j, ... \hat{y}_m\right\}$, $Y_2 = \left\{\check{y}_1, ... \check{y}_j, ... \check{y}_m\right\}$. Этим множествам соответствуют матрицы переходных вероятностей P_3 и P_4 размерностью (mxm).

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{ВГ} P_{max} ... P_{max} ... P_{max} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{max} P_{max} ... P_{ВГ} ... P_{max} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{max} P_{max} ... P_{max} ... P_{ВГ} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} P_{HГ} P_{min} \ldots P_{min} \ldots P_{min} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{min} P_{min} \ldots P_{HГ} \ldots P_{min} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{min} P_{min} \ldots P_{min} \ldots P_{HГ} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Поскольку в этих матрицах каждая строка является перестановкой элементов любой другой строки, а каждый столбец является перестановкой элементов любого другого столбца, то рассматриваемый канал является симметричным [3].

Пропускная способность С симметричного канала связи может быть представлена в виде

$$C = \max_{\{p(x)\}} H(Y) - H(Y/X), \quad (9)$$

где $\max_{\{p(x)\}} H(Y)$ - максимальное значение энтропии выходных сигналов, разыскиваемое по всем возможным распределениям вероятностей p(x) на множестве X входных сигналов канала ; H(Y/X) – условная энтропия, характеризующая канал связи.

Определим составляющие формулы (9) для рассматриваемого канала.

Условная энтропия

$$H(Y/X) = - Pвг \log_a Pвг - Pнг \log_a Pнг - (m-1) Pmax \log_a Pmax - (m-1) Pmin \log_a Pmin. \quad (10)$$

Введя обозначения

$$n = Pвг/Pmax, \quad (11)$$

$$k = Pнг/Pmin, \quad (12)$$

формулу (10) можно представить в виде

$$H(Y/X) = - Pmax \log_a n^n - Pmin \log_a k^k - (m+n-1) Pmax \log_a Pmax - (k+m-1) Pmin \log_a Pmin. \quad (13)$$

Энтропия выходного сигнала

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m}\left[p\left(\hat{y}_j\right) \log_a p\left(\hat{y}_j\right) + p\left(\check{y}_j\right) \log_a p\left(\check{y}_j\right)\right], \quad (14)$$

где

$$p\left(\hat{y}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i)\, p\left(\hat{y}_j / x_i\right), \quad (15)$$

$$p\left(\check{y}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i)\, p\left(\check{y}_j / x_i\right). \quad (16)$$

С учетом условий (2) – (5), (11) и (12) уравнения (15) и (16) можно представить в виде

$$P\left(\hat{y}_j\right) = P_{max}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\left(p(x_i) + np(x_j)\right)\right], \tag{17}$$

$$P\left(\check{y}_j\right) = P_{min}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\left(p(x_i) + kp(x_j)\right)\right]. \tag{18}$$

Поскольку в симметричном канале без памяти пропускная способность канала достигается при равномерном распределении вероятностей его входных сигналов [3], то в рассматриваемом случае

$$p\,(x_i) = 1/m. \tag{19}$$

Тогда

$$p\left(\hat{y}_j\right) = \frac{m+n-1}{m}P_{max}, \tag{20}$$

$$p\left(\check{y}_j\right) = \frac{m+k-1}{m}P_{min}, \tag{21}$$

а

$$H(Y) = -(m+n-1)P_{max}\log_a\frac{m+n-1}{m} - (m+n-1)P_{max}\log_a P_{max} - \\ -(m+k-1)P_{min}\log_a\frac{m+k-1}{m} - (m+k-1)P_{min}\log_a P_{min}. \tag{22}$$

Подставив (13) и (22) в (9) получим

$$C = P_{max}\log_a\frac{n^n}{\left(1+\frac{n-1}{m}\right)^{m+n-1}} + P_{min}\log_a\frac{k^k}{\left(1+\frac{k-1}{m}\right)^{m+k-1}}. \tag{23}$$

Полученная формула позволяет определить пропускную способность дискретного симметричного канала с двумя градациями верности. В ней m – основание алфавита, Pmax и Pmin – вероятности ошибочного приема, при котором принятому символу будут присвоены соответственно высшая и низшая градация верности, n – коэффициент, показывающий во сколько раз вероятность правильного приема с присвоением высшей градации верности превышает значение Pmax, k - коэффициент, показывающий во сколько раз вероятность правильного приема с присвоением низшей градации верности превышает вероятность Pmin.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курс теории информации. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш.М.: Наука. Главная редакция физико–математической литературы, 1982. – 416 с
2. Четвериков В.Н., Подготовка и телеобработка даных а АСУ: Учебник. – М.: Высшая Школа, 1981. – 320 с., ил.
3. Галлагер Р., Теория информации и надежная связь. – М.: Советское радио, 1974. 720 с

Recenzent: Dr hab.inż. Jan Kałuski
Prof. Politechniki Śląskiej

Wpłynęło do Redakcji 21.10.1995 r.

Резюме

В системах передачи данных с решающей обратной связью и посимвольным переспросом находит применение прием с двумя градациями верности. При анализе таких систем необходима оценка пропускной способности каналов, обеспечивающих такой прием. Показано, что пропускную способность дискретного симметричного канала без памяти с двумя градациями верности можно определить по формуле

$$C = P_{max}\log_a \frac{n^n}{\left(1+\frac{n-1}{m}\right)^{m+n-1}} + P_{min}\log_a \frac{k^k}{\left(1+\frac{k-1}{m}\right)^{m+k-1}},$$

где m – основание алфавита, Pmax и Pmin – вероятности ошибочного приема, при котором принятому символу будут присвоены соответственно высшая и низшая градация верности, n – коэффициент, показывающий во сколько раз вероятность правильного приема с присвоением высшей градации верности превышает значение Pmax, k - коэффициент, показывающий во сколько раз вероятность правильного приема с присвоением низшей градации верности превышает вероятность Pmin.