ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z.122 Nr kol. 1388

Witold BRANDYS

BŁĘDY NUMERYCZNE A DRGANIA CHAOTYCZNE W UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Streszczenie. Artykuł zwraca uwagę na błędy, które mogą zostać popełnione przy próbie analizy numerycznej układu, w którym może wystąpić zjawisko chaosu. Opisano w nim błędy wynikające z zaokrągleń ułamków w zapisie zmiennoprzecinkowym, błędy wynikające z niedokładnego opisu ułamków okresowych oraz liczb niewymiernych (np. π) oraz wpływ kroku całkowania w numerycznym obliczaniu całki (np. metodą Rungego-Kutty piątego rzędu w „Matlabie").

NUMERICAL ERRORS AND CHAOTIC OSCILLATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Summary. The paper describes errors, which may be done in numerical analysis of a chaotic system. It illustrates errors which are consequence of round fractions in floating-point notation, errors of inacurate description of periodic decimal and irrational number (eg. π), and influence of step size in numerical integration (eg. fifth order Runge-Kutta method in Matlab).

1. Wstęp

Badania numeryczne deterministycznego chaosu mogą prowadzić do różnorakich błędów w otrzymywanych wynikach. Źródłem tych błędów mogą być między innymi: niedokładności zapisu zmiennoprzecinkowego w komputerach, niedokładności wynikające z niemożności zapisania liczb niewymiernych, które dzięki bardzo dużej wrażliwości układów chaotycznych na zmianę parametrów układu mogą powodować powstawanie fałszywych, a także niewłaściwy dobór parametrów całkowania numerycznego, który spowodować może nawet wrażenie powstawania chaosu w układach, w których on nie występuje.

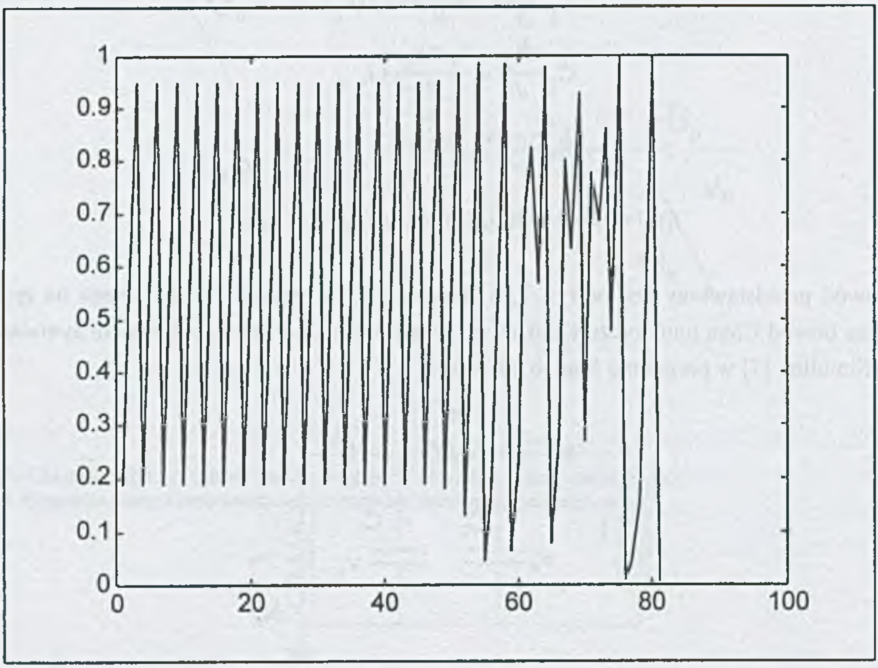
2. Wpływ niedokładności zapisu zmiennoprzecinkowego

Badając bardzo proste układy chaotyczne zauważamy istotne różnice między teoretycznymi obliczeniami a wynikami otrzymanymi za pomocą maszyn liczących. Przyczyna jest dwojaka: jak zwykle w przypadku układów chaotycznych wykazują one istotną wrażliwość na warunki początkowe, a ponadto w przypadku obliczeń komputerowych ograniczona jest dokładność w arytmetyce zmiennoprzecinkowej. Biorąc pod uwagę te dwie cechy nietrudno zauważyć, że zaobserwowanie tak charakterystycznego zjawiska dla chaosu, jak zachowanie okresowe czy ergodyczne, może być niezmiernie trudne czy wręcz niemożliwe. Rozpatrzymy to zjawisko korzystając z funkcji piłokształtnej. Funkcja ta może być opisana wzorem: $F(x) = \mathrm{Frac}\,(2x)$ dla $0 \leq x < 1$. Funkcja Frac oblicza mantysę liczby x i może być przedstawiona jako: $\mathrm{Frac}\,(x) = x - c$, jeśli $c \leq x < c + 1$ oraz c jest liczbą całkowitą. Jeżeli przedstawimy teraz liczbę x w reprezentacji binarnej, czyli takiej, jaka akceptowana jest przez komputer, to otrzymamy $x = 0{,}a_1a_2a_3...$, a funkcja F(x) dla takiej reprezentacji przyjmie postać: $F(x) = 0{,}a_2a_3a_4...$ Operacja taka nazywana jest przesunięciem Bernoulliego i jest równoważna iteracji graficznej funkcji kwadratowej, np. $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ [4]. Dla a=4 obserwujemy tutaj klasyczne zachowanie chaotyczne układu. Zatem funkcja $x_{n+1} = \mathrm{Frac}\,(2x_n)$ też powinna wykazywać cechy układu chaotycznego. Powinny dla niej istnieć np. punkty okresowe. Jeżeli policzymy przykład „na palcach", to rzeczywiście tak będzie, jeśli natomiast skorzystamy z komputera lub z kalkulatora, wyniki mogą być zupełnie inne... Weźmy przykładowo liczbę 0.6. Kolejne iteracje pokażą ciąg 0.6, 0.2, 0.4, 0.8, 0.6 itd., identyczny wynik pokaże kalkulator. Jeżeli jednak napiszemy prosty program w komputerze, to ze względu na zapis binarny liczby 0.6, która binarnie przyjmuje postać: 0.100110011001... i w tym zapisie jest okresowa, a zatem nie może być przedstawiona dokładnie, po skończonej ilości iteracji, zależnej od ilości bitów przeznaczonych na zapis tej liczby, otrzymamy liczbę 0. W celu wyjaśnienia: każda liczba rzeczywista zapisywana jest w komputerze w binarnej postaci $0.a_1a_2a_3...a_k00$, gdzie k jest stałą zależną od szerokości rejestru komputera, a cyfry a_i to 0 lub 1. Czy zatem kalkulator liczy w tym przypadku dokładniej? W kalkulatorze też mamy do czynienia z liczbami binarnymi, jednak ich zapis odbywa się zwykle za pomocą kodu BCD, gdzie cztery bity reprezentują jedną cyfrę dziesiętną. Stąd w przypadku liczby 0.6 mamy zapis dokładny 0.0110, a więc wyniki też są dokładne. Jednak próba policzenia na kalkulatorze iteracji dla liczby 1/7 skazana jest już również na niepowodzenie, bowiem 1/7 nie ma skończonej reprezentacji binarnej.

Czy liczenie orbit chaotycznych ma zatem sens przy użyciu maszyn cyfrowych, skoro praktycznie wszystkie obliczenia obarczone są błędem? Okazuje się, że zgodnie z lematem o cieniu [5] każda obliczona orbita układu chaotycznego pozostaje bliskim przybliżeniem prawdziwej orbity tego samego układu. W układach chaotycznych, w których spełnione są założenia lematu o cieniu, korzystając z modelu deterministycznego można udowodnić dowolną prognozę.

3. Wpływ niemożności dokładnego zapisu liczb niewymiernych

Zatrzymajmy się jeszcze przy punktach okresowych. Wiemy, że iteracja rozpoczęta w punkcie okresowym doprowadzi nas jedynie do jakiejś skończonej liczby przedziałów, przez które wielokrotnie przechodzić będzie orbita układu. Teoretycznie znaleźć można nieskończenie wiele punktów okresowych w każdym podprzedziale. Jeżeli jako punkt okresowy podamy taki, który będzie liczbą niewymierną, to bez trudu wykażemy jego okresowość. Dla przykładu weźmy punkt $x_0 = \sin^2(\pi/7)$. Jest to punkt, który dla iteracji funkcji kwadratowej $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ da następujące po sobie wartości: $x_1 = \sin^2(2\pi/7)$, $x_2 = \sin^2(4\pi/7)$, $x_3 = \sin^2(\pi/7)$ itd., czyli orbitę cykliczną przechodzącą przez trzy punkty. Dla obliczeń numerycznych liczba x_0 wyraża się wartością $x_0 = \sin^2(\pi/7) = 0{,}1882550...$, a to oznacza, że nie istnieje również dokładna reprezentacja binarna tej liczby. Błąd dla liczby zmiennoprzecinkowej pojedynczej precyzji może być w granicach jednej miliardowej i jest zależny od szerokości rejestrów procesora wykonującego operacje zmiennoprzecinkowe. W każdym kroku iteracji błąd w przybliżeniu podwoi się, czyli po 20 krokach powiększy się o rząd miliona. Oznacza to, że jedynie skończona liczba iteracji będzie dawała wyniki bliskie punktu x0, a potem pojawi się wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych. Ilustracja tego przykładu pokazana została na rysunku nr 1. Po około 50 iteracjach ujawnia się wrażliwość układu na warunki początkowe, która wyrzuca orbitę z okresowej na chaotyczną.



Rys. 1. Rezultat badania iteracji funkcji kwadratowej $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$
Fig. 1. Realization of $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ calculations

Jeżeli nawet znajdziemy taki punkt okresowy, który może mieć dokładną reprezentację binarną, to już po wykonaniu pojedynczego przesunięcia Bernoulliego ujawni się minimalny błąd powstały przez zaokrąglenie i spowoduje wypchnięcie punktu trajektorii z orbity okresowej, co poprzez wrażliwość układu na warunki początkowe spowoduje powstanie nieprzewidywalnych wyników.

4. Wpływ niewłaściwego doboru parametrów całkowania numerycznego

Niewłaściwy dobór parametrów całkowania numerycznego [6] może spowodować, że w badanym układzie pojawią się przesunięte lub zaburzone orbity rzeczywiste, a nawet orbity nie istniejące. Przypadek ten można zilustrować badając obwód Chua [1][2][3]. Jest to prosty oscylator, w którym zaobserwować można zjawisko chaosu. Obwód Chua, jak większość systemów chaotycznych, wykazuje wrażliwość na warunki początkowe, to znaczy startując z dwóch różnych warunków początkowych leżących blisko siebie dostajemy orbity, które stopniowo oddalają się od siebie z wykładnikiem Lapunowa, aż staną się całkowicie nieskorelowane.

Równania obwodu są dane jako:

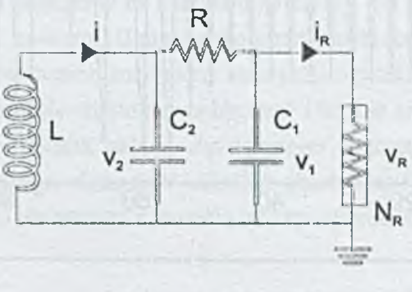
$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{v_2 - v_1}{R} - f(v_1),$$

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1 - v_2}{R} + i,$$

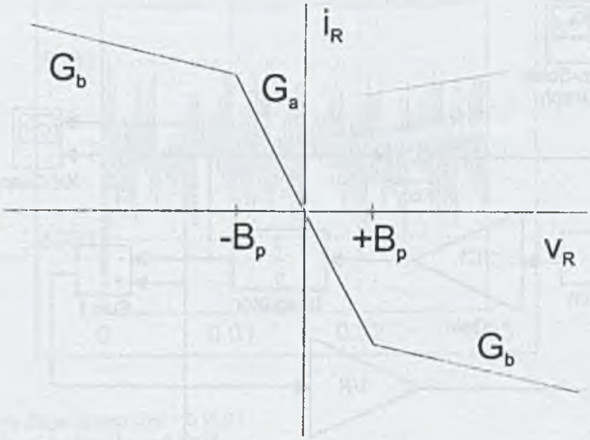
$$L \frac{di}{dt} = -v_2 - ri$$

$$f(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)[\,|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|\,]$$

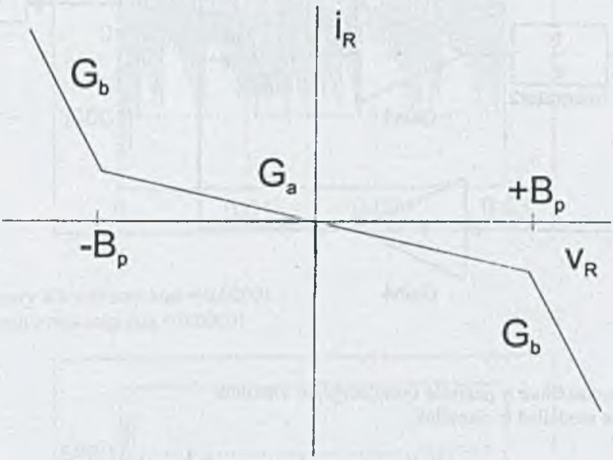
Obwód przedstawiony jest na rys. 2, a charakterystyka rezystora nieliniowego na rys. 3. Badając obwód Chua numerycznie można go zamodelować korzystając z pakietu symulacyjnego Simulink [7] w programie Matlab jak na rys. 5.



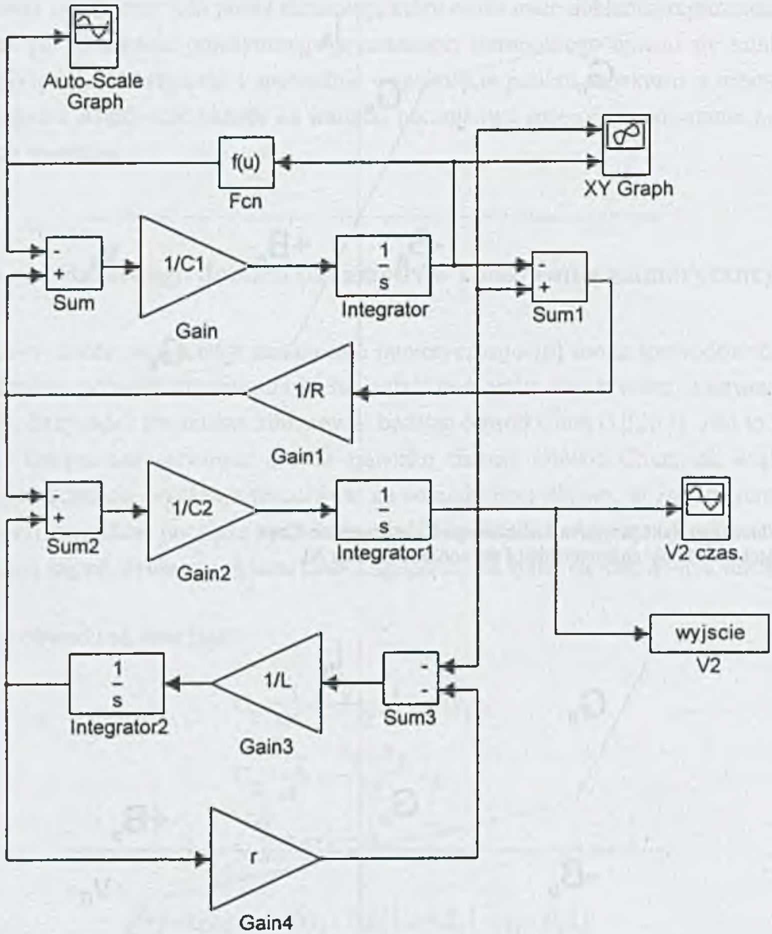
Rys. 2. Obwód Chua
Fig. 2. Chua's circuit



Rys. 3. Charakterystyka rezystora nieliniowego N_R w obwodzie Chua
Fig. 3. Piecewise-linear characteristic of the noninear resistor N_R

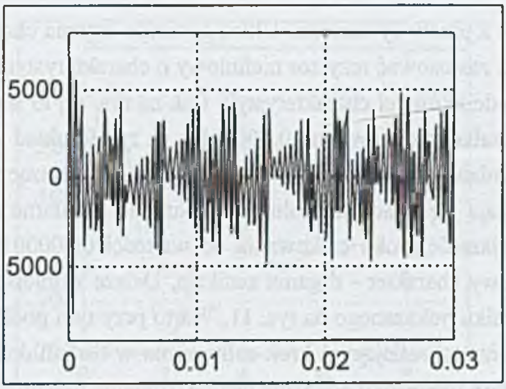


Rys. 4. Charakterystyka rezystora nieliniowego N_R w obwodzie Chua (wersja druga)
Fig. 4. Piecewise-linear characteristic of the noninear resistor N_R (second type)

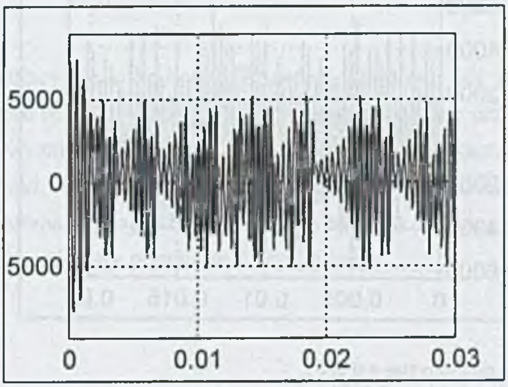


Rys. 5. Schemat obwodu Chua w pakiecie symulacyjnym Simulink
Fig. 5. Chua's circuit modelled in Simulink

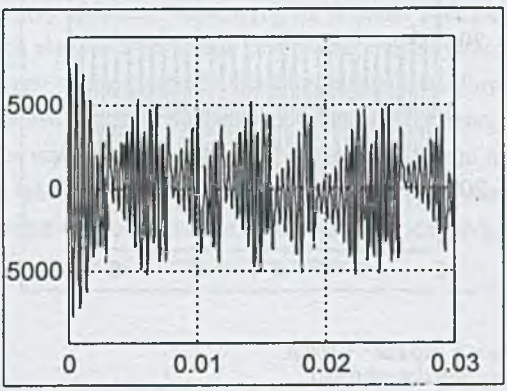
Całkowanie numeryczne w tym programie standardowo wykorzystuje metodę Rungego-Kutty piątego rzędu [8]. Dokładność obliczeń można kształtować między innymi dobierając wielkość kroku całkowania. Na rysunkach 6 - 8 przedstawiono wyniki symulacji dla różnych kroków całkowania.



Rys. 6. Wykres czasowy dla min step size = 0.0001
Fig. 6. Time response for min step size = 0.0001

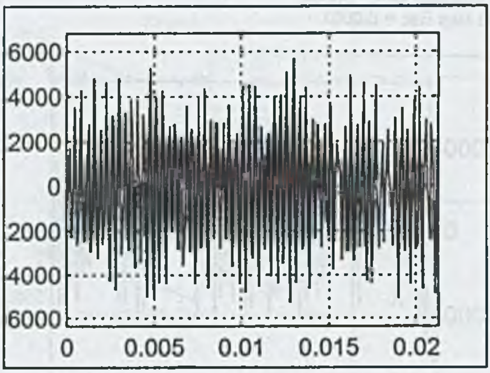


Rys. 7. Wykres czasowy dla min step size = 0.00001
Fig. 7. Time response for min step size = 0.00001

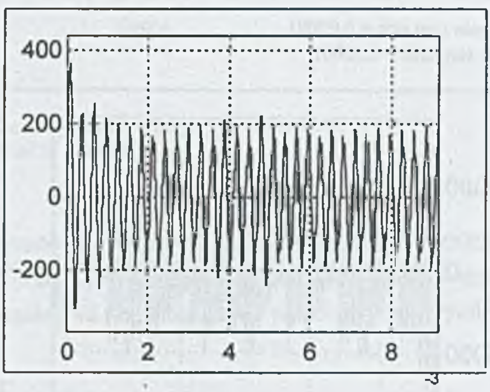


Rys. 8. Wykres czasowy dla min step size = 0.000001
Fig. 8. Time response for min step size = 0.000001

Wyniki te są zgodne z przewidywaniami. Układ generuje drgania chaotyczne. Jeżeli w tym samym obwodzie Chua zastosować rezystor nieliniowy o charakterystyce, w której zmieniono nachylenie liniowych odcinków tej charakterystyki (jak na rys. 4), to wyniki symulacji są zaskakujące. Przy kroku całkowania równym 0.0001, jak na rys. 9, układ wydaje się generować drgania chaotyczne. Zmiana kroku całkowania na mniejszy, wynoszący 0.00001, powoduje, że w symulacji pojawiają się znacznie wolniejsze, bardziej regularne drgania. Obrazuje to rys. 10. Kolejne zmniejszenie kroku całkowania do wartości 0.000001 powoduje, że układ pokazuje swój prawdziwy charakter - drgania zanikają. Dalsze zmniejszanie kroku całkowania nie zmienia już wyniku pokazanego na rys. 11. Warto przy tym podkreślić, że domyślnym parametrem min step size, określającym krok całkowania w Simulinku, jest wartość 0.0001 [8], a więc ta, która w tym przypadku pokazuje błędne działanie układu.



Rys. 9. Wykres czasowy dla min step size = 0.0001
Fig. 9. Time response for min step size = 0.0001



Rys. 10. Wykres czasowy dla min step size = 0.00001
Fig. 10. Time response for min step size = 0.00001

Rys. 11. Wykres czasowy dla min step size = 0.000001
Fig. 11. Time response for min step size = 0.000001

Jeśli bada się symulacyjnie kilka bądź kilkanaście układów i bez zmiany dokładności całkowania dają one dobre rezultaty, łatwo później wpaść w pułapkę przy badaniu układu takiego jak ten opisany powyżej. Mimo poprawnego zamodelowania okazuje się bowiem, że symulacja daje błędne wyniki. W tym przypadku autor tego artykułu odkrył pomyłkę dopiero przy dokładnej analizie matematycznej układu. Ponowne badania symulacyjne, już ze zwiększoną dokładnością obliczeń, wykazały poprawność owej analizy.

Podsumowanie

Symulacja komputerowa układów dynamicznych jako narzędzie wspomagające proces obliczeń numerycznych przy układach wrażliwych na warunki początkowe, przede wszystkim układach wykazujących złożone zachowanie chaotyczne, może być źródłem błędów, powodujących zafałszowanie czy wręcz niemożliwość otrzymania prawidłowych wyników. Wynika stąd konieczność gruntownej analizy modelowanego układu fizycznego, która doprowadzi do wysnucia wniosków na temat przypuszczalnego zachowania danego układu. Należy przy tym podkreślić, że analiza taka często jest bardzo trudna, a intuicyjne określenie zachowania się niektórych układów wręcz niemożliwe. Stąd z dużą ostrożnością podchodzić należy do wyników otrzymywanych za pomocą obliczeń numerycznych.

LITERATURA

1. G.Chen and X.Dong: Controlling Chua's circuits, J. Of Circ. Sys. Comput., 1993.
2. E.Ott, C.Greborgi, J.A.Yorke: Controlling chaos, Phy. Rev. Lett. 64, 1990.
3. M.J.Ogorzałek: Chaos Control: How to Avoid Chaos or Take Advantage of It, J. of the Franklin Institute Elseviere Science Ltd, vol 331B, No 6, 1994.
4. H.G.Schuster: Chaos deterministyczny. Wprowadzenie., Wyd. Naukowe PWN, W-wa 1995.
5. H.O.Peitgen, H.Jurgens, D. Saupe: Granice chaosu fraktale, Wyd. Naukowe PWN, W-wa 1996.
6. A.Ralston: Wstęp do analizy numerycznej, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, W-wa 1975.
7. Szymkat: Komputerowe wspomaganie w projektowaniu układów regulacji, Wyd. N.T., W-wa 1993.
8. J.Brzózka: Ćwiczenia z automatyki w Matlabie i Simulinku, Wyd. EDU-MIKOM, W-wa 1997.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Maciej Ogorzałek

Wpłynęło do Redakcji 7 grudnia 1997 r.

Abstract

Computer simulation of dynamic systems as a tool of enhancing numerical calculations involving systems which are sensitive for initial conditions, of which chaotic systems are perfect example, may be source of errors, causing distortion of results or even make it impossible to conduct proper analysis. It hence deep analysis of the modelling physical system is necessary to draw conclusions about most probable behaviour of this system. It should be stressed, that this kind of analysis is often very complicated, and intuitive qualification of the behaviour of some systems is impossible. Therefore we should be very careful with interpretation of the results obtained by numerical calculations.