ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 123 Nr kol. 1389

Robert JANCZEWSKI
Politechnika Gdańska

EFEKTYWNE WYZNACZANIE OPTYMALNEGO ROZWIĄZANIA PROBLEMU PRZYDZIAŁU CZĘSTOTLIWOŚCI DLA NIEKTÓRYCH KLAS GRAFÓW INTERFERENCJI

Streszczenie. Problem przydziału częstotliwości można zdefiniować następująco. Na pewnym obszarze znajdują się nadajniki, którym trzeba przydzielić częstotliwości tak, aby nie zakłócały się podczas nadawania. To zagadnienie modeluje się na gruncie teorii grafów za pomocą dwóch pojęć: T-kolorowania i grafu interferencji. W niniejszej pracy przedstawimy wielomianowy algorytm generujący optymalne T-pokolorowania dla pewnej klasy grafów interferencji, zawierającej w sobie m.in. kaktusy i drzewa wielokątowe.

EFFICIENT FINDING OF AN OPTIMAL SOLUTION OF THE FREQUENCY ASSIGNMENT PROBLEM FOR SOME CLASSES OF INTERFERENCE GRAPHS

Summary. The frequency assignment problem can be defined as follows. There are several transmitters situated in a region. To each transmitter a channel is to be assigned in such a way that no two of them interfere during transmitting. This problem can be formulated in terms of T-colorings of graphs and interference graphs. In this paper we present a polynomial algorithm for finding optimal T-colorings for a special class of interference graphs containing cacti and polygon trees.

1. Wprowadzenie

Przypuśćmy, że na pewnym obszarze znajduje się grupa nadajników radiowych, którym trzeba przydzielić częstotliwości w taki sposób, aby nie zakłócały się podczas nadawania. Powstają naturalne pytania — jak to zrobić? Jaka będzie minimalna szerokość wykorzystanego pasma częstotliwości? Tak sformułowane zagadnienie to tzw. *problem przydziału częstotliwości*.

Rozwiązaniem tego problemu jest dowolna funkcja przyporządkowująca nadajnikom częstotliwości w taki sposób, aby nie zakłócały się podczas nadawania. Rozwiązanie nazwiemy *optymalnym*, gdy szerokość wykorzystanego przez nie pasma częstotliwości będzie najmniejsza z możliwych. Łatwo jest znaleźć jakieś rozwiązanie tytułowego problemu, ale

trudno jest znaleźć chociaż jedno optymalne — wyszukiwanie optymalnych rozwiązań to już zagadnienie *NP*-trudne [3].

Problem przydziału częstotliwości łatwo modeluje się na gruncie teorii grafów — wystarczy zastąpić rzeczywiste częstotliwości liczbami całkowitymi, utworzyć odpowiedni zbiór odległości zakazanych oraz graf interferencji, a następnie znaleźć przynajmniej jedno z optymalnych T-pokolorowań tego grafu. Dysponując takim pokolorowaniem, można odpowiedzieć na obydwa postawione na początku tego punktu pytania.

W dalszej części niniejszej pracy będziemy zajmować się tylko tym modelem i jego własnościami. Zaczniemy od przypomnienia definicji podstawowych pojęć w nim występujących — grafu interferencji, zbioru odległości zakazanych, T-pokolorowania i T-rozpiętości grafu — oraz ich związków z naszym problemem. Następnie zdefiniujemy tzw. grafy kolczaste i omówimy ich własności. Na końcu podamy wzór pozwalający efektywnie wyznaczać T-rozpiętości grafów kolczastych i opiszemy algorytm generowania optymalnych T-pokolorowań dla tych grafów.

2. Podstawowe definicje

Grafem interferencji nazywamy graf, którego wierzchołkami są wspomniane nadajniki, a krawędzie łączą tylko te z nich, które mogłyby zakłócać się (interferować z sobą) podczas nadawania, gdyby przydzielić im te same lub zbliżone częstotliwości. W strukturze tego grafu zawarte są informacje o wzajemnym położeniu nadajników i innych czynnikach mogących mieć wpływ na zjawisko interferencji. Grafy interferencji będziemy oznaczali symbolami G, G_1 i G_2, zbiory ich wierzchołków odpowiednio symbolami V, V_1 i V_2, a zbiory krawędzi E, E_1 i E_2.

Zbiór odległości zakazanych T to dowolny skończony, niepusty i zawierający 0 podzbiór zbioru liczb całkowitych nieujemnych. Zbiór odległości zakazanych dobiera się tak, aby spełnienie warunku $|i-j| \notin T$ gwarantowało nam, że można bezpiecznie — bez interferencji — przydzielić dowolnej parze nadajników częstotliwości i, j.

T-pokolorowaniem grafu G nazywamy dowolną funkcję $c: V \to Z$, która wierzchołkom sąsiadującym przyporządkowuje liczby całkowite o odległości nie należącej do zbioru odległości zakazanych T. Konkretne pokolorowanie grafu interferencji jest odpowiednikiem rozwiązania problemu przydziału częstotliwości. Przypomnijmy, że liczby, jakie pokolorowania przypisują wierzchołkom, nazywamy *kolorami*.

Rozpiętością T-pokolorowania c nazywamy liczbę $sp(c) = \max\{|c(u)-c(v)|: u,v \in V\}$. Odpowiednikiem rozpiętości pokolorowania w tytułowym problemie jest rozpiętość wykorzystanego pasma częstotliwości. *T-rozpiętością grafu G*, oznaczaną symbolem $sp_T(G)$, nazywamy najmniejszą z rozpiętości jego T-pokolorowań. T-pokolorowanie c jest *optymalne*, wtedy i tylko wtedy, gdy $sp(c) = sp_T(G)$. Jasne jest, że pokolorowania optymalne są odpowiednikami optymalnych rozwiązań problemu przydziału częstotliwości.

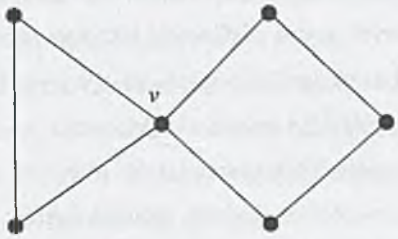
3. Grafy kolczaste

Aby móc poprawnie zdefiniować klasę grafów kolczastych, musimy wprowadzić dwie pomocnicze operacje — sklejenie przez wierzchołek i sklejenie przez krawędź.

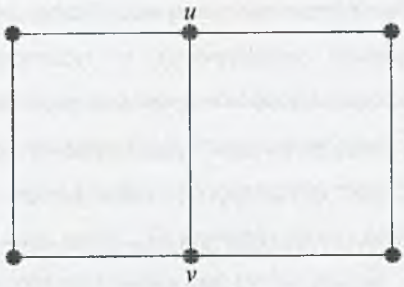
Niech G_1, G_2 będą grafami posiadającymi dokładnie jeden wierzchołek wspólny v. Powiemy, że graf G powstał w wyniku *sklejenia grafów* G_1, G_2 *przez wierzchołek* v, wtedy i tylko wtedy, gdy $V = V_1 \cup V_2$ i $E = E_1 \cup E_2$. Dla przykładu graf z rysunku 1 powstał w wyniku sklejenie dwóch cykli przez wierzchołek v.

Graf G powstały na skutek sklejenia dwóch grafów przez wspólny wierzchołek łatwo jest narysować. Wystarczy na osobne kartki papieru nanieść sklejane grafy G_1, G_2, a następnie nałożyć kartki na siebie tak, aby pokrył się tylko wspólny wierzchołek v. Na otrzymanym rysunku będzie znajdował się graf G.

Niech G_1, G_2 będą grafami posiadającymi dokładnie dwa wierzchołki wspólne u, v. Załóżmy także, że wierzchołki te sąsiadują z sobą w obydwu rozważanych grafach. Powiemy, że graf G powstał w wyniku *sklejenia grafów* G_1, G_2 *przez krawędź* $\{u, v\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = V_1 \cup V_2$ i $E = E_1 \cup E_2$. Dla przykładu graf z rysunku 2 powstał na skutek sklejenia dwóch cykli przez krawędź $\{u, v\}$.



Rys.1. Kaktus, który powstał w wyniku sklejenia dwóch cykli przez wierzchołek v
Fig.1. A cactus created by concatenation of two cycles by vertex v



Rys.2. Drzewo wielokątowe powstałe w wyniku sklejenia dwóch cykli przez krawędź $\{u,v\}$
Fig.2. A polygon tree created by concatenation of two cycles by the $\{u,v\}$ edge

Graf G powstały na skutek sklejenia dwóch grafów przez wspólną krawędź można łatwo narysować, stosując metodę podobną do podanej wcześniej przy operacji sklejania przez wierzchołek. Wystarczy na osobne kartki nanieść sklejane grafy G_1, G_2, a następnie nałożyć kartki na siebie tak, aby pokryła się tylko wspólna krawędź $\{u, v\}$. Na otrzymanym rysunku będzie znajdować się graf G.

Przyjmijmy następującą umowę. Pisząc, że graf G powstał w wyniku *sklejenia grafów*, będziemy mieli na myśli, że powstał w wyniku sklejenia przez wierzchołek lub krawędź.

Dysponując już pojęciem sklejenia grafów, możemy zdefiniować klasę grafów kolczastych jako najmniejszą klasę grafów zawierającą w sobie wszystkie cykle, ścieżki i zamkniętą ze względu na operację sklejania grafów.

Z powyższej definicji wynika od razu, że grafy przedstawione na rysunkach 1 i 2 to grafy kolczaste. Nietrudno jest także zauważyć, że każde drzewo i kaktus jest grafem kolczastym. Drzewo jest grafem kolczastym, bo można je utworzyć sklejając przez wierzchołek pewną liczbę ścieżek. Kaktus jest grafem kolczastym, bo jak wykazano w raporcie [2], można go utworzyć sklejając przez wierzchołek pewną liczbę cykli i ścieżek.

Inny przykład grafów kolczastych stanowią tzw. drzewa wielokątowe (patrz np. [4]). Klasę drzew wielokątowych można zdefiniować jako najmniejszą klasę grafów zawierającą w sobie wszystkie cykle i zamkniętą ze względu na operację sklejania grafów przez krawędź. Graf z rysunku 2 stanowi przykład drzewa wielokątowego.

Grafy kolczaste mają kilka interesujących własności. Po pierwsze, wszystkie grafy kolczaste są spójne, bo w wyniku sklejania spójnych grafów otrzymujemy grafy spójne. Po drugie, podgraf grafu kolczastego jest grafem kolczastym, wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny. Po trzecie, każdy niepusty graf kolczasty jest dwudzielny lub trójdzielny. Po czwarte,

każdy graf kolczasty można otrzymać w wyniku sklejenia skończonej liczby cykli i ścieżek. Ten ostatni fakt będzie miał dla nas olbrzymie znaczenie.

4. Optymalne kolorowanie cykli

Jak to zostanie pokazane w punkcie następnym, zagadnienie wyznaczania T-rozpiętości dowolnego grafu kolczastego można sprowadzić do wyznaczania T-rozpiętości cykli i to w taki sposób, że jeżeli będziemy potrafili efektywnie obliczać T-rozpiętość cykli, to będziemy potrafili efektywnie wyznaczać T-rozpiętości wszystkich grafów kolczastych. W niniejszym punkcie wykażemy, że zarówno T-rozpiętość, jak i formuła opisująca optymalne T-pokolorowanie dowolnego cyklu mogą być wyznaczone w stałym (niezależnym od liczby jego wierzchołków) czasie!

Cykle parzyste, jako grafy dwudzielne, mają rozpiętość równą $\min \overline{T}$, gdzie $\overline{T} = N \setminus T$ jest uzupełnieniem zbioru odległości zakazanych T. Optymalne pokolorowanie skonstruować można następująco — wystarczy uporządkować wierzchołki w takiej kolejności, w jakiej występują w cyklu i cyklicznie kolorować wierzchołki o nieparzystych numerach kolorem 0, a wierzchołki o parzystych numerach kolorem $\min \overline{T}$.

Cykle nieparzyste stanowią daleko trudniejszy przypadek. Jak wykazano w raporcie [2], ciąg T-rozpiętości $sp_T(C_{2n+1})$ jest nierosnący, ograniczony z dołu i stały począwszy od $n = \lceil |T|/2 \rceil$. Zatem, aby wyznaczyć T-rozpiętość dowolnego cyklu nieparzystego, wystarczy znać T-rozpiętości cykli nieparzystych posiadających $3, 5, \ldots, 2\lceil |T|/2 \rceil - 1$ i $2\lceil |T|/2 \rceil + 1$ wierzchołków. Zauważmy, że liczba tych cykli jest zależna tylko od mocy zbioru odległości zakazanych T. Zatem kolorując je optymalnie dowolną metodą, możemy uzyskać T-rozpiętość dowolnego cyklu w czasie niezależnym od liczby jego wierzchołków. Co więcej, znając te pokolorowania, możemy skonstruować optymalne T-pokolorowanie dla dowolnego większego cyklu, stosując metodę wydłużania pokolorowania opisaną poniżej.

Istotne znaczenie w dalszych rozważaniach będzie miało następujące zagadnienie. Powiedzmy, że dysponujemy pewnym T-pokolorowaniem cyklu C_{2n+1}. Powstaje pytanie — czy istnieje T-pokolorowanie cyklu $C_{2n+2l+1}$ o tej samej rozpiętości korzystające z tych samych kolorów co dane pokolorowanie? Okazuje się, że odpowiedź jest zawsze twierdząca, a to pokolorowanie można skonstruować następująco. Wystarczy ponumerować wierzchołki większego z rozważanych cykli w takiej kolejności, w jakiej występują w cyklu, pierwsze

$2n+1$ z nich pokolorować tak, jakby były w mniejszym z rozważanych cykli, a pozostałe cyklicznie kolorować kolorami, jakie otrzymały wierzchołki o numerach $2n$ i $2n+1$.

5. T-rozpiętość dowolnego grafu kolczastego

Grafy kolczaste będące grafami dwudzielnymi niepustymi mają rozpiętość równą $\min \overline{T}$ i koloruje się je tak, jak wszystkie inne grafy dwudzielne. Dlatego też w dalszych rozważaniach skupimy się na grafach kolczastych, które nie są dwudzielne.

Załóżmy, że G jest grafem kolczastym. Wiadomo wówczas, że G powstał na skutek sklejenia pewnej skończonej liczby ścieżek i cykli. Jeżeli G nie jest grafem dwudzielnym, to co najmniej jeden z tych cykli jest nieparzysty. Niech $2l+1$ będzie liczbą wierzchołków najmniejszego z cykli nieparzystych, z których powstał rozważany graf G. Wykażemy, że

$$sp_T(G) = sp_T(C_{2l+1})$$

To, że T-rozpiętość cyklu C_{2l+1} nie przekracza T-rozpiętości danego grafu, jest oczywiste, bo ten cykl jest podgrafem grafu G. Wystarczy zatem pokazać, że istnieje T-pokolorowanie grafu G o rozpiętości równej $sp_T(C_{2l+1})$.

Konstrukcję tego pokolorowania poprzedzimy wprowadzeniem pewnych oznaczeń. Niech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ będzie ciągiem ścieżek i cykli, z których sklejenia powstał graf G, ustawionych w takiej kolejności, w jakiej trzeba je sklejać, aby otrzymać graf G. Niech c będzie optymalnym T-pokolorowaniem cyklu C_{2l+1}.

Jeżeli graf G_1 jest dwudzielny, tzn. jest ścieżką lub cyklem parzystym, to wybieramy dowolne dwa z kolorów przydzielonych przez pokolorowanie c sąsiadującym wierzchołkom i kolorujemy nimi rozważany graf następująco — dzielimy zbiór wierzchołków na dwa zbiory tak, aby wierzchołki należące do tego samego zbioru nie sąsiadowały z sobą, a następnie wierzchołki pierwszego zbioru kolorujemy pierwszym z wybranych kolorów, a wierzchołki z drugiego zbioru drugim z wybranych kolorów. Jeżeli graf G_1 nie jest dwudzielny, to musi być cyklem nieparzystym o liczbie wierzchołków nie mniejszej niż $2l+1$. Kolorujemy go pokolorowaniem c wydłużonym tak, jak to opisano w punkcie poprzednim. Oczywiste jest, że w każdym przypadku otrzymamy legalne T-pokolorowanie grafu G_1 o rozpiętości nie przekraczającej rozpiętości pokolorowania c, tj. liczby $sp_T(C_{2l+1})$.

Załóżmy, że pokolorowaliśmy już graf powstały przez sklejenie grafów $G_1, G_2, \ldots, G_s$, gdzie $s < k$. Pokażemy, jak wydłużyć to pokolorowanie na graf powstały przez doklejenie

jeszcze jednego grafu — grafu G_{s+1}. Oczywiste jest, że wystarczy tylko wskazać sposób pokolorowania nowych wierzchołków.

Jeżeli G_{s+1} jest grafem dwudzielnym, to sposób kolorowania zależy od tego, czy doklejamy go przez krawędź, czy wierzchołek. Jeżeli doklejamy go przez krawędź $\{u, v\}$, to wystarczy wziąć kolory przydzielone już wierzchołkom u i v i pokolorować pozostałą część tego grafu tak, jak opisano to w przypadku dwudzielnego grafu G_1. Jeżeli doklejamy go przez wierzchołek u, to kolor c_i przydzielony wierzchołkowi u spełnia równanie $c_i = c(v)$, gdzie v jest jednym z wierzchołków cyklu C_{2l+1}. Wystarczy teraz wziąć kolor c_i oraz kolor przydzielony przez c dowolnemu sąsiadowi wierzchołka v i pokolorować pozostałą część tego grafu tak, jak opisano to w przypadku dwudzielnego grafu G_1.

Jeżeli G_{s+1} nie jest dwudzielny, to musi być cyklem nieparzystym o liczbie wierzchołków nie mniejszej niż $2l+1$. Niezależnie od tego, czy doklejamy rozważany graf przez wierzchołek, czy przez krawędź, to jego częściowe pokolorowanie (pokolorowany jest już jeden wierzchołek lub dwa) da się zawsze wydłużyć, do pokolorowania będącego wydłużeniem pokolorowania c. Wykorzystując to pokolorowanie kolorujemy pozostałą część rozważanego grafu.

W obydwu przypadkach otrzymamy legalne T-pokolorowanie grafu powstałego przez sklejenie grafów $G_1, G_2, \ldots, G_{s+1}$. Co więcej, jego rozpiętość nie przekroczy $sp_T(C_{2l+1})$. Wykonując powyższy krok $k-1$ razy, otrzymamy szukane pokolorowanie.

Powyższe rozumowanie zawiera w sobie opis algorytmu, który optymalnie koloruje wszystkie grafy kolczaste. Po pierwsze, należy sprawdzić, czy dany graf kolczasty jest dwudzielny i jeżeli jest, to zastosować dowolny algorytm do optymalnego kolorowania grafów dwudzielnych. Jeżeli nie jest grafem dwudzielnym, to należy rozłożyć go na cykle i ścieżki, z których sklejenia powstaje, wyznaczyć liczbę l oraz optymalne T-pokolorowanie cyklu C_{2l+1}. Następnie stosując metodę opisaną powyżej kolorujemy dany graf. Wszystkie kroki wykonywane w powyższym algorytmie mają złożoność wielomianową, więc i sam algorytm ma złożoność wielomianową.

LITERATURA

1. Cozzens M.B., Roberts F.S.: T-Colorings of graphs and the channel assignment problem. Congressus Numerantium 35, 1982, pp. 191-208
2. Janczewski R.: Wielomianowy algorytm optymalnego T-kolorowania kaktusów. Politechnika Gdańska, Wydział ETI, raport 31/97

3. Jansen K.: A rainbow about T-colorings for complete graphs, Disc. Math. 154 (1996), pp. 129-139
4. Peng Y.H.: On the chromatic uniqueness of certain trees of polygons, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 55 (1993), pp. 403-410

Recenzent: Prof. dr hab.inż. Jerzy Klamka

Abstract

The frequency assignment problem can be defined as follows. There are several transmitters situated in a region. To each transmitter a channel is to be assigned in such a way that no two of them interfere during transmitting. In this paper we study one of the models of the problem. The model we study is based on the notions of T-colorings and interference graphs. Given a finite set T of nonnegative integers containing $\{0\}$, a T-coloring of graph $G=(V,E)$ is an integer function c defined on the vertex set of G, such that if $\{u,v\}\in E(G)$ then $|c(u)-c(v)|\notin T$. Interference graph is a pair (V, E), where V is a set of all transmitters and E is a set of pairs $\{u, v\}$, where u and v are transmitters that interfere. In this paper we define a new class of interference graphs, which we call thorny. Every tree, polygon tree and cacti is a thorny graph. Then we present a polynomial time algorithm for finding optimal T-colorings of thorny graphs.