ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 117 Energetyka z. 16 1964

STANISŁAW JERZY GDULA
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

USTALONY PRZEPŁYW CIEPŁA W PRYZMATYCZNYCH PRĘTACH WYSTAJĄCYCH

Streszczenie. Podano ogólne rozwiązanie zagadnienia ustalonego przepływu ciepła w pryzmatycznych prętach wystających, uwzględniające nierównomierność rozkładu temperatury w poprzecznym przekroju pręta. Szczegółowe obliczenia przeprowadzono dla pręta okrągłego i płaskiego żebra; wyniki obliczeń ujęto na wykresach. Porównano uzyskane wyniki z wynikami jakie daje klasyczna teoria wystających prętów. Rozważania przeprowadzono przy użyciu bezwymiarowych wielkości zredukowanych i kryteriów podobieństwa.

1. WSTĘP

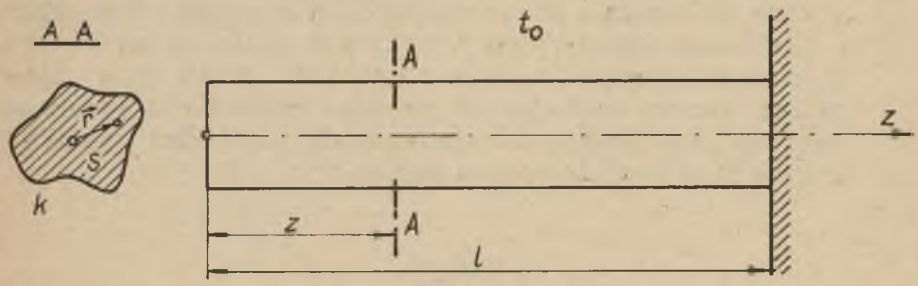
Do rozwiązywania zagadnień przepływu ciepła w prętach wystających stosuje się powszechnie przybliżoną teorię opartą na założeniu wyrównanej temperatury w poprzecznym przekroju pręta. Założenie to sprawdza się tym lepiej, im mniejsza jest liczba Biota obliczona dla przekroju poprzecznego pręta, tzn. im pręt jest cieńszy, wykonany z materiału lepiej przewodzącego ciepło i im mniejszy jest współczynnik wnikania ciepła. Teoria przybliżona, dzięki swej prostocie, umożliwia łatwe rozwiązanie zagadnienia dla różnorodnych kształtów prętów pryzmatycznych i niepryzmatycznych [4].

Brak ścisłych rozwiązań, choćby dla niektórych typów prętów, uniemożliwia prawidłową ocenę błędu i zakresu stosowania teorii przybliżonej. Niemożliwe jest również poprawne określenie krytycznych rozmiarów pręta - krytyczna liczba Biota wyznaczona za pomocą teorii przybliżonej nie zależy od kształtu przekroju pręta, a jej wartość liczbowa jest obarczona błędem rzędu kilkudziesięciu procent.

W niniejszej pracy podano ogólne rozwiązanie zagadnienia przepływu ciepła w pręcie pryzmatycznym, uwzględniające zmienność temperatury w poprzecznym przekroju pręta. Rozwiązanie to skonkretyzowano dla najbardziej typowych wypadków, jakimi są pręt o przekroju okrągłym i płaskie żebro.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Pryzmatyczny pręt o długości l jest wykonany z jednorodnego, izotropowego materiału, którego współczynnik przewodzenia ciepła λ nie zależy od temperatury. Na jednej powierzchni czołowej pręta (w miejscu utwierdzenia) utrzymywana jest stała temperatura t_1, pozostała powierzchnia pręta jest omywana płynem o temperaturze t_o (rys. 1).



Rys. 1. Wystający pręt pryzmatyczny

Między płynem i prętem zachodzi konwekcyjny przepływ ciepła. Współczynnik wnikania ciepła jest jednakowy na całej powierzchni pręta i wynosi α. Należy wyznaczyć rozkład temperatury w pręcie oraz obliczyć ilość ciepła jaka za pośrednictwem pręta jest przekazywana od miejsca utwierdzenia pręta do ośrodka, w którym jest zanurzony. Należy również określić kryterium rozstrzygające kiedy pręt intensyfikuje przepływ ciepła przez powierzchnię, do której jest przytwierdzony, a kiedy działa izolująco.

Opisany wyżej model pręta przewodzącego ciepło ilustruje rzeczywisty przepływ ciepła w pręcie tym lepiej, im lepiej są spełnione przyjęte założenia. Chodzi tu przede wszystkim o stałość współczynnika wnikania ciepła na powierzchni pręta i płaskość izotermy w przekroju początkowym (w zamocowa

niu) pręta. Uwolnienie się od tych założeń uniemożliwiło by podanie ogólnego rozwiązania, pociągając za sobą konieczność odrębnego, i to na ogół numerycznego, rozwiązywania zagadnienia dla każdego przypadku z osobna.

Położenie punktu pręta możemy określić przez podanie jego odległości z od końcowej powierzchni czołowej pręta oraz wektora $\vec{r}$ podającego położenie punktu na płaszczyźnie przekroju, prostopadłej do osi z. Ponieważ pręt jest pryzmatyczny, więc wszystkie te przekroje s są jednakowe. W zależności od kształtu powierzchni przekroju pręta można przyjąć w tej płaszczyźnie układ współrzędnych prostoliniowych, prostokątnych i wówczas wektor $\vec{r}$ będzie określony dwoma składowymi x i y, lub układ współrzędnych biegunowych, określając w nim wektor $\vec{r}$ za pomocą jego wartości bezwzględnej r i kąta φ lub dowolny inny płaski układ współrzędnych.

Temperatura $\vartheta(\vec{r},z)$ w dowolnym punkcie pręta spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2\vartheta + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

w którym operacja laplasjanu ∇^2 jest rozciągnięta na płaszczyznę przekroju pręta, oraz warunki brzegowe

$$-\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \alpha(\vartheta - t_o) \quad \text{dla } \vec{r} \in k, \tag{2}$$

$$\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \alpha(\vartheta - t_o) \quad \text{dla } z = 0, \tag{3}$$

$$\vartheta = t_1 \quad \text{dla } z = l. \tag{4}$$

W równaniu (2) przez n oznaczono normalną zewnętrzną do kontruru k przekroju poprzecznego pręta.

Z rozwiązania zagadnienia brzegowego (1) - (4) otrzymamy funkcję $\vartheta(\vec{r},z)$ podającą zależność temperatury pręta od położenia punktu. Znajomość tej funkcji pozwala określić średnią w przekroju temperaturę pręta $\vartheta_m(z)$ będąca funkcją położenia przekroju

$$\vartheta_m(z) = \frac{1}{s}\iint_S \vartheta(\vec{r},z)ds. \tag{5}$$

Ilość ciepła przenoszona za pośrednictwem pręta od miejsca jego utwierdzenia do ośrodka jest równa ilości ciepła przewodzonego w przekroju początkowym pręta (z = 1). Przez element ds tego przekroju przepływa ciepło

$$d\dot{Q} = \lambda ds\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=1},$$

a przez cały przekrój

$$\dot{Q} = \lambda\iint_S\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=1} ds.$$

Po zamianie kolejności różniczkowania i całkowania, i po wykorzystaniu równania (5), otrzymujemy

$$\dot{Q} = \lambda s\left(\frac{d\vartheta_m}{dz}\right)_{z=1}. \tag{6}$$

3. WIELKOŚCI ZREDUKOWANE I KRYTERIA PODOBIEŃSTWA

Wprowadzenie bezwymiarowych wielkości zredukowanych upraszcza wyraźnie opis zagadnienia, dzięki zmniejszeniu ilości zmiennych i parametrów. Uzyskane równania, zwane równaniami kryterialnymi, są bardziej zwarte i przejrzyste. Dodatkową korzyścią jest możliwość wyciągania wniosków odnośnie podobieństwa zjawisk.

Dla określenia wspomnianych wielkości należy przyjąć charakterystyczny rozmiar liniowy pręta. Względy fizyczne nie

uprzywilejowują tu żadnego rozmiaru i wybór jest w zasadzie dowolny. Ponieważ jednak o podobieństwie geometrycznym prętów decyduje głównie podobieństwo kształtu ich przekrojów poprzecznych, narzuca się przyjęcie rozmiaru charakterystycznego tego przekroju. Ale i tutaj istnieje duża dowolność wyboru. W dalszym ciągu pracy będziemy porównywać wyniki ścisłej teorii wystających prętów z analogicznymi wynikami teorii klasycznej (przybliżonej). Ta ostatnia operuje stosunkiem obwodu pręta k do pola powierzchni s jego przekroju poprzecznego. Porównywalność wielkości i wzorów obu teorii zapewnimy więc wybierając jako rozmiar charakterystyczny tzw. promień hydrauliczny

$$l_o = \frac{2s}{k}. \tag{7}$$

Tego rodzaju wybór ma tę dodatkową zaletę, że dla najbardziej typowych kształtów prętów, jakimi są pręt okrągły i płaskie żebro, rozmiarami charakterystycznymi są odpowiednio promień pręta i grubość żebra. Charakterystyczny rozmiar liniowy określa skalę długości i powierzchni, i pozwala na zdefiniowanie następujących wielkości zredukowanych: zredukowane współrzędne

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}}{l_o}, \quad Z = \frac{z}{l_o}, \quad N = \frac{n}{l_o}, \tag{8}$$

zredukowany obwód i powierzchnia

$$K = \frac{k}{l_o}, \quad S = \frac{s}{l_o^2}, \tag{9}$$

zredukowana długość pręta

$$L = \frac{l}{l_o}. \tag{10}$$

Ta ostatnia wielkość jest zarazem kryterium podobieństwa geometrycznego prętów (jedynym jeżeli w grę wchodzą pręty o podobnych przekrojach). Ponadto charakterystyczny rozmiar liniowy wchodzi do kryterium Biota

$$Bi = \frac{\alpha l_o}{\lambda} \tag{11}$$

określającego podobieństwo warunków brzegowych.

Skalę temperatur określają dwie dane temperatury t_1 i t_o. Jeżeli ponadto weźmiemy pod uwagę dogodność zapisu warunków brzegowych (2) i (3), to zredukowaną temperaturę określimy następująco

$$\Theta = \frac{\vartheta - t_o}{t_1 - t_o} \tag{12}$$

Temperatury t_1 i t_o po zredukowaniu przyjmują wartości

$$T_1 = 1, \quad T_o = 0. \tag{13}$$

Zredukowana temperatura pręta Θ jest zawsze dodatnia i niezależnie od rzeczywistego kierunku przepływu ciepła maleje od nasady pręta ku jego końcowi.

Z analizy równania (6), po uwzględnieniu przyjętych wyżej wielkości zredukowanych, wynika następujące określenie zredukowanego ciepła przewodzonego przez pręt

$$\varkappa = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_o} = \frac{\dot{Q}}{\alpha s(t_1 - t_o)}, \tag{14}$$

gdzie $\dot{Q}_o = \alpha s(t_1 - t_o)$ jest tą ilością ciepła, jaka przepływałaby po usunięciu pręta od miejsca jego utwierdzenia do płynu (co jest równoznaczne z prętem o długości $l = 0$). Wielkość $\varkappa$ nazywana jest często e f e k t y w n o ś c i ą p r ę t a.

Po wprowadzeniu wyżej zdefiniowanych wielkości zredukowanych równania (1) - (6) przyjmują postać

$$\nabla^2\Theta + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial N} + Bi\Theta = 0 \quad \text{dla} \quad \vec{R} \in K, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial Z} = Bi\Theta \quad \text{dla} \quad Z = 0, \tag{3a}$$

$$\Theta = 1 \quad \text{dla} \quad Z = L, \tag{4a}$$

$$\Theta_m(Z) = \frac{1}{S}\iint_S \Theta(\vec{R},Z)dS, \tag{5a}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_o} = \frac{1}{Bi}\left(\frac{d\Theta_m}{dZ}\right)_{Z=L} \tag{6a}$$

Rozwiązaniem równania (1a) przy warunkach brzegowych (2a) - (4a) będzie pewna funkcja $\Theta(\vec{R},Z,Bi,L)$ zależna również parametrycznie od kryterium Biota i zredukowanej długości pręta L, tkwiących we wspomnianych warunkach brzegowych. Postać tej funkcji będzie zależała od kształtu przekroju poprzecznego pręta. Po zastosowaniu równania (5a) otrzymamy zredukowaną, średnią w przekroju temperaturę pręta $\Theta_m(Z,Bi,L)$. Znajomość tej funkcji pozwala, po użyciu równania (6a), na wyznaczenie zredukowanej ilości ciepła (efektywności pręta) jako funkcji Bi i L

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(Bi,L).$$

Zależność ta jest również słuszna tylko dla rozpatrywanego kształtu przekroju poprzecznego pręta.

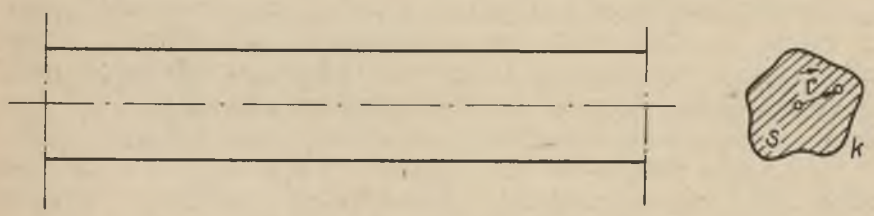
Z przytoczonych rozważań wynika, że dwa procesy przepływu ciepła w wystających, pryzmatycznych prętach są podobne, jeżeli występuje podobieństwo geometryczne prętów i podo-

bieństwo warunków brzegowych. Warunkiem podobieństwa geometrycznego, jest podobieństwo figur płaskich będących przekrojami poprzecznymi prętów i równość zredukowanych długości prętów L, natomiast o podobieństwie warunków brzegowych decyduje równość liczb Biota. Dla dwóch procesów podobnych zredukowane profile temperatur są identyczne, a efektywności prętów równe.

4. NIEUSTALONY PRZEPŁYW CIEPŁA W SWOBODNYM PRĘCIE PRYZMATYCZNYM

Rozważania niniejszego rozdziału mają charakter pomocniczy. Ich wynikiem będą pewne funkcje przydatne dla rozwiązania właściwego problemu - ustalonego przepływu ciepła w pryzmatycznym pręcie wystającym.

Rozpatrzymy problem nagrzewania się (lub ostygania) nieskończenie długiego, swobodnego pręta pryzmatycznego (rys.2) zanurzonego w płynie o stałej temperaturze t_o. Temperatura pręta w chwili początkowej ($\tau = 0$) jest wyrównana i wynosi ϑ_p. Współczynnik wnikania ciepła na powierzchni pręta α, współczynnik przewodzenia ciepła λ i współczynnik wyrównywania temperatury a materiału pręta traktujemy jako niezmienne.



Rys. 2. Swobodny pręt pryzmatyczny

Temperatura w dowolnym punkcie pręta ϑ_s jest funkcją położenia punktu w przekroju poprzecznym pręta określonego współrzędną $\vec{r}$ oraz czasu τ. Nie zależy natomiast ona od położenia punktu, bo pręt jest nieskończenie długi i ma swobodne końce. Funkcja $\vartheta_s(\vec{r},\tau)$ spełnia równanie Fouriera

oraz równania wyrażające warunek brzegowy i początkowy. Po użyciu wielkości zredukowanych (8), (9), (11) oraz zredukowanej temperatury

$$\Theta_s = \frac{\vartheta_s - t_o}{\vartheta_p - t_o} \tag{15}$$

i zredukowanego czasu (liczby Fouriera)

$$Fo = \frac{a\tau}{l_o^2} \tag{16}$$

równania te przyjmują postać

$$\frac{\partial\Theta_s}{\partial Fo} = \nabla^2\Theta_s, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Theta_s}{\partial N} + Bi\Theta_s = 0 \qquad \text{dla } \vec{R} \in K, \tag{18}$$

$$\Theta_s = 1 \qquad \text{dla } Fo = 0, \tag{19}$$

Ponadto wprowadzamy pojęcie średniej temperatury pręta, będącej funkcją tylko czasu. W postaci zredukowanej definiuje ją równanie

$$\Theta_{s_m}(Fo) = \frac{1}{S}\iint_S \Theta_s(\vec{R},Fo)dS. \tag{20}$$

Rozwiązanie $\Theta_s(\vec{R},Fo)$ zagadnienia brzegowego (20a)-(22a) można zawsze przedstawić w postaci [1]

$$\Theta_s(\vec{R},Fo) = \sum_k A_k v_k(\vec{R}) e^{-\mu_k^2 Fo} \tag{21}^{x)}$$

x) Stosujemy skrócony zapis $\sum_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty}$

Funkcje własne $v_k(\vec{R})$ spełniają w obszarze S równanie różniczkowe

$$\nabla^2 v_k + \mu_k^2 v_k = 0, \tag{22}$$

oraz warunek brzegowy

$$\frac{\partial v_k}{\partial N} + Bi\, v_k = 0, \quad \text{dla } \vec{R} \in K, \tag{23}$$

a ciąg wartości własnych μ_k spełnia nierówność

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$$

Wartości własne i funkcje własne zależą od liczby Biota tkwiącej w warunku brzegowym

$$\mu_k = \mu_k(Bi), \quad v_k = v_k(\vec{R}, Bi)$$

i oczywiście od kształtu obszaru S (przekroju poprzecznego pręta).

Funkcje własne $v_k(\vec{R})$ tworzą w obszarze S układ ortogonalny, zupełny. Ortogonalność funkcyj v_k wyraża się związkiem

$$\iint_S v_i v_k dS = \delta_{ik} N_k^2, \tag{24}$$

gdzie δ_{ik} jest symbolem Kroneckera, a N_k jest normą funkcji v_k. Ponieważ równania (22) i (23) określają v_k z dokładnością do stałego współczynnika, więc każdy otrzymany układ funkcyj możemy unormować. W praktyce jednak, dążąc do jak najprostszego zapisu funkcyj v_k, operujemy funkcjami nieunormowanymi.

Dla wyznaczenia współczynników A_k szeregu (21) skorzystamy z warunku początkowego (19), z którego wynika

$$\sum_k A_k v_k(\vec{R}) = 1 \tag{25}$$

Mnożąc powyższe równanie przez funkcję $v_i(\vec{R})$ i całkując po całym obszarze S [przy czym dla obliczenia całek po lewej stronie równania należy posłużyć się równaniem (24)], otrzymujemy

$$A_k = \frac{1}{N_k^2} \iint_S v_k dS. \tag{26}$$

Współczynniki A_k zależą również od liczby Biota

$$A_k = A_k(Bi).$$

Z szeregu (21) można otrzymać, po zastosowaniu równania (20), funkcję Θ_{s_m} (Fo) przedstawiającą zredukowaną średnią temperaturę pręta

$$\Theta_{s_m} = \sum_k A_k \frac{1}{S} \iint_S v_k(\vec{R}) dS \; e^{-\mu_k^2 Fo}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$B_k = A_k \frac{1}{S} \iint_S v_k(\vec{R}) dS \tag{27}$$

funkcja ta przyjmie ostatecznie postać

$$\theta_{s_m} = \sum_k B_k e^{-\mu_k^2 Fo}. \tag{28}$$

Współczynniki B_k są również funkcjami liczby Biota

$$B_k = B_k(Bi)$$

i ponadto spełniają zależność

$$\sum_k B_k = 1 \tag{29}$$

wynikającą z równania (25) lub wprost z warunku początkowego $\Theta_{s_m}(0) = 1$.

5. USTALONE POLE TEMPERATURY W PRYZMATYCZNYM WYSTAJĄCYM PRĘCIE

Dla wyznaczenia zredukowanej temperatury pręta $\Theta(\vec{R},Z)$ należy rozwiązać równanie różniczkowe (1a) przy warunkach brzegowych (2a) - (4a). W tym celu zastosujemy dla funkcji $\Theta(\vec{R},Z)$ przekształcenie całkowe w obszarze S zdefiniowane następująco[x)]

$$\bar{\Theta}(\mu_k,Z) = \iint_S \Theta(\vec{R},Z)v_k(\vec{R})dS, \tag{30}$$

gdzie μ_k i v_k oznaczają wartości własne i funkcje własne określone w poprzednim rozdziale. W odróżnieniu od transformacji całkowych w przedziale (obszarze) nieskończonym, jak np. transformacja Laplace'a, Fouriera i in., zmienna stransformowana nie zmienia się w sposób ciągły, lecz przybiera kolejne wartości ciągu μ_k.

Aby otrzymać równanie określające transformację odwrotną rozwińmy funkcję $\Theta(\vec{R},Z)$ w obszarze S w szereg według funkcji własnych v_k

$$\Theta(\vec{R},Z) = \sum_k C_k(Z)v_k(\vec{R}).$$

x) Przekształcenie to jest uogólnieniem wprowadzonego przez Sneddona przekształcenia całkowego w skończonym przedziale [5].

Współczynniki szeregu otrzymamy w podobny sposób jak współczynniki A_k w poprzednim rozdziale

$$C_k = \frac{1}{N_k^2} \iint_S \Theta(\vec{R},z) v_k(\vec{R}) dS.$$

Ponieważ całka w powyższym równaniu jest identyczna z całką (30), więc

$$C_k = \frac{1}{N_k^2} \bar{\Theta}(\mu_k,z).$$

Transformacja odwrotna względem (30) jest więc określona równaniem

$$\Theta(\vec{R},z) = \sum_k \frac{1}{N_k^2} \bar{\Theta}(\mu_k,z) v_k(\vec{R}). \tag{31}$$

W celu stransformowania równania różniczkowego (1a) należy wyznaczyć transformatę laplasjanu $\nabla^2\Theta$ w obszarze S

$$\iint_S v_k \nabla^2\Theta \, dS.$$

Skorzystajmy w tym celu z drugiego twierdzenia Greena dla funkcji v_k i Θ

$$\iint_S (v_k \nabla^2\Theta - \Theta \nabla^2 v_k) dS = \oint_k (v_k \frac{\partial\Theta}{\partial N} - \Theta \frac{\partial v_k}{\partial N}) dK,$$

z którego wynika

$$\iint_S v_k \nabla^2\Theta \, dS = \iint_S \Theta \nabla^2 v_k dS + \oint_K (v_k \frac{\partial\Theta}{\partial N} - \Theta \frac{\partial v_k}{\partial N}) dK. \tag{32}$$

Dla obliczenia pierwszej całki skorzystajmy z równania różniczkowego (22), na mocy którego

$$\nabla^2 v_k = -\mu_k^2 v_k .$$

$$\iint_S \Theta \nabla^2 v_k dS = -\mu_k^2 \iint_S \Theta v_k dS,$$

a po uwzględnieniu definicji (30)

$$\iint_S \Theta \nabla^2 v_k dS = -\mu_k^2 \bar{\Theta}. \tag{33}$$

W celu obliczenia drugiej całki po prawej stronie równania (32) przepiszmy warunek brzegowy (1b) dla funkcji $\Theta(\vec{R},Z)$ oraz analogiczny warunek (23) dla funkcji $v_k(\vec{R})$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial N} + Bi\Theta &= 0 \\ \frac{\partial v_k}{\partial N} + Bi\, v_k &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dla } \vec{R} \in K$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez v_k a drugie przez Θ i odejmując stronami, otrzymujemy

$$v_k \frac{\partial\Theta}{\partial N} - \Theta \frac{\partial v_k}{\partial N} = 0 \quad \text{dla } \vec{R} \in K,$$

wobec czego

$$\oint_k \left(v_k \frac{\partial\Theta}{\partial N} - \Theta \frac{\partial v_k}{\partial N}\right) dK = 0. \tag{34}$$

Po podstawieniu równań (33) i (34) do równania (32) otrzymujemy równanie określające transformację laplasjanu

$$\iint_S v_k \nabla^2\Theta \, dS = -\mu_k^2 \bar{\Theta}. \tag{35}$$

Transformatę pochodnej $\frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2}$ obliczymy wykorzystując możliwość zmiany kolejności całkowania i różniczkowania

$$\iint_S \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} v_k dS = \frac{d^2\bar{\Theta}}{dZ^2}. \tag{36}$$

Równania (35) i (36) umożliwiają napisanie stransformowanej postaci równania różniczkowego (1a)

$$-\mu_k^2 \Theta + \frac{d^2\bar{\Theta}}{dZ^2} = 0. \tag{1b}$$

Transformacja warunków brzegowych (3a) i (4a) daje

$$\frac{d\bar{\Theta}}{dZ} = Bi\bar{\Theta} \qquad \text{dla} \quad Z = 0, \tag{3b}$$

$$\bar{\Theta} = N_k^2 A_k \qquad \text{dla} \quad Z = L, \tag{4b}$$

przy czym w równaniu (3b) skorzystano z zamiany kolejności całkowania i różniczkowania, a w równaniu (4b) posłużono się dla transformacji stałej (jedynki) zależnością (26).

Całka ogólna równania różniczkowego (1b) ma postać

$$\bar{\Theta} = M \operatorname{ch}\mu_k Z + N \operatorname{sh}\mu_k Z. \tag{37}$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych (3b) i (4b) otrzymujemy

$$\bar{\Theta} = N_k^2 A_k \frac{\mathrm{ch}\mu_k Z + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{sh}\mu_k Z}{\mathrm{ch}\mu_k L + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{sh}\mu_k L}. \tag{38}$$

Funkcję $\Theta(\vec{R},Z)$, stanowiącą rozwiązanie naszego zagadnienia, uzyskamy z równania (38) po dokonaniu transformacji odwrotnej określonej równaniem (31)

$$\Theta = \sum_k A_k v_k(\vec{R}) \frac{\mathrm{ch}\mu_k Z + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{sh}\mu_k Z}{\mathrm{ch}\mu_k L + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{sh}\mu_k L}. \tag{39}$$

Równanie powyższe określa rozkład temperatury w pryzmatycznym, wystającym pręcie o skończonej długości, który w miejscu zamocowania posiada stałą temperaturę, a na pozostałej powierzchni wymienia ciepło z ośrodkiem płynnym.

Średnia w przekroju temperaturę pręta $\Theta_m(Z)$ uzyskamy po zastosowaniu równania (5a) i wykorzystaniu zależności (27)

$$\Theta_m = \sum_k B_k \frac{\mathrm{ch}\mu_k Z + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{sh}\mu_k Z}{\mathrm{ch}\mu_k L + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{sh}\mu_k L}. \tag{40}$$

6. EFEKTYWNOŚĆ PRĘTA

Znajomość średniej w przekroju temperatury pręta pozwala na wyznaczenie efektywności pręta, wyrażającej zredukowaną ilość ciepła przekazywanego za pośrednictwem pręta od miejsca jego utwierdzenia do ośrodka, w którym zanurzony jest pręt. W tym celu różniczkujemy równanie (40) i podstawiamy do równania (6a), otrzymując w wyniku

$$\varkappa = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \frac{\mathrm{th}\mu_k L + \frac{Bi}{\mu_k}}{1 + \frac{Bi}{\mu_k}\mathrm{th}\mu_k L}. \tag{41}$$

Najczęściej spotykanymi zastosowaniami wystających prętów są żebra. Żebrem nazywamy pręt wystający przytwierdzony do powierzchni wymieniającej ciepło z płynem i mający na celu intensyfikację przepływu ciepła. Żebrowanie powierzchni zwiększa jej pole, a więc polepsza wnikanie ciepła. Jednocześnie jednak wzrasta opór przewodzenia. Bez uciekania się do głębszej analizy tego zjawiska można przypuszczać, że przy niekorzystnym doborze rozmiarów żebra może ono pogarszać przepływ ciepła, tzn. ilość ciepła przekazywana za pośrednictwem pręta od miejsca jego utwierdzenia do płynu będzie mniejsza od ilości ciepła jaką oddawałaby ta powierzchnia, gdyby nie było pręta $\dot{Q} < \dot{Q}_o$ czyli $\varkappa < 1$. Żebro jest celowe wtedy, gdy zwiększa natężenie przepływu ciepła, tzn. gdy $\dot{Q} > \dot{Q}_o$ lub $\varkappa > 1$. W granicznym wypadku

$$\varkappa_{kr} = 1.$$

Podstawiając to do równania (41) i rozwiązując je względem liczby Biota (należy pamiętać, że zależą od niej również B_k i μ_k), otrzymujemy krytyczną wartość tej liczby

$$Bi_{kr} = f(L).$$

Ponieważ ze wzrostem Bi efektywność $\varkappa$ maleje[x)], więc żebro jest efektywne jeżeli $Bi < Bi_{kr}$.

7. PRĘT NIESKOŃCZENIE DŁUGI

Równanie określające rozkład temperatury w pręcie nieskończenie długim i efektywność tego pręta można uzyskać z równań (39) i (41) po zmianie kierunku osi pręta (zamiana Z na L-Z, rys.3) i po przejściu granicznym $L \to \infty$.

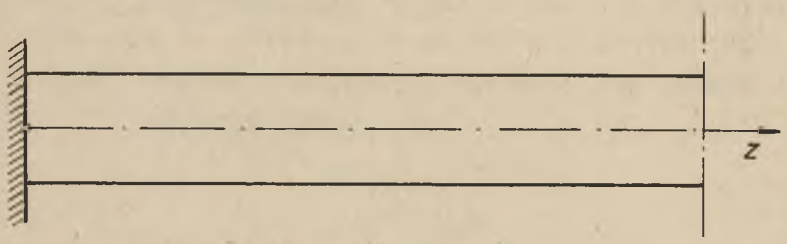
---

x) Wzrost liczby Biota można wywołać np. maleniem λ przy niezmienionych rozmiarach żebra i współczynniku wnikania ciepła, a im gorzej przewodzące żebro, tym mniej efektywne.

Rozkład temperatury w pręcie i średnia w przekroju tempe ratura pręta wyrażą się zatem równaniami

$$\Theta = \sum_k A_k v_k(\vec{R}) e^{-\mu_k Z} \tag{42}$$

$$\Theta_m = \sum_k B_k e^{-\mu_k Z} \tag{43}$$



Rys.3. Nieskończenie długi pręt wystający

natomiast równanie (41) przedstawiające efektywność pręta (zredukowaną ilość ciepła przenoszonego za pośrednictwem pręta) przekształci się do postaci

$$\varkappa = \sum_k B_k \mu_k . \tag{44}$$

8. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI KSZTAŁTÓW PRZEKROJU PRĘTA

8.1. Pręt okrągły

Charakterystycznym rozmiarem liniowym przekroju okrągłego jest, w myśl równania (7), promień koła $l_o = \varrho$. Jako układ współrzędnych narzuca się w tym wypadku układ biegunowy (rys. 4). Zagadnienie jest osiowo symetryczne, w wyniku czego temperatura jest funkcją tylko odległości od osi pręta i oczywiście położenia przekroju (współrzędne r i z, a po zredukowaniu R i Z).

Wartości własne μ_k są pierwiastkami równania [2]

$$\mu \frac{J_1(\mu)}{J_o(\mu)} = Bi \, . \tag{45}$$

Rys. 4. Przekrój pręta okrągłego

Funkcje własne v_k oraz współczynniki szeregów A_k i B_k wyrażają się równaniami [2]

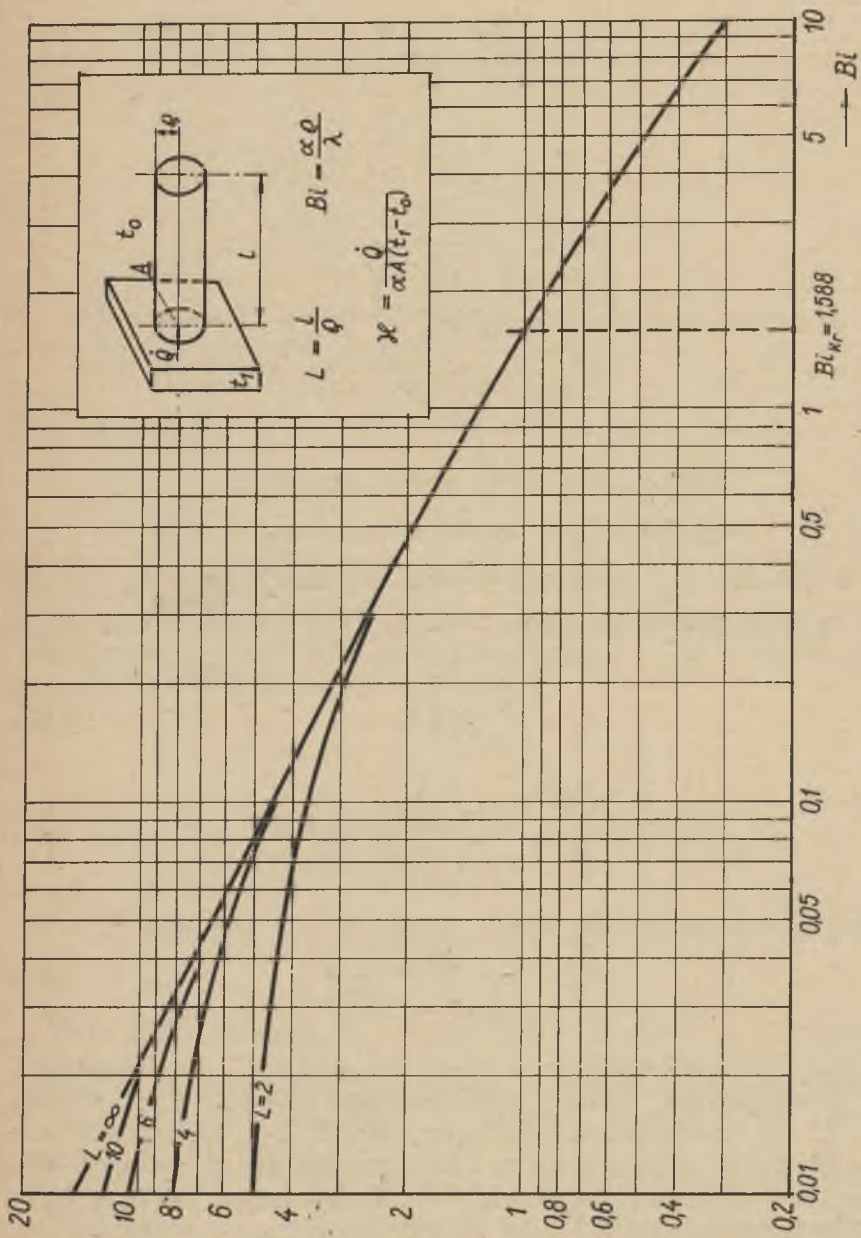
$$v_k = J_o(\mu_k R), \tag{46}$$

$$A_k = \frac{2Bi}{J_o(\mu_k)(\mu_k^2 + Bi^2)} \tag{47}$$

$$B_k = \frac{4Bi^2}{\mu_k^2(\mu_k^2 + Bi^2)} \tag{48}$$

Na rys. 5 przedstawiono wykres zależności efektywności pręta (zredukowanej ilości wymienianego ciepła) $\varkappa$ od liczby Biota Bi i zredukowanej długości pręta L. Z wykresu widoczne jest, że $\varkappa$ zależy w sposób wyraźny od L jedynie dla małych liczb Biota. Z tego względu nieuchwytna jest zależność krytycznej liczby Biota od zredukowanej długości i dla prętów o długości nie mniejszej od średnicy $(2 < L \leqslant \infty)$

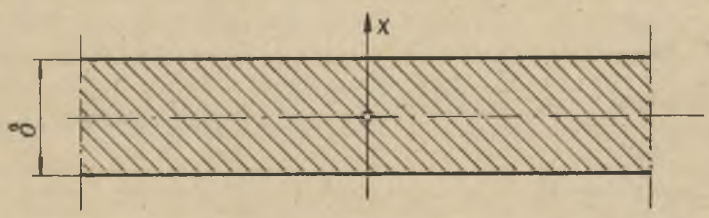
$$Bi_{kr} = 1{,}588.$$



Rys.5. Efektywność pręta okrągłego

8.2. Płaskie żebro

Płaskie żebro jest prętem pryzmatycznym o przekroju prostokątnym (rys. 6). Rozpatrujemy tu wypadek żebra szerokiego, które w przekroju jest wydłużonym prostokątem (obszarem płaskim między dwoma prostymi równoległymi). Charakterystyczny rozmiar liniowy tego przekroju wynosi, zgodnie z równaniem (7), $l_o = \delta$, gdzie δ jest grubością żebra.



Rys. 6. Przekrój płaskiego żebra

Prętem swobodnym odpowiadającym temu przypadkowi pręta wystającego jest nieskończenie rozległa płyta. Wartości własne μ_k są w tym wypadku dodatnimi pierwiastkami równania[x)]

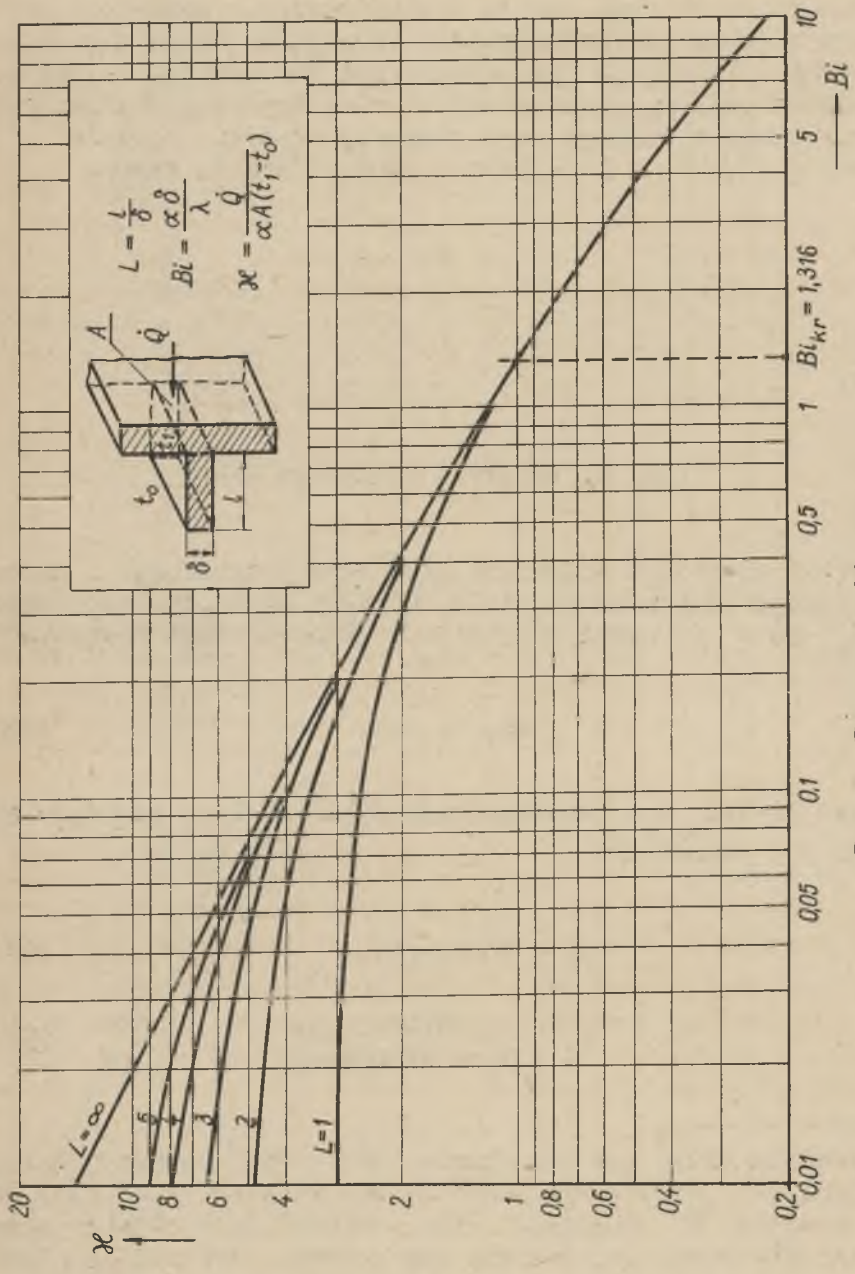
$$\mu \operatorname{tg} \mu = 2Bi. \tag{49}$$

Funkcje własne v_k oraz współczynniki A_k i B_k szeregów wyrażają się równaniami

$$v_k = \cos(2\mu_k X), \tag{50}$$

$$A_k = \frac{2\sin\mu_k}{\mu_k + \sin\mu_k \cos\mu_k}, \tag{51}$$

x) Równanie (49), jak i równania (50) - (52) podaje m.in. Łykow [2]. Różnią się one w naszym wypadku tylko tym, że w miejsce Bi figuruje 2Bi, ponieważ jako rozmiar charakterystyczny przyjmujemy nie połowę, lecz całą grubość płyty. Cytowany autor podaje również tabele wartości μ_k, A_k i B_k w zależności liczby Biota, dla okrągłego go pręta i płyty.



Rys.7. Efektywność płaskiego żebra

$$B_k = \frac{8Bi^2}{\mu_k^2(4Bi^2 + 2Bi + \mu_k^2)} . \tag{52}$$

Figurująca w równaniu (50) zredukowana współrzędna $X = \frac{x}{\delta}$ jest liczona od płaszczyzny środkowej płyty (żebra).

Na rys. 7 pokazano wykres efektywności płaskiego żebra jako funkcji Bi i L. Przebieg funkcji jest podobny, aczkolwiek nie identyczny, do przebiegu analogicznej funkcji dla pręta okrągłego (rys. 5). Większe różnice występują dla większych liczb Biota. Krytyczna wartość liczby Biota jest mniejsza i wynosi

$$Bi_{kr} = 1,316.$$

9. PRZYBLIŻONA (KLASYCZNA) TEORIA WYSTAJĄCYCH PRĘTÓW I GRANICE JEJ STOSOWANIA

W przybliżonej teorii wystających prętów nie uwzględnia się zmienności temperatury w przekroju poprzecznym pręta i przyjmuje się, że temperatura ta jest funkcją tylko położenia przekroju na osi pręta. W miejsce równania (1) otrzymuje się równanie [3]

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} - \frac{k\alpha}{s\lambda}(\vartheta - t_o) = 0 , \tag{53}$$

które jest spełnione wraz z warunkami brzegowymi (3) i (4). Równanie to można, podobnie jak równanie (1), sprowadzić do postaci kryterialnej stosując kryteria wprowadzone w roz.3.

$$\frac{d^2\theta}{dZ^2} - 2Bi\theta = 0. \tag{53a}$$

Warunki brzegowe natomiast przyjmują w formie zredukowanej postać

$$\frac{d\theta}{dZ} = Bi\theta \quad \text{dla} \quad Z = 0, \tag{3a}$$

$$\theta = 1 \quad \text{dla} \quad Z = L. \tag{4a}$$

Z całki ogólnej równania (60a)

$$\theta = M \operatorname{ch} \sqrt{2Bi}\, Z + N \operatorname{sh} \sqrt{2Bi}\, Z$$

po zastosowaniu warunków brzegowych otrzymujemy

$$\theta = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2Bi}\, Z + \sqrt{\frac{Bi}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2Bi}\, Z}{\operatorname{ch} \sqrt{2Bi}\, L + \sqrt{\frac{Bi}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2Bi}\, L}. \tag{54}$$

Ponieważ temperatura w przekroju pręta jest wyrównana, więc równanie (54) wyraża zarazem średnią w przekroju temperaturę pręta. Po zróżniczkowaniu równania (54) i po podstawieniu do równania (6a) uzyskujemy zredukowaną ilość ciepła przepływającego przez pręt (efektywność pręta)

$$\varkappa = \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{Bi}} \operatorname{th} \sqrt{2Bi}\, L}{1 + \sqrt{\frac{Bi}{2}} \operatorname{th} \sqrt{2Bi}\, L}. \tag{55}$$

Krytyczną wartość liczby Biota uzyskamy z warunku

$$\varkappa_{kr} = 1,$$

z którego wynika

$$1 + \sqrt{\frac{2}{Bi}} \operatorname{th} \sqrt{2Bi}\, L = 1 + \sqrt{\frac{Bi}{2}} \operatorname{th} \sqrt{2Bi}\, L$$

i ostatecznie

$$Bi_{kr} = 2 \tag{56}$$

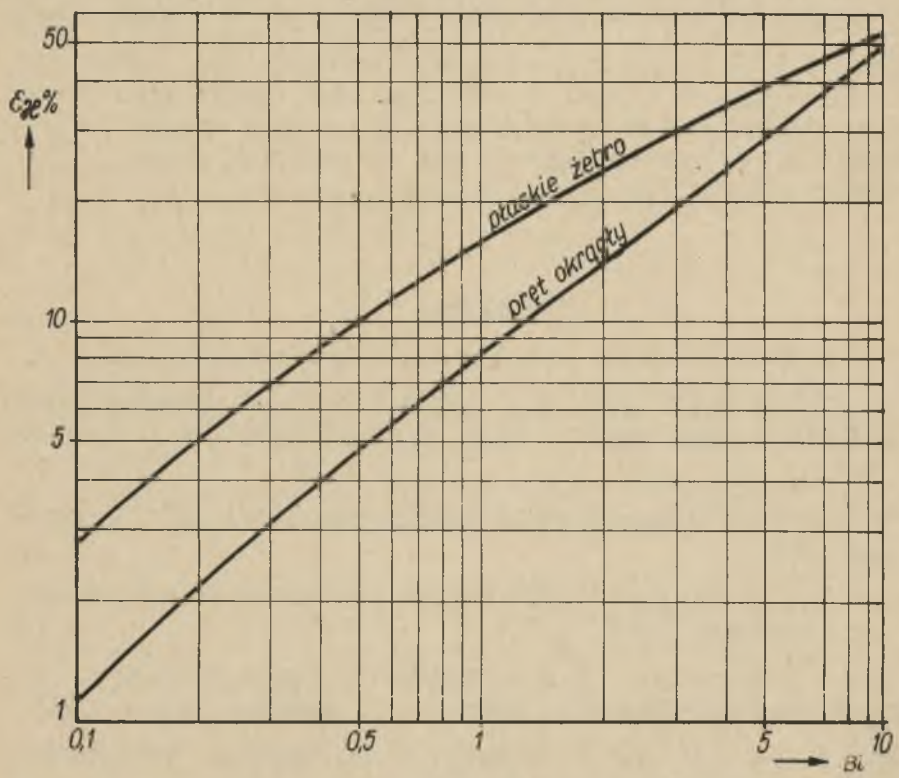
niezależnie od długości pręta.

Dla pręta n i e s k o ń c z e n i e d ł u g i e g o zredukowana temperatura i efektywność wyrażają się równaniami

$$\Theta = e^{-\sqrt{2Bi}\,Z}, \tag{57}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2}{Bi}}, \tag{58}$$

przy czym Z w równaniu (57) jest liczona od nasady pręta.



Rys. 8. Względny błąd efektywności pręta obliczonej według teorii przybliżonej

Pobieżna analiza zjawiska przewodzenia ciepła w prętach wykazuje, że założenia teorii przybliżonej (równość temperatury w przekroju poprzecznym pręta) są spełnione dla cienkich prętów i żeber. Grubość jest w tym wypadku pojęciem względnym i właściwym kryterium jest liczba Biota uwzględniająca oprócz grubości przewodnictwo cieplne i warunki wymiany ciepła na powierzchni. Przybliżone równanie (55) jest więc tym dokładniejsze im mniejsza jest liczba Biota. Analiza równań dokładnych i przybliżonych potwierdza ten wniosek. Wykazuje ona ponadto, że równanie (55) daje zawsze wyniki zawyżone. Wobec tego i krytyczna wartość liczby Biota jest zawyżona. W rzeczywistości wynosi ona nie 2, lecz dla pręta okrągłego 1,588, a dla płaskiego żebra 1,316.

Wykres na rys. 8 przedstawia zależność względnego błędu popełnianego w wyniku stosowania przybliżonego równania (55) dla pręta o skończonej długości $L \geqslant 2$ i równania (58) dla pręta nieskończenie długiego. Jak już wyżej nadmieniono, błąd ten jest zawsze dodatni. Dla prętów i żeber służących do intensyfikacji przepływu ciepła ($Bi < Bi_{kr}$) błąd nie przekracza 20% i jest tym mniejszy, im bardziej efektywne jest żebro (pręt). Z rys. 8 widoczne jest również, że przybliżona teoria prętów wystających daje lepsze wyniki w odniesieniu do prętów okrągłych, niż do płaskich żeber.

LITERATURA

[1] Courant R., Hilbert D.: Metoden der mathematischen Physik, cz.I, wyd.2., Springer, Berlin 1931.

[2] Łykow A.W.: Tieoria tiepłoprowodnosti, GITTL, Moskwa 1952.

[3] Ochęduszko S.: Teoria maszyn cieplnych, cz.III PWN, Warszawa 1954.

[4] Schneider P.J.: Conduction heat transfer, Addison Wesley Publishing Company, Cambridge, Mass., 1955.

[5] Tranter C.J.: Integral transforms in mathematikal physics, New York, London, 1953.

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Р е з ю м е

Приведено общее решение задачи стационарной теплопроводности в призматическом стержне, учитывающее неравномерность распределения температуры в поперечном сечении стержня. Выведено уравнения, определяющие распределение температуры в стержне (39) и количество тепла передаваемого стержнем (41). Сделано количественные расчеты для круглого стержня и прямоугольного ребра (рис. 5 и 7). Сревнено полученные результаты с результатами классической теории теплопроводности в стержнях.

STEADY-STATE HEAT CONDUCTION IN THE PRISMATIC ROD

S u m m a r y

A general solution of the problem of steady-state heat conduction in the prismatic rod, taking into account the uniformity of temperature distribution in the lateral rod cross-section has been given.

An equation has been derived determining temperature distribution in the rod (39) and heat quantity conducted through the rod (41).

Detailed computations have been carried out for the round rod and a rectangular fin. The achieved results have been compared with results, which the classical theory of heat conduction in rods is giving.

The discussion was carried out with teh use of dimension less reduced quantities (equations (8) - (14)).