ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 117 Energetyka z. 16 1964

STANISŁAW JERZY GDULA
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

JEDNOWYMIAROWY, USTALONY PRZEPŁYW PŁYNU ŚCIŚLIWEGO W ZAIZOLOWANYM KANALE

Streszczenie. Wychodząc z zasady zachowania materii oraz I i II zasady termodynamiki, przy wykorzystaniu ogólnych związków między termicznymi i kalorycznymi parametrami stanu, wyprowadzono równanie (10) rządzące jednowymiarowym, ustalonym przepływem płynu ściśliwego w zaizolowanym kanale. Rozpatrzono konsekwencje tego równania w odniesieniu do dyszy de Lavala.

Rzeczywisty, tzn. nieodwracalny przepływ płynu w kanale możemy traktować jako jednowymiarowym tylko w wypadku silnie rozwiniętej turbulencji. Profil prędkości jest wówczas na tyle płaski, że można nie odróżniać średniej objętościowej i średniej masowej prędkości przepływu [3] oraz przyjąć, że parametry płynu są wyrównane w przekroju strumienia.

Przy przepływie płynu, tak jak przy każdym zjawisku, muszą być spełnione następujące podstawowe prawa: zasada zachowania materii (nosząca w odniesieniu do przepływu nazwę równania ciągłości strumienia), I i II zasada termodynamiki. W odniesieniu do jednowymiarowego, ustalonego przepływu płynu w zaizolowanym kanale prawa te przyjmują postać

$$\frac{A\,w}{v} = \text{idem}, \tag{1}$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\,di, \tag{2}$$

$$ds = \frac{di - v\,dp}{T} > 0. \tag{3}$$

Po zróżniczkowaniu równania (1) otrzymujemy

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} + \frac{dv}{v} = 0. \tag{1a}$$

Równania (2) i (3) przepiszemy w postaci

$$dw = -\frac{1}{w}\,di, \tag{2a}$$

$$di = T\,ds + v\,dp. \tag{3a}$$

Z połączenia równań (1a), (2a), i (3a) wynika

$$\frac{dA}{A} = \frac{1}{w^2}\,(T\,ds + v\,dp) + \frac{dv}{v}. \tag{4}$$

Wyrażając objętość właściwą v jako funkcję zmiennych p i s, otrzymujemy dla jej różniczki zupełnej wyrażenie

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p ds. \tag{5}$$

Pochodną cząstkową względem s można przekształcić następująco

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p},$$

w wyniku czego równanie (5) przyjmuje postać

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s dp + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p}\,ds. \tag{5a}$$

Występujące w równaniu (5a) pochodnę cząstkowe można wyrazić za pomocą ciepła właściwego c_p, termodynamicznego współczynnika rozszerzalności α_p i lokalnej prędkości dźwięku a. W tym celu należy skorzystać z równań [3]

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \alpha_p, \tag{7}$$

$$a^2 = -v^2\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\frac{v^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s}. \tag{8}$$

Po uwzględnieniu równań (6), (7) i (8), równanie (5a) przybiera postać

$$dv = -\frac{v^2}{a^2}\,dp + \frac{\alpha_p}{c_p}\,v\,T\,ds. \tag{9}$$

Po podstawieniu tak wyrażonej różniczki dv do równania (4) i po uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{a^2}\right) v\,dp + \left(\frac{1}{w^2} + \frac{\alpha_p}{d_p}\right) T\,ds. \tag{10}$$

Z ogólności użytych wyżej praw i związków termodynamicznych wynika ogólny charakter równania (10). Jest więc ono słuszne zarówno dla gazów doskonałych i półdoskonałych, jak i dla gazów rzeczywistych i pary mokrej. W odniesieniu do tego ostatniego czynnika należy zastrzec, że w czasie ekspansji nie zachodzi przechłodzenie fazy gazowej, a w czasie kompresji przegrzanie fazy ciekłej.

W literaturze (por. np. [1]) znajdujemy równania podobne do równania (10), jednak ich wywód opiera się na założeniu, że przepływający czynnik jest gazem doskonałym.

Równanie (10), w postaci wyżej podanej, umożliwia jakościową analizę zjawiska przepływu płynu ściśliwego w zaizolowanym kanale o zmiennym przekroju. Wystarczy w tym celu zauważyć, że człon uwzględniający tarcie ma wartość dodatnią

$$\left(\frac{1}{w^2} + \frac{\alpha_p}{c_p}\right) T\, ds > 0, \tag{11}$$

co wynika z dodatności α_p i c_p oraz z II zasady termodynamiki [równ. (3)]

Najbardziej typowym w zastosowaniach technicznych przykładem kanału o zmiennym przekroju jest dysza de Lavala. Przy odpowiednio niskim ciśnieniu za dyszą, na całej jej długości zachodzi rozprężanie czynnika

$$dp < 0, \tag{12}$$

a natężenie przepływu osiąga wartość maksymalną. W przekroju minimalnym dyszy, dA = 0, co po podstawieniu do równania (10) daje

$$\left(\frac{1}{w_m^2} - \frac{1}{a^2}\right) v_m\, dp + \left(\frac{1}{w_m^2} + \frac{\alpha_p}{c_p}\right) T_m ds = 0 \tag{13}$$

Z równania (13), po uwzględnieniu nierówności (11) i (12), wynika

$$w_m < a.$$

W przekroju minimalnym rzeczywistej dyszy de Lavala prędkość płynu jest więc mniejsza od prędkości dźwięku. Prędkość dźwięku musi zatem wystąpić za przekrojem minimalnym, w rozszerzającej się części dyszy. W istocie, jeżeli w równaniu (10) podstawimy w = a, otrzymamy równanie

$$\frac{(dA)_{kr}}{A_{kr}} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\alpha_p}{c_p}\right) T_{kr} ds, \tag{14}$$

z którego, na mocy (11), wynika

$$(dA)_{kr} > 0.$$

Równanie (10) może być również wykorzystane do określenia ilościowych związków zachodzących między parametrami płynu przy przepływie przez kanał o zmiennym przekroju. Potrzebne jest do tego celu znajomość równania określającego pracę tarcia. Można np. posłużyć się równaniem

$$T\,ds = dl_f = \frac{\lambda_f w^2}{2\,D_e}\,dx,$$

gdzie λ_f oznacza liczbę tarcia, dx - element długości kanału, D_e - zastępczą (hydrauliczną) średnicę kanału. Wykorzystując to równanie Linnecken [2] wykonał obliczenia dla gazu doskonałego ($\varkappa = 1,3$ i $\varkappa = 1,4$) przepływającego w dyszy o przekroju okrągłym i prostokątnym, przy różnych kątach rozwarcia. Wyniki podał w postaci wykresów przedstawiających względną zmianę prędkości (stosunek Macha) i względną zmianę ciśnienia w rozszerzającej się części dyszy, począwszy od przekroju krytycznego.

Oznaczenia

- a - lokalna prędkość dźwięku w płynie,
- A - pole przekroju poprzecznego kanału,
- c_p - ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem,
- D_e - zastępcza (hydrauliczna) średnica kanału,
- i - entalpia właściwa,
- l_f - jednostkowa praca tarcia,
- p - bezwzględne ciśnienie statyczne,
- s - entropia właściwa,
- T - temperatura bezwzględna,
- v - objętość właściwa,

w - prędkość przepływu,

α_p - termodynamiczny współczynnik rozszerzalności,

λ_f - liczba tarcia,

$(\ )_{kr}$ - wielkości dotyczące przekroju krytycznego,

$(\ )_m$ - wielkości dotyczące przekroju minimalnego.

LITERATURA

[1] Dejcz M.E.: Techniczeskaja gazodynamika. Wydanie 2. Moskwa-Leningrad 1961 r. GEI,

[2] Linnecken H.: Die verlustbehaftete Strömung in Lavaldüsen. Forsch. Geb. Ingenieurwesens 1961 r. nr 4 s.97-104 (Ekspress Informacja "Tiepłoenergetika" 1961r.nr 47 ref.179).

[3] Ochęduszko S.: Teoria maszyn cieplnych. Część I. Wydanie 1. Warszawa 1957 r. PWT.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Р е з ю м е

На основании уравнения неразрывности, I и II начала термодинамики, при использовании общих зависимостей между термическими и калорическими параметрами состояния, выведено уравнение (10), описывающее установившееся одномерное течение сжимаемой жидкости в изолированной трубе переменного сечения. Рассмотрено следствия этого уравнения для сопла Лаваля.

MONODIMENSIONAL STEADY FLOW OF THE COMPRESSIBLE FLUID IN THE INSULATED DUCT

S u m m a r y

Starting from the law of the matter conservation and from the I and II laws of thermodynamics, making use of general interrelations between thermic and caloric state parameters, an eqation has been derived (10), which is governing the monodimensional, steady flow of the compressible fluid in the insulated duct. The consequences of this equation with reference to the Laval nozzle have been discussed.