ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 122 Nr kol. 1388

Stanisław KOWALIK

PRZYKŁADY WYKORZYSTANIA TEORII GIER NIEKOOPERACYJNYCH O SUMIE NIEZEROWEJ W GÓRNICTWIE

Streszczenie. W pracy przedstawiono podstawowe pojęcia z teorii gier niekooperacyjnych o sumie niezerowej. Określono punkt równowagi w grze niezerowej oraz podano sposoby poszukiwania rozwiązania w grach niekooperacyjnych o sumie niezerowej. Następnie podano przykłady zastosowania tej teorii w górnictwie: 1) wybór mieszaniny samozestalającej wykonanej na bazie odpadów poflotacyjnych i popiołów lotnych, 2) wybór kompozytu popiołowo-gipsowo-cementowego, 3) wybór noża skrawającego, 4) wybór noża skrawającego przy innych parametrach skrawania, 5) wybór modelu procesu flotacji cyklicznej węgla.

EXAMPLES OF THE APPLICATION OF THE THEORY NON-COOPERATIVE NON-ZERO SUM GAM ES IN MINING

Summary. In the work the basic notions of a non-cooperative non zero-sum games have been presented. In non zero-sum game the balance point has been determined and means of seeking the solution in non-cooperatiwe non zero-sum games have been given. Next, the examples of application of the theory in mining have been given: 1) the choice of stabilised backfill, 2) the choice of ashgypsum-cement mixture, 3) the choice of machine cutting knife, 4) the choice of machine cutting knife for another cutting parameters, 5) the choice of the model for the bath coal flotation process.

1. Gry niekooperacyjne

W tej pracy nasza uwaga koncentrować się będzie na sytuacji, w której występuje konflikt interesów dwu lub więcej decydentów. Każdemu z nich będzie zależało na maksymalizacji swoich zysków. W teorii gier o sumie zerowej wypłata dla jednego gracza oznaczała stratę dla drugiego. Tak więc suma wypłat dla graczy była równa zero. W grach o sumie niezerowej przyjmuje się, że wypłaty dla graczy mogą być różne. Zmiana strategii działania może spowodować zwiększenie zysków dla wszystkich graczy, może spowodować równoczesne zmniej-

szenie zysków lub zyski jednych graczy mogą być większe, a innych mniejsze. Ponieważ nie ma żadnych istotnych różnic między problemami wieloosobowymi i dwuosobowymi (poza trudnościami obliczeniowymi), będziemy więc prowadzili rozważania na przykładzie dwóch decydentów. Grę taką można przedstawić w postaci dwóch macierzy A i B [10]:

$$A = [a_{ij}] \qquad (i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n), \tag{1}$$

$$B = [b_{ij}] \qquad (i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n), \tag{2}$$

gdzie: a_{ij} oznacza wypłatę dla gracza (decydenta) pierwszego, a

b_{ij} oznacza wypłatę dla gracza (decydenta) drugiego w przypadku zastosowania strategii

α_i przez gracza pierwszego i

β_j przez gracza drugiego.

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} \beta_1 \cdots \beta_n \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} \beta_1 \cdots \beta_n \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3}$$

Grę taką można też przedstawić w postaci tablicy par liczb (a_{ij}, b_{ij}) (tzw. bimacierzy) [6], [8], [11]:

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{ccc} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix} \end{array} \tag{4}$$

Innymi słowy, można powiedzieć, że gracz pierwszy gra wierszami w swojej macierzy A, zaś gracz drugi kolumnami w macierzy B. Jak widać, wartość wygranych (a_{ij}, b_{ij}) zależy od obydwu graczy, tj. od odpowiedniego wyboru strategii α_i i β_j.

2. Rozwiązania w grach niekooperacyjnych o sumie niezerowej

Ogólnie przyjmujemy, że macierze gry A i B posiadają m wierszy i n kolumn. Rozważania będą dotyczyły strategii czystych.

Definicja 1 [5], [10]

Para strategii o wskaźnikach (i_0, j_0) stanowi rozwiązanie równowagi niekooperacyjnej w sensie Nasha w strategiach czystych dla procesu dwuosobowego o sumie niezerowej, określonego przez macierze A i B, jeżeli dla każdego wskaźnika „i" oraz „j" są spełnione nierówności:

$$a_{i_0 j_0} \geq a_{i j_0} \quad \text{i} \quad b_{i_0 j_0} \geq b_{i_0 j}, \qquad (i_0=1,\dots,m;\ j_0=1,\dots,n) \tag{5}$$

W grach o sumie niezerowej może występować kilka punktów równowagi w sensie Nasha, przy czym rezultaty w tych punktach są różne. Przy wyborze decyzji w takim przypadku można skorzystać z następującej definicji:

Definicja 2 [10]

Para strategii o wskaźnikach (i_1, j_1) jest lepsza od pary strategii określonej wskaźnikami (i_2, j_2), jeżeli:

$$a_{i_1 j_1} \geq a_{i_2 j_2} \quad \text{i} \quad b_{i_1 j_1} \geq b_{i_2 j_2}. \tag{6}$$

Przynajmniej jedna z tych nierówności musi być ostra.

Uwaga: Jeżeli zagadnienie rozpatrujemy z punktu widzenia minimalizacji kosztów, a nie maksymalizacji zysków, to znaki nierówności "≥" w powyższych wzorach należy zmienić na "≤".

Punktem równowagi w grze niekooperacyjnej nazywamy parę strategii $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$, jeżeli przy strategii partnera pierwszego α_{i_0} partner drugi osiąga maksymalny zysk stosując strategię β_{j_0} i podobnie, przy strategii partnera drugiego β_{j_0} partner pierwszy osiąga maksymalny zysk stosując strategię α_{i_0}.

Punkt równowagi jest to taka para strategii $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$, w której partnerzy stosując ją nie chcą żadnej zmiany. Jeśli partner pierwszy wybierze α_{i_0}, to dla drugiego najlepszą strategią jest β_{j_0}. Odwrotnie, gdy drugi partner wybierze β_{j_0}, to dla pierwszego najlepszą strategią jest α_{i_0}.

Jeżeli gra posiada jeden punkt równowagi, to gracze powinni stosować strategie określone przez ten punkt. Jeżeli gra posiada więcej punktów równowagi, to rozwiązanie takiej gry komplikuje się.

Przy rozwiązywaniu gier niekooperacyjnych o sumie niezerowej wykorzystuje się też pojęcia strategii dominującej i zdominowanej.

Definicja 3

Strategia k-ta dominuje nad strategią l-tą w macierzy A, jeżeli:

$$\forall_j \; a_{kj} \geq a_{lj}, \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{7}$$

Strategię k-tą nazywamy strategią dominującą nad strategią l-tą, a strategię l-tą nazywamy zdominowaną przez strategię k-tą [6], [10], [11].

Definicja 4

Strategia r-ta dominuje nad strategią s-tą w macierzy B, jeżeli:

$$\forall_i \; b_{ir} \geq b_{is}, \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{8}$$

Strategię r-tą nazywamy strategią dominującą nad strategią s-tą, a strategię s-tą nazywamy zdominowaną przez strategię r-tą [6], [10], [11].

3. Przykłady zastosowania teorii gier o sumie niezerowej w górnictwie

Przykład 1

Przykład będzie dotyczył wybrania jednej spośród ośmiu mieszanin samozestalających wykonanych na bazie odpadów poflotacyjnych i popiołów lotnych. Wybór będzie dokonywany na podstawie kryterium maksymalizacji wytrzymałości na ściskanie mieszanin samozestalających oraz maksymalizacji nośności podsadzki samozestalającej. Dane rzeczywiste do przykładu zostały zaczerpnięte z pracy [9]. Wytrzymałość różnych mieszanin była badana po 28 dniach, a nośność po 72 godzinach. Badania były przeprowadzone w dwóch wersjach: w warunkach powietrznosuchych i w komorze klimatyzacyjnej [9]. Dane liczbowe przedstawia tablica 1.

Tablica 1

Wyniki badań mieszanin podsadzki samozestalającej

Mieszanina	Warunki powietrzno suche		Komora klimatyzacyjna	
	Wytrzymałość po 28 dniach [MPa]	Nośność po 72 godz. [MPa]	Wytrzymałość po 28 dniach [MPa]	Nośność po 72 godz. [MPa]
1	0.83	0.21	1.34	0.22
2	0.69	0.12	0.55	0.07
3	0.95	0.45	1.67	0.50
4	0.89	0.23	0.69	0.15
5	0.87	>0.5	0.89	0.30
6	0.85	0.07	0.75	0.02
7	0.91	0.05	0.60	0.01
8	0.71	0.30	0.69	0.12

Źródło: pozycja literatury [9].

Dane liczbowe z tej tablicy potraktujemy jako wyniki pewnej gry dwuosobowej, niekooperacyjnej o sumie niezerowej. Gracz A będzie dysponował ośmioma strategiami $\alpha_1,\ldots,\alpha_8$, określonymi jako wybór mieszaniny samozestalającej. Graczowi A będzie zależało na maksymalizacji wytrzymałości na ściskanie mieszaniny samozestalającej. Gracz B będzie dysponował dwiema strategiami β_1 i β_2: wiązanie mieszaniny w warunkach powietrznosuchych (β_1) lub w komorze klimatyzacyjnej (β_2). Graczowi B zależy na maksymalizacji nośności podsadzki samozestalającej. Tę grę możemy zapisać w postaci:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Gracz B} \\
 & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\
\text{Gracz A} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{array} & \begin{bmatrix} (0.83, 0.21) & (1.34, 0.22) \\ (0.69, 0.12) & (0.55, 0.07) \\ (0.95, 0.45) & (1.67, 0.50) \\ (0.89, 0.23) & (0.69, 0.15) \\ (0.87, > 0.5) & (0.89, 0.30) \\ (0.85, 0.07) & (0.75, 0.02) \\ (0.91, 0.05) & (0.60, 0.01) \\ (0.71, 0.30) & (0.69, 0.12) \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{9}
$$

Jedynym punktem równowagi w tej grze w myśl definicji 1 jest para strategii (α_3, β_2), dająca wynik gry (1.67, 0.5). Jeżeli gracz A zdecyduje się na wybranie strategii α_3, to dla gracza B najlepszą strategią będzie β_2. Odwrotnie, gdy drugi partner wybierze β_2, to dla pierwszego najlepszą strategią jest α_3. Na podstawie definicji 4 stwierdzamy również, że para strategii (α_3, β_2) stanowi rozwiązanie tej gry, ponieważ:

$$\forall_i a_{32} \geq a_{i2} \quad \text{oraz} \quad \forall_j b_{32} \geq b_{3j} \tag{10}$$

Do tego samego rezultatu możemy dojść wykorzystując definicje strategii dominujących i zdominowanych. Dla gracza A mamy:

- strategia α_1 dominuje nad α_2, α_8;
- strategia α_3 dominuje nad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$;
- strategia α_4 dominuje nad α_2, α_8;
- strategia α_5 dominuje nad $\alpha_2, \alpha_6, \alpha_8$;
- strategia α_6 dominuje nad α_2, α_8;
- strategia α_7 dominuje nad α_2;
- strategia α_8 dominuje nad α_2.

Po wyeliminowaniu z gry strategii zdominowanych graczowi A została tylko jedna strategia α_3. Dla gracza B w tym przypadku lepszą strategią jest β_2, ponieważ $b_{32}>b_{31}$ (0.5>0.45). Tak więc najlepszą mieszaniną samozestalającą spośród ośmiu przebadanych jest trzecia. Na podstawie pracy [9] skład tej mieszaniny jest następujący: 40% - odpady poflotacyjne, 40% - popioły lotne, 16% - woda słona, 4% - cement 350.

Przykład 2

Przykład będzie dotyczył wybrania jednego spośród sześciu kompozytów utworzonych przez zmieszanie popiołu, gipsu i cementu z dodatkiem 3% roztworu wodnego fosforanu jednoamonowego (3% NaH_2PO_2 w stosunku do gipsu i popiołu). Dane rzeczywiste do przykładu zostały zaczerpnięte z pracy [2]. Wybór będzie dokonywany na podstawie maksymalizacji wytrzymałości na zginanie R_g oraz maksymalizacji wytrzymałościowej na ściskanie R_c. Wy-

trzymałość różnych kompozytów była badana po 14 i 28 dniach. Procentowy udział cementu, gipsu i popiołu w poszczególnych kompozytach przedstawia tablica 2.

Tablica 2

Procentowy udział cementu, gipsu i popiołu w kompozytach

Kompozyt	% cementu	% gipsu	% popiołu
1	2	49.0	49.0
2	4	48.0	48.0
3	5	47.5	47.5
4	6	47.0	47.0
5	10	45.0	45.0
6	15	42.5	42.5

Źródło: literatura [2]

Dane liczbowe przedstawia tablica 3.

Tablica 3

Wytrzymałość R_g i R_c kompozytu popiołowo-gipsowego-cementowego z dodatkiem 3% NaH_2PO_2 po 14 i 28 dniach

Kompozyt	Czas wiązania 14 dni		Czas wiązania 28 dni	
	$R_g \times 10^5$ [N.m^{-2}]	$R_c \times 10^5$ [N.m^{-2}]	$R_g \times 10^5$ [N.m^{-2}]	$R_c \times 10^5$ [N.m^{-2}]
1	9.26	20.31	16.73	34.22
2	15.58	35.87	22.34	43.43
3	28.56	43.34	29.38	46.64
4	12.77	35.87	20.12	46.67
5	14.50	25.56	18.01	30.25
6	15.03	26.40	19.03	31.25

Źródło: literatura [2]

Dane liczbowe z tej tablicy potraktujemy jako wyniki pewnej gry dwuosobowej, niekooperacyjnej o sumie niezerowej. Gracz A będzie dysponował sześcioma strategiami $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ określonymi jako wybór kompozytu. Graczowi A będzie zależało na maksymalizacji wytrzymałości na zginanie R_g. Gracz B będzie dysponował dwiema strategiami β_1 i β_2: wiązanie kompozytu przez 14 dni (β_1) lub wiązanie kompozytu przez 28 dni (β_2). Graczowi B zależy na maksymalizacji wytrzymałości na ściskanie R_c. Tę grę możemy zapisać w postaci:

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz B} \\ & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \text{Gracz A} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} & \begin{bmatrix} (9.26, 20.31) & (16.73, 34.22) \\ (15.58, 35.87) & (22.34, 43.43) \\ (28.56, 43.34) & (29.38, 46.64) \\ (12.77, 35.87) & (20.12, 46.67) \\ (14.50, 25.56) & (18.01, 30.25) \\ (15.03, 26.40) & (19.03, 31.25) \end{bmatrix} \end{array} \tag{11}$$

Jedynym punktem równowagi w tej grze w myśl definicji 1 jest para strategii (α_3, β_2), dająca wynik gry (29.38, 46.64). Jeżeli gracz A zdecyduje się na wybranie strategii α_3, to dla gracza B najlepszą strategią będzie β_2. Odwrotnie, gdy drugi partner wybierze β_2, to dla pierwszego najlepszą strategią jest α_3. Na podstawie definicji 4 stwierdzamy również, że para strategii (α_3, β_2) stanowi rozwiązanie tej gry, ponieważ:

$$\forall_i \, a_{32} \geq a_{i2} \quad \text{oraz} \quad \forall_j \, b_{32} \geq b_{3j} \tag{12}$$

Tak więc najlepszym kompozytem z sześciu podanych okazała się mieszanina 47.5% popiołu, 47.5% gipsu i 5% cementu z dodatkiem 3% roztworu wodnego fosforanu jednoamonowego 3% NaH_2PO_2.

Przykład 3

Dane do przykładu zostały wzięte z pracy [3]. Należy wybrać jeden spośród trzech noży skrawających: nóż Rapid 83, nóż AM 50/ϕ18 i nóż laboratoryjny. Pomiary siły skrawania i siły docisku były wykonane podczas skrawania piaskowca i wapienia. Zależy nam na minimalizacji siły skrawania P_s[kN] i siły docisku P_d[kN]. Zadanie traktujemy jako niekooperacyjną grę dwuosobową o sumie niezerowej. Gracz A ma do dyspozycji trzy strategie: α_1, α_2 i α_3, określone jako:

α_1 - nóż Rapid 83,

α_2 - nóż AM 50/ϕ18,

α_3 - nóż laboratoryjny.

Gracz B ma do dyspozycji dwie strategie - β_1 i β_2 - określone jako:

β_1 - skrawanie piaskowca,

β_2 - skrawanie wapienia.

Przyjęto następujące parametry skrawania:

podziałka t = 60 [mm],

głębokość skrawania g = 6 [mm],

prędkość skrawania V_s = 0.6 [m/s].

Dane liczbowe pomiarów sił P_s i P_d przedstawione są w tablicy 4.

Tablica 4

Siła skrawania i siła docisku podczas skrawania piaskowca i wapienia różnymi nożami

Rodzaj noża	Skrawanie piaskowca		Skrawanie wapienia	
	P_s [kN]	P_d [kN]	P_s [kN]	P_d [kN]
nóż Rapid 83	1.28	0.85	0.71	0.36
nóż AM 50/ϕ18	7.09	10.39	1.36	1.23
nóż laborator.	3.92	3.35	0.96	0.52

Źródło: literatura [3]

Dane liczbowe z tej tablicy przepisujemy do macierzy gry:

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz B} \\ & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \text{Gracz A} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{bmatrix} (1.28,\ 0.85) & (0.71, 0.36) \\ (7.09, 10.39) & (1.36, 1.23) \\ (3.92,\ 3.35) & (0.96, 0.52) \end{bmatrix} \end{array} \tag{13}$$

Jedynym punktem równowagi w tej grze i zarazem rozwiązaniem jest para strategii (α_1, β_2), dająca wynik gry (0.71, 0.36). Strategia α_1 wskazuje, że należy wybrać nóż Rapid 83.

Przykład 4

Rozważymy ponownie przykład 3, tylko z innymi parametrami skrawania.

Przyjęto następujące parametry skrawania:

podziałka t = 20 [mm],

głębokość skrawania g = 18 [mm],

prędkość skrawania V_s = 0.6 [m/s].

Dane liczbowe pomiarów sił P_s i P_d przedstawione są w tablicy 5.

Tablica 5

Siła skrawania i siła docisku podczas skrawania piaskowca i wapienia różnymi nożami

Rodzaj noża	Skrawanie piaskowca		Skrawanie wapienia	
	P_s [kN]	P_d [kN]	P_s [kN]	P_d [kN]
nóż Rapid 83	4.07	2.63	1.44	0.51
nóż AM 50/ϕ18	9.00	11.68	1.91	1.48
nóż laborator.	4.74	4.24	1.92	0.49

Źródło: literatura [3]

Dane liczbowe z tej tablicy przepisujemy do macierzy gry:

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz B} \\ & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \text{Gracz A} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{bmatrix} (4.07,\ 2.63) & (1.44, 0.51) \\ (9.00, 11.68) & (1.91, 1.48) \\ (4.74,\ 4.24) & (1.92, 0.49) \end{bmatrix} \end{array} \tag{14}$$

Jedynym punktem równowagi w tej grze i zarazem rozwiązaniem jest para strategii (α_1, β_2), dająca wynik gry (1.44, 0.51). Strategia α_1 wskazuje, że należy wybrać nóż Rapid 83.

Przykład 5

Należy ocenić, które spośród sześciu modeli dobrze opisują proces flotacji cyklicznej węgla. Dane do przykładu wzięto z pracy [4]. Przeprowadzono w tym celu dziesięć eksperymentów. Wykonano badania eksperymentalne w maszynce laboratoryjnej o pojemności 30 l. Maszynka ta wyposażona była w dodatkowy zbiornik do stabilizacji poziomu mętów. Zbiornik ten wypełniony był wodą z dodatkiem odczynnika pianotwórczego o odpowiadającej dawce D_{op}. Próbka węgla o odpowiedniej masie była mieszana przez około 15 min. Na 2-3 min przed rozpoczęciem eksperymentu do zawiesiny wprowadzono wymagane dawki odczynnika pianotwórczego i kolektora. Jako kolektora użyto oleju napędowego, jako odczynnik pianotwórczy zastosowano mieszaninę węglowodorów C_5 - C_{10} o nazwie handlowej AC. Eksperymenty prowadzono dla różnych dawek odczynników flotacyjnych i natężenia dopływu powietrza aeracyjnego [4]. Wyniki badań przedstawia tablica 6.

Tablica 6

Wyniki badań kinetyki flotacji dla różnych dawek odczynników flotacyjnych

Nr modelu	1	2	3	4	5	6
Nr eksperym.	var wr	var wr	var wr	var wr	var wr	var wr
1	348 1026	39 133	149 202	146 479	29 101	46 84.3
2	3596 15050	405 211	806 3700	1072 3855	45 227	32 302
3	3745 15604	259 1640	539 26016	897 3535	41 32.2	38 227
4	892 2399	600 4522	642 1244	718 1252	1122 115	642 1230
5	2699 11205	1347 49285	1024 5814	1248 2604	2556 302.3	253 21.58
6	1041 539	1041 544	1189 1021	1153 1019	836 300	196 54.45
7	5761 20863	49 136	299 10076	2616 9269	164 450	76 907

cd. tablicy 6

8	8260 38267	794 113	1778 13009	2971 44099	701 4418	308 6524
9	3380 4745	3380 4265	4195 6186	5397 9329	2755 542	242 436
10	13597 21100	13597 16673	15796 22914	14500 23782	11535 2128	2114 7403

Źródło: literatura [4]

Dane pomiarowe wydzielania się masy koncentratu w N momentach czasu zostały podzielone na dwa zbiory: „uczący" o liczebności L (służący do wyznaczania parametrów modelu) i „testujący" o liczebności N-L (służący do weryfikacji wyznaczonego modelu).

Jako kryteria oceny modelu przyjęto wielkości var i wr określone na podstawie wzorów:

$$var = \sum_{i=1}^{L} [m(t_i) - \overline{m_1}]^2 / L, \tag{15}$$

$$wr = \sum_{j=1}^{N-L} [m(t_j) - \overline{m_2}]^2 / (N - L). \tag{16}$$

Przyjęto tu następujące oznaczenia:

$m(t_i)$ - i-ty wynik pomiaru masy koncentratu zaliczany do zbioru uczącego,

$m(t_j)$ - j-ty wynik pomiaru masy koncentratu zaliczany do zbioru testującego,

$\overline{m_1}$ - wartość średnia wyników zbioru uczącego,

$\overline{m_2}$ - wartość średnia wyników zbioru testującego.

Wyboru modelu dokonuje się na podstawie wyników wr i var. Za lepszy uważa się model, dla którego wartość wr i var jest mniejsza [4].

Na podstawie liczb z tablicy 6 tworzymy macierz dwuosobowej niekooperacyjnej gry o sumie niezerowej. Gracz A ma do dyspozycji dziesięć strategii $\alpha_1,...,\alpha_{10}$, określonych jako numer eksperymentu. Gracz B będzie dysponował sześcioma strategiami $\beta_1,...,\beta_6$ określonymi jako numer modelu. Graczowi A zależy na minimalizacji var, a graczowi B zależy na minimalizacji wr. Macierz gry przedstawia się następująco:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
(348, 1026) & (39, 133) & (149, 479) & (146, 479) & (29, 101) & (46, 84.3) \\
(3596, 15050) & (405, 211) & (806, 3700) & (1072, 3855) & (45, 227) & (32, 302) \\
(3745, 15604) & (259, 1640) & (539, 26016) & (897, 3535) & (41, 32.2) & (38, 227) \\
(892, 2399) & (600, 4522) & (642, 1244) & (718, 1252) & (1122, 115) & (642, 1230) \\
(2699, 11205) & (1347, 49285) & (1024, 5814) & (1248, 2604) & (2256, 302.3) & (253, 2158) \\
(1041, 539) & (1041, 544) & (1189, 1021) & (1153, 1019) & (836, 300) & (196, 54.45) \\
(5761, 20863) & (49, 136) & (299, 10076) & (2616, 9269) & (164, 450) & (76, 907) \\
(8260, 38267) & (794, 113) & (1778, 13009) & (2971, 44099) & (701, 4418) & (308, 6524) \\
(3380, 4745) & (3380, 4265) & (4195, 6186) & (5397, 9329) & (2755, 542) & (242, 436) \\
(13597, 21100) & (13597, 16673) & (15796, 22914) & (14500, 23782) & (11535, 2128) & (2114, 7403)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zauważamy, że strategia α_1 dominuje nad strategiami α_4, α_5, α_6, α_7, α_8, α_9, α_{10}. Po wyeliminowaniu z gry strategii α_4, α_5, α_6, α_7, α_8, α_9, α_{10} okazuje się, że jeszcze strategia β_6 dominuje nad strategiami β_1, β_3 i β_4. Po wyeliminowaniu wszystkich strategii zdominowanych otrzymujemy zredukowaną macierz gry.

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \text{Gracz A} \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{Gracz B} \\
\begin{array}{ccc} \beta_2 & \beta_5 & \beta_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}
\begin{bmatrix}
(39, 133) & (29, 101) & (46, 84.3) \\
(405, 211) & (45, 227) & (32, 302) \\
(259, 1640) & (41, 32.2) & (38, 227)
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{16}
$$

Sprawdzamy, czy w tej grze jest punkt równowagi w strategiach czystych. Okazuje się, że nie. Ponieważ w tej grze faktycznie biorą udział tylko strategie β_2, β_5 i β_6, oznacza to, że najlepszymi modelami są modele o numerach 2, 5 i 6. Potwierdzają to także autorzy pracy [4].

LITERATURA

1. Fudenberg D., Tirole J.: Game Theory. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England 1995.
2. Janiczek S., Boryczko J., Majchrzak R.: Mineralne kompozyty na osnowie aktywizowanych popiołów lotnych w technice górniczej. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 107, Gliwice 1981.
3. Jonak J.: Wpływ wybranych parametrów noży urabiających na efekty urabiania skał. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 218, Gliwice 1994.
4. Kalinowski K., Kaczmarzyk J.: Modele matematyczne flotacji cyklicznej węgla. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 231, Gliwice 1996.

5. Kałuski J.: Podstawy teorii gier. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Skalmierskiego, Gliwice 1996.
6. Kofler E.: Wstęp do teorii gier. PZWS, Warszawa 1963.
7. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji w górnictwie w warunkach niepewności. Zesz. Nauk. Pol. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 228, Gliwice 1996.
8. Luce R.D., Raiffa H.: Gry i decyzje. PWE, Warszawa 1964.
9. Plewa F., Mysłek Z.: Wpływ zasolonych wód dołowych na własności podsadzki samozestalającej. Zesz. Nauk. Poł. Śl. ser. Górnictwo, z. nr 222, Gliwice 1994.
10. Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Skrypt Pol. Śl. nr 1420, Gliwice 1988.
11. Tyszka T.: Konflikty i strategie. WNT, Warszawa 1978.
12. Williams J.D.: Strateg doskonały. Wprowadzenie do teorii gier. PWN, Warszawa 1965.

Recenzent: Dr hab. inż. Jan Kałuski,
Prof. Politechniki Śląskiej

Wpłynęło do Redakcji 28. 04. 1998 r.

Abstract

Application of the theory of non-cooperative nonzero-sum games in mining has been presented in this work. Theory of games is little known and little used in mining practice. Some problem in mining industry can be solved by applying this theory. Examples have been presented in this work. In the nonzero-sum games players try to obtain maximum profits. The change of strategy can cause an increase of profits for all the players or it can cause simultaneous decrease of profits for all the players or the profits of some players can be greater and of other players - lower.

The attention in the work is focused on two-person matrix games with m lines and n columns.

The idea of the balance point of nonzero-sum game has been discussed in chapter 2.

The searches for solution in non-cooperative nonzero-sum games have been presented in chapter 3.

The last fourth chapter concerns making use of the theory of non-cooperative nonzero-sum games in mining. Five examples have been given in that chapter: 1) the choice of stabilised backfill, 2) the choice of ash-gypsum-cement mixture, 3) the choice of machine cutting knife, 4) the choice of machine cutting knife for another cutting parameters, 5) the choice of the model for the bath coal flotation process.