ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z.122 Nr kol. 1388

Stanisław KOWALIK

WYKORZYSTANIE TEORII GIER O SUMIE ZEROWEJ DO PODEJMOWANIA DECYZJI W GÓRNICTWIE

Streszczenie. W pracy zdefiniowano podstawowe pojęcia z teorii gier o sumie zerowej, tj.: strategie, macierz gry i punkt siodłowy. Podano też zasadę dominacji i maksyminu (minimaksu). Te zasady z teorii gier wykorzystano do rozwiązywania problemów górniczych. Podano przykłady: 1) porównanie wysokonapięciowych sieci elektroenergetycznych w kopalniach, 2) wybór układu techniczno-organizacyjnego, 3) ocena sytuacji zagrożeniowych pod względem tąpnięć, 4) wybór kandydatów na stanowisko kierownika robót górniczych, 5) wybór kompozycji kruszywowych dla dwóch rodzajów konsystencji plastycznych betonów pompowych.

UTILISING THE THEORY OF ZERO-SUM GAMES IN DECISION MAKING IN MINING

Summary. In the work the basic notions of zero-sum games have been defined: a strategy, a game matrix and a saddle point. A domination principle and a maxmin (minmax) principle have been given, too. The principles of theory of games have been used in solving mining problems. Examples have been given of: 1) power networks comparison in mines, 2) the choice of the techno-organizational system, 3) assessment of the mining tremors hazard state, 4) the choice of the candidate for the post of mine manager, 5) the choice of crumble mixture for two types of plastic consistency pump concretes.

1. Wstęp

Teoria gier jest mało znana i mało wykorzystywana w praktyce górniczej. Liczne przykłady o tematyce górniczej zawarte w tej pracy świadczą o tym, że można tę teorię wykorzystać do podejmowania decyzji w górnictwie. Przykłady te mają zaznajomić Czytelnika z metodami obliczeniowymi stosowanymi w teorii gier. W przypadku, gdy Czytelnik spotka się z innym

problemem, rozwiązania proponowane w tym artykule mogą być pomocne przy rozwiązywaniu jego problemu.

W górnictwie ważnym zagadnieniem jest bezpieczeństwo pracy górników pracujących na dole w kopalni. Górnicy narażeni są na występowanie szeregu zjawisk niebezpiecznych, takich jak: wstrząsy podziemne, tąpania, zalanie wodą, wyrzuty gazów, zagrożenia metanowe, pożary. Zjawiska te nie zawsze można przewidzieć i trudno je jak na razie opisać za pomocą związków matematycznych. Jedną z metod wykorzystywanych w takich sytuacjach jest teoria gier.

W górnictwie węglowym metody teorii gier odgrywają szczególną rolę, gdyż górnictwo jako takie prowadzi grę z naturą i gra ta może przybierać formy gry konkurencyjnej lub gry kooperacyjnej, w zależności od umiejętnego wykorzystania i rozpoznania praw natury.

Przemysł wydobywczy, a szczególnie górnictwo węgla kamiennego, w którym dominują (przynajmniej w Polsce) kopalnie głębinowe, ma to do siebie, że każda robota górnicza narusza istniejący, ustalony stan w górotworze. Naruszenie tego stanu stanowi źródło zagrożeń, z czego wynika, że roboty należy prowadzić tak, aby te zagrożenia były możliwie najmniejsze.

Gospodarka rynkowa, nadwyżka podaży węgla nad popytem sprawiają, że spółki węglowe obligowane są do konkurowania na rynku węglowym oraz - co równie ważne - na rynku surowców energetycznych. Konkurują nie tylko węgiel z węglem, ale i węgiel z gazem, ropą naftową itd. Zasady konkurencji na rynku dobrze opisuje teoria gier o sumie zerowej.

Doświadczenia płynące z konkurencji wyniszczających, bankructwa i upadłości szeregu dużych i małych przedsiębiorstw stanowiły o potrzebie poszukiwania takich rozwiązań, które nie eliminują konkurencji, ale wprowadzają do niej cechy humanitarne.

Teoria gier zajmuje się sytuacjami, w których występuje konflikt interesów, zachodzący nie tylko wtedy, gdy strony uczestniczące w konflikcie są całkowicie przeciwstawne, ale także wówczas, gdy są one tylko częściowo niezgodne. W przypadku całkowicie przeciwstawnych interesów stron mamy do czynienia z grami o sumie zerowej [3], [4], [9], [12], [14]. W grze może uczestniczyć dwóch graczy lub więcej. Z tego powodu gry mogą być dwuosobowe lub n-osobowe. Uczestników gry nazywamy graczami lub partnerami.

2. Strategie i macierz gry

Poszczególne możliwe działania czy decyzje graczy nazywamy strategiami. Termin ten został wzięty z teorii gier. Na przykładzie gry dwuosobowej o sumie zerowej wyjaśnimy, skąd bierze się określenie „gra o sumie zerowej". Strategie gracza pierwszego oznaczymy symbolami $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, natomiast strategie gracza drugiego $\beta_1,\ldots,\beta_n$. Każdej parze strategii (α_i, β_j) przyporządkowany jest określony wynik gry w_{ij}, który oznacza wypłatę albo wielkość wygranej gracza pierwszego w wyniku zastosowania przez niego strategii α_i, a przez gracza drugiego strategii β_j. Gracz drugi traci wielkość w_{ij}. Innymi słowy: przy zastosowaniu pary strategii (α_i, β_j) gracz drugi płaci graczowi pierwszemu wielkość w_{ij}. Jeśli wielkość w_{ij} jest ujemna, to

gracz pierwszy płaci graczowi drugiemu. Termin „gra o sumie zerowej" wywodzi się stąd, że wygrana jednego gracza równa się przegranej drugiego gracza. Suma wypłat dla obydwu graczy wynosi więc zero. Taką grę możemy przedstawić w postaci macierzowej.

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz 2} \\ & \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{array} \\ \text{Gracz 1} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} & \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{1}$$

W teorii gier taką tablicę nazywa się macierzą wypłat dla gracza pierwszego. Wartości podane w tej macierzy gracz drugi płaci graczowi pierwszemu. Graczowi pierwszemu zależy na maksymalizowaniu wygranej. Gracz drugi stara się, aby straty jego były jak najmniejsze.

3. Punkt siodłowy i zasada maksyminu (minimaksu)

Przejdziemy do ogólnego omówienia poszukiwania punktu siodłowego dla macierzy gry o wymiarach m wierszy i n kolumn. Dana jest macierz $\{w_{ij}\}$, gdzie i=1,...,m; j=1,...,n. Dla gracza pierwszego stosujemy zasadę maksyminu. Mówi ona, że dolną cenę gry należy obliczyć według wzoru:

$$V_1 = \max_i \min_j \{w_{ij}\} \quad \text{dla} \quad i=1,...,m; \quad j=1,...,n \tag{2}$$

Strategię wyznaczoną w ten sposób nazywa się strategią maksyminową dla gracza pierwszego. Dla gracza drugiego stosujemy zasadę minimaksu. Mówi ona, że górną cenę gry należy obliczyć według wzoru:

$$V_2 = \min_j \max_i \{w_{ij}\} \quad \text{dla} \quad i=1,...,m; \quad j=1,...,n \tag{3}$$

Strategia wyznaczona w ten sposób nazywa się strategią minimaksową dla gracza drugiego. Jeżeli $V_1=V_2$, to gra posiada punkt siodłowy, a gracze powinni stosować strategie wyznaczone przez ten punkt. W tym przypadku strategie maksyminowa i minimaksowa są strategiami optymalnymi dla graczy. Ceną gry jest tutaj liczba $V=V_1=V_2$. Według terminologii Steinhausa [4] takie gry nazywamy grami zamkniętymi. Natomiast gdy $V_1 \neq V_2$, to gry nazywamy grami otwartymi.

4. Zasada dominacji oraz strategie mieszane

Może okazać się, że pewne strategie są lepsze. Pozwalają osiągnąć większy zysk niezależnie od posunięć przeciwnika.

Mówimy, że strategia α_k dominuje nad strategią α_l gracza pierwszego, gdy:

$$\forall_j \; w_{kj} \geq w_{lj} \qquad (j=1,...,n) \tag{4}$$

Mówimy, że strategia β_r dominuje nad strategią β_s natury, gdy:

$$\forall_i \; w_{ir} \leq w_{is} \qquad (i=1,...,m) \tag{5}$$

Zasada dominacji pomaga upraszczać gry eliminując z rozważań strategie, które nie będą używane.

W przypadku, gdy gra o sumie zerowej nie posiada punktu siodłowego w zakresie strategii czystych, wtedy do jej rozwiązania stosujemy strategie mieszane. Są one „mieszaniną" strategii czystych. Strategia czysta to jedna z ponumerowanych strategii, która będzie obowiązywać w danej partii gry. Strategia mieszana kieruje wyborem strategii czystych. Jeżeli gracz 1 ma m strategii czystych $\alpha_1,...,\alpha_m$, to strategią mieszaną jest rozkład prawdopodobieństwa na m punktach $x_1,...,x_m$ takich, że $x_i \geq 0$ (i=1,...,m) oraz $x_1+...+x_m=1$. Liczba x_i oznacza prawdopodobieństwo wyboru strategii α_i. Ważne w teorii gier jest twierdzenie, że każda gra posiada punkt siodłowy w strategiach mieszanych [3], [4], [12], [14]. Strategię mieszaną symbolicznie zapisujemy w postaci $(x_1\alpha_1,...,x_m\alpha_m)$.

5. Przykłady zastosowań teorii gier o sumie zerowej w górnictwie

Przykład 1

Zajmiemy się porównaniem wysokonapięciowych sieci elektroenergetycznych w trzech kopalniach na podstawie danych rzeczywistych zawartych w pracy [7]. Sieci te będą oceniane ze względu na występujące w nich doziemienia, które stanowią poważne zagrożenie dla pracujących pod ziemią górników. Wydaje się, iż uzasadniony jest pogląd, że u podstaw niepowodzeń w dziedzinie zabezpieczeń ziemnozwarciowych sieci leży głównie brak dostatecznego eksperymentalnego rozeznania zjawisk i struktury doziemień w sieciach rzeczywistych [7]. W trzech kopalniach oznaczonych symbolami A, B, C dokonano pomiarów występowania doziemień za pomocą rejestratorów. Rejestratory w kopalniach A i B były wyposazone w cztery liczniki działające odpowiednio ze zwłoką t=0.1s, t=1s, t=5s, t=10s. Rejestrator w kopalni C był wyposażony w pięć liczników działających ze zwłoką t=0.1s, t=1s, t=3s, t=5s, t=10s. Pomiarów dokonywano w różnych kopalniach w różnym okresie - od roku do dwóch

lat. Symbolami $\overline{n_{0.1}}$, $\overline{n_1}$, $\overline{n_3}$, $\overline{n_5}$, $\overline{n_{10}}$ oznaczono średnią liczbę doziemień w ciągu jednego miesiąca, trwających odpowiednio nie krócej niż 0.1s, 1s, 3s, 5s, 10s [7]. Dla trzech kopalń A, B, C te czasy są następujące (tabl. 1).

Tablica 1

Wyniki rejestracji doziemień w kopalnianych sieciach 6kV z izolowanym punktem zerowym

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	$\overline{n_{0.1}}$	$\overline{n_1}$	$\overline{n_3}$	$\overline{n_5}$	$\overline{n_{10}}$
A	29	4.7	-	2.9	2
B	30	5.9	-	2	1.4
C	10.6	4.2	3.3	2.9	2.5

Źródło: pozycja literatury [7]

Z punktu widzenia średniej liczby doziemień w ciągu jednego miesiąca najlepszą siecią (najbezpieczniejszą) jest sieć w kopalni C. Średnia liczba $\overline{n_{0.1}}$ wszystkich zarejestrowanych doziemień jest zdecydowanie najmniejsza (10.6<29, 10.6<30).

Tablicę 1 zanalizujemy jeszcze pod względem występowania doziemień o czasach trwania w poszczególnych przedziałach czasowych, tj. [0.1,1), [1,3), [3,5), [5,10), [10,∞). Na podstawie tablicy 1 możemy wyznaczyć średnią liczbę doziemień w wyżej wymienionych przedziałach czasowych. Tę liczbę dla każdego przedziału oznaczamy odpowiednio przez $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$, $\overline{l_3}$, $\overline{l_4}$, $\overline{l_5}$. Wyniki przedstawia tablica 2.

Tablica 2

Średnia liczba doziemień w ciągu miesiąca w poszczególnych przedziałach czasowych

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	$\overline{l_1}$	$\overline{l_2}$	$\overline{l_3}$	$\overline{l_4}$	$\overline{l_5}$
A	24.3	1.8	0	0.9	2
B	24.1	3.9	0	0.6	1.4
C	6.4	0.9	0.4	0.4	2.5

Tablicę 2 potraktujemy jako macierz gry, w której jeden partner ma do dyspozycji strategie A, B, C (tj. wybór sieci kopalnianej), a drugi partner ma do wyboru strategie: $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$, $\overline{l_3}$, $\overline{l_4}$, $\overline{l_5}$ (tj. wybór czasu trwania doziemienia).

Ze względu na zagrożenia, jakie mogą spowodować nieprzewidziane doziemienia, wskazane jest, aby w każdym przedziale czasowym wystąpiła jak najmniejsza liczba doziemień. Analizując tablicę 2 widzimy, że nie ma strategii dominujących spośród A, B, C.

Zbadamy teraz, którą strategię wskaże zasada minimaksu jako najbezpieczniejszą:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = \min (24.3, 24.1, 6.4) = 6.4.$$

Tak więc po przyjęciu kryterium, aby w każdym przedziale czasowym wystąpiła mała liczba doziemień, najbezpieczniejszą siecią jest sieć w kopalni C. Ta gra ma też punkt siodłowy w strategiach czystych, ponieważ:

$$\max_j \min_i \{w_{ij}\} = \max(6.4, 0.9, 0, 0.4, 1.4) = 6.4$$

Ceną gry jest tutaj liczba 6,4.

Rozpatrzymy teraz zagrożenie z innego punktu widzenia. Analizując tablicę 2 widzimy, że duża liczba doziemień w każdej kopalni ma czas trwania bardzo krótki, zawierający się w przedziale od 0.1s do 1s. W pozostałych przedziałach występuje mniej doziemień, ale o dłuższym czasie trwania.

Zajmiemy się teraz oceną wymienionych sieci elektroenergetycznych, stosując kryterium, aby łączny czas trwania doziemień w poszczególnych przedziałach był możliwie mały. Ponieważ nie są znane dokładne czasy trwania poszczególnych doziemień, a tylko przedziały ich występowania, więc obliczenia będą też tylko przybliżone. Jako wartość średnią doziemień występujących w danym przedziale przyjmujemy średnią arytmetyczną lewego i prawego końca przedziału. Będą to dla pierwszych czterech przedziałów liczby 0.55, 2, 4, 7.5. Natomiast dla piątego przedziału $[10, \infty)$ ta średnia nie jest znana. Praktycznie może ona wynosić kilka minut, do chwili usunięcia awarii. Tę średnią oznaczymy przez x. Po przemnożeniu liczb z tablicy 2 przez średni czas trwania doziemień w poszczególnych przedziałach otrzymujemy przybliżoną wartość całkowitego czasu trwania doziemień w tych przedziałach. Wartości te zapisane są w tablicy 3.

Tablica 3

Łączny czas trwania doziemień w ciągu miesiąca w poszczególnych przedziałach

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	$\overline{c_1}$	$\overline{c_2}$	$\overline{c_3}$	$\overline{c_4}$	$\overline{c_5}$
A	13.365	3.6	0	6.75	2x
B	13.255	7.8	0	4.5	1.4x
C	3.52	1.8	1.6	3	2.5x

Rozważymy teraz, które ze strategii A, B, C wskaże zasada minimaksu przy nieokreślonej wartości parametru x:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = \min(\max(13.365, 2x), \max(13.255, 1.4x), \max(3{,}52, 2{,}5x)) =$$

$$= \begin{cases} 3.52 & \text{dla } x \in [0.1, 1.408) \\ 2.5x & \text{dla } x \in [1.408, 5.302) \\ 13.255 & \text{dla } x \in [5.302, 9.468) \\ 1.4x & \text{dla } x \in [9.468, \infty) \end{cases}$$

Ponieważ x z założenia jest większe od 10, to:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = 1.4x$$

Wskazuje to na strategię B. Do tego samego wniosku możemy dojść wstawiając w tablicy 3 w miejsce x liczbę 10 jako dolną granicę przedziału [10,∞). Otrzymane wyniki zamieszczono w tablicy 4.

Tablica 4

Łączny czas trwania doziemień w ciągu miesiąca w poszczególnych przedziałach (dla x=10)

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	$\overline{c_1}$	$\overline{c_2}$	$\overline{c_3}$	$\overline{c_4}$	$\overline{c_5}$
A	13.365	3.6	0	6.75	20
B	13.255	7.8	0	4.5	14
C	3.52	1.8	1.6	3	25

Liczby w kolumnie piątej przewyższają wszystkie pozostałe w tablicy. Ze wzrostem x liczby w kolumnie piątej będą wzrastały proporcjonalnie, ale zawsze najmniejszą z nich będzie druga. Wynika to z faktu, że dla x>10 jest spełniona nierówność:

$$1.4x < 2x < 2.5x$$

Ponieważ wynik gry 1.4x występuje dla strategii B, to najlepszą (najbezpieczniejszą) siecią elektromagnetyczną jest więc sieć w kopalni B.

Przykład 2

W KWK „K" dla ściany prowadzonej w pokładzie Y projektant opracował cztery znacząco różniące się układy techniczno-organizacyjne: UTO-1, UTO-2, UTO-3, UTO-4. Obserwacje prowadzone w eksploatowanych, w bezpośrednim sąsiedztwie projektowanej, ścianach oraz obserwacje prowadzone w trakcie prowadzenia robót przygotowawczych pozwoliły projektantowi wyróżnić pięć stanów natury: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 [10]. Należy wybrać jeden spośród czterech układów techniczno-organizacyjnych. Zależy nam na maksymalizacji wydobycia. Macierz wydobycia przedstawiona jest w tablicy 5.

Tablica 5

Macierz wydobycia [T/dobę]

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
UTO-1	1900	1200	600	400	300
UTO-2	1200	800	700	600	300
UTO-3	2700	1400	500	400	300
UTO-4	1900	1600	1000	800	500

Źródło: literatura [10]

Sprawdzamy, czy gra określona przez tę macierz posiada punkt siodłowy w strategiach czystych. Obliczamy dolną i górną cenę gry.

$V_1 = \max_i \min_j \{w_{ij}\} = \max_i (300, 300, 300, 500) = 500,$

$V_2 = \min_j \max_i \{w_{ij}\} = \min_j (2700, 1600, 1000, 800, 500) = 500.$

Ponieważ $V_1 = V_2$, to gra posiada punkt siodłowy. Liczba 500 wystąpiła w czwartym wierszu macierzy (dla i=4) wskazując jednocześnie na układ UTO-4. Taki układ zabezpiecza wydobycie będzie co najmniej 500 ton na dobę niezależnie od stanów natury.

Przykład 3

Przykład będzie dotyczył określenia zmiennych opisujących tąpnięcia oraz ich wartości, które powodują wzrost zagrożenia tąpaniami. Wykorzystamy do tego dane zawarte w pracy [8]. Jako zbiór zmiennych przyjęto [8]: Z_2 - zmienna zagregowana, k_H - odległość od krawędzi eksploatacyjnej, L_S - odległość od frontu eksploatacyjnego, S - szerokość wyrobiska.

Tablica 6

Przedziały występowania zmiennych

Zmienna	Numer przedziału	Granice przedziału
Z_2	1	500 - 600
	2	601 - 700
	3	701 - 800
	4	801 - 1000
k_H	1	0 - 0.4
	2	0.41 - 1
L_S	1	0 - 60
	2	61 - 180
S	1	2 - 4
	2	4.1 - 5
	3	5.1 - 6

Tablica 7

Liczba tąpnięć dla poszczególnych kombinacji analizowanych przedziałów zmiennych

Lp.	Numer przedziałów Z_2	Numer przedziałów k_H	Numer przedziałów L_S	Numer przedziałów S	Liczba tąpnięć
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	2
2	1	1	1	2	4
3	1	1	1	3	0
4	1	1	2	1	0
5	1	1	2	2	1
6	1	1	2	3	0
7	1	2	1	1	0
8	1	2	1	2	0
9	1	2	1	3	0

cd. tablicy 7

1	2	3	4	5	6
10	1	2	2	1	0
11	1	2	2	2	1
12	1	2	2	3	0
13	2	1	1	1	0
14	2	1	1	2	7
15	2	1	1	3	2
16	2	1	2	1	0
17	2	1	2	2	6
18	2	1	2	3	0
19	2	2	1	1	1
20	2	2	1	2	1
21	2	2	1	3	1
22	2	2	2	1	0
23	2	2	2	2	2
24	2	2	2	3	0
25	3	1	1	1	5
26	3	1	1	2	12
27	3	1	1	3	5
28	3	1	2	1	0
29	3	1	2	2	6
30	3	1	2	3	1
31	3	2	1	1	1
32	3	2	1	2	6
33	3	2	1	3	2
34	3	2	2	1	0
35	3	2	2	2	4
36	3	2	2	3	0
37	4	1	1	1	9
38	4	1	1	2	9
39	4	1	1	3	5
40	4	1	2	1	0
41	4	1	2	2	8
42	4	1	2	3	0
43	4	2	1	1	1
44	4	2	1	2	4
45	4	2	1	3	0
46	4	2	2	1	0
47	4	2	2	2	3
48	4	2	2	3	0

Źródło: pozycja literatury [8]

Dla każdej zmiennej określono przedziały występowania [8]. Granice tych przedziałów pokazane są w tablicy 6.

Liczbę tąpnięć dla poszczególnych kombinacji analizowanych przedziałów określono na podstawie 152 Kart Katalogowych Tąpań [8]. Dane dotyczące liczby tąpań zawarte są w tablicy 7.

Przejdziemy teraz do interpretacji tablicy 6 w języku teorii gier. Zmienne Z_2, k_H, L_S, S opisujące warunki powstawania tąpań utożsamiamy z graczami, natomiast numery przedziałów występowania tych zmiennych ze strategiami. Liczba tąpnięć stanowi tu wynik gry. Na przy-

kład przy zastosowaniu przez gracza Z_2 strategii 4, przez gracza k_H strategii 1, przez gracza L_S strategii 2, przez gracza S strategii 2 otrzymujemy wynik gry 8. Mamy tu do czynienia z grą czteroosobową. Naszym zadaniem będzie ocenić, które strategie poszczególnych graczy są najbardziej niebezpieczne, tzn. najbardziej sprzyjają powstawaniu tąpań.

Taką grę możemy zapisać w postaci tablicy czterowymiarowej $W=\{w_{i,j,k,l}\}$ (i=1,2,3,4; j=1,2; k=1,2; l=1,2,3). Tablica ta ma kształt hiperprostopadłościanu w przestrzeni czterowymiarowej.

Możemy ją przedstawić na płaszczyźnie w postaci przekrojów ustalając dwie zmienne, np.:

Gracz Z_2, i=1
Gracz k_H, j=1

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=1
Gracz k_H, j=2

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=2
Gracz k_H, j=1

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=2
Gracz k_H, j=2

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=3
Gracz k_H, j=1

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 12 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=3
Gracz k_H, j=2

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=4
Gracz k_H, j=1

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=4
Gracz k_H, j=2

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz S} \\ l= & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Gracz } L_S\ (k=) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

W wyniku analizy tych przekrojów stwierdzamy, że:

- strategia i=3 dominuje nad strategią i=1 gracza Z_2, ponieważ

$$\forall_{j,k,l}\ w_{3,j,k,l} \geq w_{1,j,k,l} \qquad (j=1,2;\ k=1,2;\ l=1,2,3),$$

- strategia i=3 dominuje nad strategią i=2 gracza Z_2, ponieważ

$$\forall_{j,k,l}\ w_{3,j,k,l} \geq w_{2,j,k,l} \qquad (j=1,2;\ k=1,2;\ l=1,2,3),$$

- strategia i=4 dominuje nad strategią i=1 gracza Z_2, ponieważ

$$\forall_{j,k,l}\ w_{4,j,k,l} \geq w_{1,j,k,l} \qquad (j=1,2;\ k=1,2;\ l=1,2,3),$$

- strategia l=2 dominuje nad strategią l=1 gracza S, ponieważ

$$\forall_{i,j,k}\ w_{i,j,k,2} \geq w_{i,j,k,1} \qquad (i=1,2,3,4;\ j=1,2;\ k=1,2),$$

- strategia l=2 dominuje nad strategią l=3 gracza S, ponieważ

$$\forall_{i,j,k}\ w_{i,j,k,2} \geq w_{i,j,k,3} \qquad (i=1,2,3,4;\ j=1,2;\ k=1,2).$$

Z dalszych rozważań eliminujemy z gry strategie zdominowane, tj. strategie i=1, i=2 gracza Z_2 oraz strategie l=1, l=3 gracza S. Należy zwrócić uwagę, że eliminacja z gry jednej strategii w przestrzeni czterowymiarowej oznacza usunięcie z tablicy gry jednego przekroju trójwymiarowego tej tablicy. Gdy usuwamy strategię gracza Z_2, oznacza to usunięcie zbioru liczb umieszczonego w prostopadłościanie o wymiarach 2×2×3, tj. dwunastu liczb. Natomiast, gdy usuwamy strategię gracza S, to eliminujemy zbiór liczb umieszczony w prostopadłościanie o wymiarach 4×2×2, tj. szesnaście liczb. Część usuwanych liczb jest wspólna dla obydwu graczy.

Po wyeliminowaniu strategii zdominowanych tablica wypłat zredukowała się do kostki sześciennej w przestrzeni trójwymiarowej o wymiarach 2×2×2. Przedstawiamy ją w postaci dwóch przekrojów:

Gracz Z_2, i=3 Gracz S, l=2 Gracz L_S

$$\begin{array}{cc} & k = \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{Gracz } k_H\ (j=) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracz Z_2, i=4 Gracz S, l=2 Gracz L_S

$$\begin{array}{cc} & k = \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{Gracz } k_H\ (j=) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Na podstawie tych macierzy zauważamy, że:

- strategia j=1 dominuje nad strategią j=2 gracza k_H, ponieważ

$$\forall_{i,k}\ w_{i,1,k,2} \geq w_{i,2,k,2} \qquad (i=3,4;\ k=1,2),$$

- strategia k=1 dominuje nad strategią k=2 gracza L_S, ponieważ

$$\forall_{i,j} w_{i,j,1,2} \geq w_{i,j,2,2} \quad (i=3,4;\ j=1,2).$$

Po wyeliminowaniu z gry strategii j=2 gracza k_H oraz strategii k=2 gracza L_S otrzymujemy macierz wypłat w następującej postaci:

$$\begin{array}{ll} & \text{Gracz } k_H\ (j=1) \\ & \text{Gracz } L_S\ (k=1) \\ & \text{Gracz } S\ (l=2) \\ \text{Gracz } Z_2\ (i=) & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Widzimy, że strategia i=3 dominuje nad strategią i=4 gracza Z_2, ponieważ 12>9.

Postępując w kolejności odwrotnej do eliminowania strategii zdominowanych, możemy wyciągnąć następujące wnioski dotyczące parametrów opisujących tąpnięcia pod względem zagrożenia dla pracujących górników:

1) sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (701-800)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (801-1000)$;
2) sytuacja, gdy zmienna $k_H \in (0-0.4)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $k_H \in (0.41-1)$;
   sytuacja, gdy zmienna $L_S \in (0-60)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $L_S \in (61-180)$;
3) sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (701-800)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (500-600)$;
   sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (701-800)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (601-700)$;
   sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (801-1000)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (500-600)$;
   sytuacja, gdy zmienna $S \in (4.1-5)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $S \in (2-4)$;
   sytuacja, gdy zmienna $S \in (4.1-5)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $S \in (5.1-6)$.

Podamy teraz dwa przykłady wykorzystania zasady dominacji. Zastosowanie tej zasady pozwoli na efektywne, szybkie i proste rozwiązanie problemu.

Przykład 4

Dane do przykładu zostały wzięte z pracy [13]. Na podstawie sondażu opinii ekspertów ustalony został zbiór dyscyplin naukowych, weryfikujący przygotowanie na stanowisko kierownika robót górniczych [13]. Dziedzinami tymi są:

1) eksploatacja złóż i bhp,
2) wentylacja,
3) budowa i projektowanie kopalń,
4) organizacja i ekonomika górnictwa,
5) mechanizacja górnictwa.

Unormowane oceny dla ośmiu kandydatów w pięciu dyscyplinach przedstawia tablica 8.

Tablica 8

Unormowane oceny kandydatów

Nr kandydata	Dziedziny				
	1	2	3	4	5
1	1	0.8	0.8	0.8	0.6
2	0.8	1	1	0.6	0.8
3	1	0.6	0.6	1	1
4	0.8	0.8	1	0.6	0.6
5	0.6	1	0.6	0.6	1
6	0.8	0.8	0.6	0.6	0.8
7	0.8	0.8	1	0.6	0.8
8	1	0.6	0.8	0.6	0.6

Źródło: literatura [13]

Należy przeprowadzić wstępną selekcję kandydatów. Przyjmujemy, że decydent będzie miał osiem strategii do wyboru $\alpha_1,...,\alpha_8$, określonych jako numer kandydata. W wyniku wybrania strategii α_i nie otrzymujemy jednej liczby, lecz pięć liczb $a_{i1},...,a_{i5}$, określone jako oceny i-tego kandydata w pięciu dyscyplinach. Z tablicy 7 wynika, że strategia α_1 dominuje nad strategią α_8, ponieważ $a_{1j} \geq a_{8j}$ (j=1,...,5) oraz strategia α_2 dominuje nad strategiami α_4, α_6, α_7, ponieważ $a_{2j} \geq a_{4j}$, $a_{2j} \geq a_{6j}$, $a_{2j} \geq a_{7j}$, (j=1,...,5). Po wyeliminowaniu strategii zdominowanych otrzymujemy wyniki zamieszczone w tablicy 9.

Tablica 9

Unormowane oceny kandydatów po eliminacji strategii zdominowanych

Strategia	Nr kandydata	Dziedziny				
		1	2	3	4	5
α_1	1	1	0.8	0.8	0.8	0.6
α_2	2	0.8	1	1	0.6	0.8
α_3	3	1	0.6	0.6	1	1
α_5	5	0.6	1	0.6	0.6	1

Zasada maksyminu nie wyróżnia żadnego spośród pozostałych czterech kandydatów, ponieważ dolna cena gry jest jednakowa dla wszystkich kandydatów

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max (0.6, 0.6, 0.6, 0.6) = 0.6.$$

Tak więc w wyniku wstępnej eliminacji zostali odrzuceni kandydaci o numerach 4,6,7,8, a do grupy lepszych zostali zaliczeni kandydaci 1,2,3,5.

Przykład 5

Do przykładu wykorzystamy dane z pracy [1]. Dla czterech różnych punktów piaskowych kompozycji kruszywowych, wynoszących odpowiednio 20%, 22.5%, 25%, i 28% oraz dla dwóch rodzajów konsystencji plastycznych betonów pompowych, tj. dla konsystencji plastycznej i dla konsystencji gęstoplastycznej, należy wybrać odpowiedni punkt piaskowy maksymalizujący wytrzymałość kostkową na ściskanie po 28 dniach. Dane liczbowe przedstawione są w tablicy 10.

Tablica 10

Wytrzymałość różnych kompozycji kruszywowych

Lp.	Punkt piaskowy [%]	Konsystencja	Wytrzymałość kostkowa 15 cm^3 po 28 dniach [MPa]
1	20.0	plastyczna	63.0
2		gęstoplastyczna	66.5
3	22.5	plastyczna	67.5
4		gęstoplastyczna	68.9
5	25.0	plastyczna	66.2
6		gęstoplastyczna	66.7
7	28.0	plastyczna	61.0
8		gęstoplastyczna	59.8

Źródło: literatura [1]

Przyjmujemy, że decydent ma do wyboru cztery strategie $\alpha_1,...,\alpha_4$ określone jako wybór punktu piaskowego. Dane z tablicy 9 przedstawiamy w postaci wygodniejszej do analizy (tablica 11).

Tablica 11

Wytrzymałość różnych kompozycji kruszywowych

Strategia	Punkt piaskowy [%]	Konsystencja	
		plastyczna	gęstoplastyczna
α_1	20.0	63.0	66.5
α_2	22.5	67.5	68.9
α_3	25.0	66.2	66.7
α_4	28.0	61.0	59.8

Z tablicy 11 wynika, że strategia α_2 dominuje nad pozostałymi. Tak więc największą wytrzymałość uzyskuje się dla obydwu konsystencji przy punkcie piaskowym 22.5%.

LITERATURA

1. Barchański B.: Doświadczalno-teoretyczne podstawy doboru nowych obudów szybowych dla bardzo trudnych warunków górniczo-hydrogeologicznych. Zesz. Nauk. AGH Górnictwo z. nr 149, Kraków 1989.
2. Fudenberg D., Tirole J.: Game Theory. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England 1995.
3. Kałuski J.: Podstawy teorii gier. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej J. Skalmierskiego, Gliwice 1996.
4. Kofler E.: Wstęp do teorii gier. PZWS, Warszawa 1963.
5. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji w górnictwie w warunkach niepewności. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z.nr 228, Gliwice 1996.
6. Kowalik S.: Wykorzystanie teorii gier do określania bezpieczeństwa. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo z.nr 210, Gliwice 1993.
7. Krasucki F., Cholewa A.: Badania struktury doziemień w kopalnianych sieciach elektroenergetycznych 6kV. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z.nr 82, Gliwice 1994.
8. Krzemień S.: Systemowo-informacyjne modele oceny stanu zagrożenia wstrząsami górniczymi w kopalniach węgla kamiennego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 198, Gliwice 1991.
9. Luce R.D., Raiffa H.: Gry i decyzje. PWE, Warszawa 1964.
10. Przybyła H.: Modelowe ujęcia procesu decyzyjnego związanego z wyborem układu techniczno-organizacyjnego dla wyrobisk wybierkowych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z.nr 159, Gliwice 1987.
11. Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Skrypt Pol. Śl. nr 1420, Gliwice 1988.
12. Tyszka T.: Konflikty i strategie. WNT, Warszawa 1978.
13. Wcisło M.: Studium doboru kadr kierowniczych w kopalni węgla kamiennego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 170, Gliwice 1989.
14. Williams J.D.: Strateg doskonały. Wprowadzenie do teorii gier. PWN, Warszawa 1965.

Recenzent: Dr hab. inż. Jan Kałuski,
Prof. Politechniki Śląskiej

Wpłynęło do Redakcji 28. 04. 1998 r.

Abstract

Theory of games is a little known and used a little in mining practise. Purpose of the work is to show on many examples the possibility of solving some problems in mining industry by applying the theory of games. The important problem in mining is safety work contitions for miners. Miners risk in miners' work there is a risk of occurrence many danger factors such as: underground earth tremors, flooding by water, throws of gas, methane threat, fire. These events are either difficult to foresee or to describe by mathematical formulas. One of the methods applying in these situations is the theory of games.

Making use of the theory of zero-sum games for decision making in mining has been presented in this article.

The idea of a strategy and game matrix have been discussed in chapter 2. The attention is focussed on two-person matrix games with m lines and n columns.

A principle of maxmin (minmax) has been given and a saddle point principle has been determined in the next chapter.

A domination principle and mixed strategies have been presented in the following chapter.

The last fifth chapter concerns making use of the theory of zero-sum games in mining. Five examples have been given in it: 1) power networks comparison in mines, 2) the choice of the techno-organizational system, 3) assessment of the mining tremors hazard state, 4) the choice of the candidate for the post of mine manager, 5) the choice of crumble mixture for two types of plastic consistency pump concretes.