ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 123 Nr kol. 1389

Tadeusz KACZOREK
Politechnika Warszawska

SŁABE DODATNIE SINGULARNE UKŁADY DYSKRETNE

Streszczenie. Wprowadzono nową klasę układów singularnych słabo dodatnich. Podano właściwości macierzy fundamentalnych oraz rozwiązań singularnych dodatnich układów dyskretnych. Sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające redukowalności słabo dodatnich układów do równoważnych dodatnich układów standardowych. Podano standardowy układ, który ma to samo rozwiązanie co singularny układ dyskretny. Sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające osiągalności i sterowalności singularnych układów dodatnich. Podano również warunki wystarczające nieosiągalności tych układów.

WEAKLY POSITIVE SINGULAR DISCRETE SYSTEMS

Summary. A new class of weakly positive singular discrete linear time-invariant systems is introduced. Some properties of the fundamental matrix and solutions of the positive singular discrete linear systems are characterised. Necessary and sufficient conditions are given under which the weakly positive system can be reduced to a standard positive system. For regular singular discrete linear system an equivalent (has the same solution) standard system is derived. Necessary and sufficient conditions are established for the reachability and controllability of the positive singular systems. Sufficient conditions are given for unreachability of the systems.

1. Wprowadzenie

Analiza singularnych dyskretnych i ciągłych układów liniowych była rozpatrywana w wielu pracach [1-5,7,10,12-19,22,23]. Właściwości macierzy fundamentalnych oraz rozwiązań singularnych układów dyskretnych zostały przedstawione w pracy [19]. Osiągalność i sterowalność singularnych układów były rozpatrywane w wielu pracach [3-5,10,22,23]. Warunki konieczne i wystarczające osiągalności i sterowalności standardowych układów dodatnich zostały podane w pracach [6,8,9,20,21]. Celem tej pracy jest wprowadzenie nowej klasy słabo dodatnich układów singularnych dyskretnych. W pracy tej zostaną przedstawione podstawowe właściwości macierzy fundamentalnych i rozwiązań tej nowej klasy układów. Zostaną podane warunki konieczne i wystarczające osiągalności i sterowalności tych układów.

2. Preliminaria

Oznaczmy przez Z_+ zbiór liczb całkowitych nieujemnych, a przez $R^{p\times q}$ zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach $p\times q$ oraz $R^p := R^{p\times 1}$. Weźmy pod uwagę dyskretny układ liniowy singularny o postaci

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i \tag{1a}$$

$$i \in Z_+$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \tag{1b}$$

przy czym $x_i \in R^n$ jest semiwektorem stanu, $u_i \in R^m$ - wektorem wymuszeń, $y_i \in R^p$ - wektorem odpowiedzi, a $E, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times m}$, z E może być singularna. Zakładamy, że

$$\det(Ez - A) \neq 0 \text{ dla pewnych } z \in \mathbf{C} \text{ (ciało liczb zespolonych)} \tag{2}$$

Układ nazywamy standardowym, jeżeli $E = I_n$ (macierz jednostkowa) oraz regularnym, jeżeli jest spełniony warunek (2). Układ (1) nazywamy singularnym, jeżeli $\det E = 0$.
Jeżeli jest spełniony warunek (2) to [12-16,19]

$$(Ez - A)^{-1} = z^{-1}\sum_{i=-\mu}^{\infty}\Phi_i z^{-i} \tag{3}$$

przy czym $\mu = \text{rząd}\, E - st.\det(Ez - A) + 1$ jest indeksem nilpotentności, a macierze fundamentalne Φ_i spełniają równość

$$E\Phi_i - A\Phi_{i-1} = \Phi_i E - \Phi_{i-1}A = \begin{cases} I_n & dla\ i = 0 \\ 0 & dla\ i \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

oraz $\Phi_i = 0$ dla $i < -\mu$.

Jeżeli $E = I_n$, to $\Phi_i = 0$ dla $i < 0$ oraz $\Phi_i = A^i$ dla $i \geq 0$.

Lemat 1. [19] Macierze fundamentalne Φ_i spełniają zależność

$$\Phi_i E\Phi_j = \Phi_j E\Phi_i \text{ dla wszystkich } i, j \tag{5a}$$

$$\Phi_i E\Phi_j = \begin{cases} -\Phi_{i+j} & dla\ i < 0, j < 0 \\ \Phi_{i+j} & dla\ i \geq 0, j \geq 0 \\ 0 & w\ pozostałych\ przypadkach \end{cases} \tag{5b}$$

$$\Phi_i A \Phi_j = \begin{cases} -\Phi_{i+j+1} & dla\ i<0,\ j<0 \\ \Phi_{i+j+1} & dla\ i \geq 0,\ j \geq 0 \\ 0 & w\ pozostałych\ przypadkach \end{cases} \tag{5c}$$

Lemat 2. [19] Rozwiązanie x_i równania (1a) dla warunku początkowego x_0 ma postać

$$x_i = \Phi_i E x_0 + \sum_{j=0}^{i+\mu-1} \Phi_{i-j-1} B u_j \qquad i \in Z_+ \tag{6}$$

3. Wyznaczanie macierzy fundamentalnych metodą macierzy odwrotnej Drazina

Metoda wyznaczania macierzy fundamentalnych oparta na odwrotności Drazina została podana w pracy [19]. Indeksem macierzy $A \in R^{n\times n}$ nazywamy najmniejszą nieujemną liczbę całkowitą q spełniającą warunek $rząd\ A^q = rząd\ A^{q+1}$. Definicję macierzy odwrotnej Drazina A^D macierzy $A \in R^{n\times n}$ oraz metody jej obliczenia podano w [10]. Macierz odwrotna Drazina A^D istnieje dla każdej macierzy kwadratowej A i jest jedna [2,10].

Jeżeli $\det A \neq 0$, to $A^D = A^{-1}$ (7)

Jeżeli zachodzi (2), to istnieje liczba c taka, że $\det[Ec - A] \neq 0$.

Mnożąc lewostronnie (1a) przez $[Ec - A]^{-1}$, otrzymamy

$$\overline{E} x_{i+1} = \overline{A} x_i + \overline{B} u_i \qquad i \in Z_+ \tag{8}$$

przy czym

$$\overline{E} := [Ec - A]^{-1} E, \qquad \overline{A} := [Ec - A]^{-1} A, \qquad \overline{B} := [Ec - A]^{-1} B \tag{9}$$

Łatwo wykazać, że [19]

$$\overline{E}\,\overline{A} = \overline{A}\,\overline{E},\ \overline{E}^D \overline{A} = \overline{A} \overline{E}^D,\ \overline{A}^D \overline{E} = \overline{E}\,\overline{A}^D,\ \overline{E}^D \overline{A}^D = \overline{A}^D \overline{E}^D \tag{10}$$

$$\left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\overline{A}^D \overline{A} = \left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)$$

Twierdzenie 1. Macierz fundamentalna Φ_i układu (1) jest określona zależnością

$$\Phi_i = \begin{cases} \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^i \overline{E}^D [Ec - A]^{-1}\ dla\ i \geq 0 \\ \left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\left(\overline{E}\,\overline{A}^D\right)^{-(i+1)} \overline{A}^D [Ec - A]^{-1}\ dla - \mu \leq i \leq 0 \end{cases} \tag{11}$$

Dowód. Wykażemy, że Φ_i określoną przez (11) spełnia równość (4). Korzystając z (11) dla $i = 0$ oraz $i = -1$ otrzymamy

$$\Phi_0 E - \Phi_{-1} A = \overline{E}^D \overline{E} - \left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\overline{A}^D \overline{A} = \overline{E}^D \overline{E} - \left(\overline{E}^D \overline{E} - I_n\right) = I_n$$

ponieważ $\left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\overline{A}^D \overline{A} = \left(\overline{E}^D \overline{E} - I_n\right)$. Zatem równość (4) jest spełniona dla $i = 0$.

Korzystając z (11) dla $i > 0$ otrzymamy

$$\Phi_i E - \Phi_{i-1} A = \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^i \overline{E}^D \overline{E} - \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^{i-1} \overline{E}^D \overline{A} = \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^{i-1} \overline{A}\overline{E}^D \overline{E}\overline{E}^D - \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^{i-1} \overline{E}^D \overline{A} = 0$$

gdyż $\overline{A}\overline{E}^D \overline{E}\overline{E}^D = \overline{A}\overline{E}^D = \overline{E}^D \overline{A}$.

Dla i<0 mamy

$$\Phi_i E - \Phi_{i-1} A = \left(\overline{E}\overline{E}^D - I_n\right)\left(\overline{E}\overline{A}^D\right)^{-(i+1)} \overline{A}^D \overline{E} - \left(\overline{E}\overline{E}^D - I_n\right)\left(\overline{E}\overline{A}^D\right)^{-i} \overline{A}^D \overline{A} = 0$$

gdyż $\overline{A}^D \overline{E} = \overline{E}\overline{A}^D \overline{A}^D \overline{A}$. □

Z zależności (11) mamy

Wniosek.

$$\Phi_i = \begin{cases} \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^i \Phi_0 = \left(\Phi_0 A\right)^i \Phi_0 & dla\ i \geq 0 \\ \left(\overline{E}\,\overline{A}^D\right)^{-(i+1)} \Phi_{-1} = \left(-\Phi_{-1} E\right)^{-(i+1)} \Phi_{-1} & dla\ i < 0 \end{cases} \tag{11'}$$

Dowód. Z (11) dla $i = 0$ mamy $\Phi_0 = \overline{E}^D [Ec - A]^{-1}$ oraz

$$\Phi_i = \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^i \overline{E}^D [Ec - A]^{-1} = \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^i \Phi_0 = \left(\Phi_0 A\right)^i \Phi_0 \text{ dla } i \geq 0$$

gdyż $\overline{E}^D \overline{A} = \overline{E}^D [Ec - A]^{-1} A = \Phi_0 A$.

Podobnie z (11) dla $i = -1$ mamy $\Phi_{-1} = \left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\overline{A}^D [Ec - A]^{-1}$ oraz korzystając z (10) otrzymamy

$$\Phi_i = \left(\overline{E}\,\overline{A}^D\right)^{-(i+1)} \left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\overline{A}^D [Ec - A]^{-1} = \left(\overline{E}\,\overline{A}^D\right)^{-(i+1)} \Phi_{-1} = \left(-\Phi_{-1} E\right)^{-(i+1)} \Phi_{-1} \qquad \square$$

Korzystając z (11'), możemy wyznaczyć Φ_i, znając Φ_0 oraz Φ_{-1}.

Przykład 1. Korzystając z (11), należy wyznaczyć macierze fundamentalne Φ_i dla układu (1) z

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku dla $c = 0$ otrzymamy

$$\overline{E} = [Ec - A]^{-1} E = [-A]^{-1} E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = [Ec - A]^{-1} A = [-A]^{-1} A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\overline{E}^D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^D = \overline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Korzystając z (11) otrzymamy

$$\Phi_i = \left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^i \overline{E}^D [Ec - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dla } i \geq 0$$

oraz

$$\Phi_i = \left(\overline{E}\overline{E}^D - I_n\right)\left(\overline{E}\overline{A}^D\right)^{-(i+1)} \overline{A}^D [Ec - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-(i+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dla $-\mu \leq i < 0$

Zatem

$$\Phi_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \Phi_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\mu = \text{rząd}\,\overline{E} - st.\det\left[\overline{E}z - \overline{A}\right] + 1 = 2 - 1 + 1 = 2)$$

4. Właściwości macierzy fundamentalnych i rozwiązania układów słabo dodatnich

Dopuszczalnymi warunkami początkowymi nazywamy takie x_0, dla których równanie (1a) ma rozwiązanie dla zadanych wymuszeń [10].

Twierdzenie 2. Niech będzie spełniony warunek (2). Wtedy równanie (1a) oraz równanie

$$x_{i+1} = \Phi_0 A x_i + \Phi_0 B u_i + \Phi_{-1} B u_{i+1} + \cdots + \Phi_{-\mu} B u_{i+\mu} \quad i \in Z_+ \tag{12}$$

mają to samo rozwiązanie (6) dla dopuszczalnych warunków początkowych.

Dowód. Korzystając z (6) i (5) łatwo sprawdzić, że

$$\Phi_0 A x_i + \sum_{j=0}^{\mu} \Phi_{-j} B u_{i+j} = \Phi_0 A \left(\Phi_i E x_0 + \sum_{k=0}^{i+\mu-1} \Phi_{i-k-1} B u_k \right) + \sum_{j=0}^{\mu} \Phi_{-j} B u_{i+j} =$$

$$= \Phi_{i+1} E x_0 + \sum_{k=0}^{i+\mu} \Phi_{i-k} B u_k = x_{i+1}$$

Rozwiązanie (6) spełnia więc również równanie (12). □

Uwaga 1. Korzystając z $(-\Phi_{-1}E)^j\Phi_{-1} = \Phi_{-(j+1)}$ dla $j>0$ możemy równanie (12) napisać w postaci równoważnej

$$x_{i+1} = \Phi_0 A x_i + \Phi_0 B u_i + \sum_{j=0}^{\mu-1}(-\Phi_{-1}E)^j \Phi_{-1} B u_{i+j+1} \tag{12'}$$

Oznaczmy przez R_+ (R_-) przedział $[0,\infty)$ $([0,-\infty))$ oraz $R_+^n := \{x \in R^n : x_i \in R_+\}$ i $R_-^n := \{x \in R^n : x_i \in R_-\}$.

Zbiór macierzy rzeczywistych o nieujemnych elementach i wymiarach $p \times q$ oznaczać będziemy przez $R_+^{p\times q}$.

Definicja 1. Układ (1) nazywamy słabo dodatnim, jeżeli $E, A \in R_+^{n\times n}, B \in R_+^{m\times m}$, $C \in R_+^{p\times n}, D \in R_+^{p\times m}$.

Definicja 2. Układ (1) nazywamy dodatnim, jeżeli dla wszystkich $x_0 \in R_+^n$ oraz $u_i \in R_+^m$, $i \in Z_+$ mamy $x_i \in R_+^n$ oraz $y_i \in R_+^p$ dla $i \in Z_+$.

Twierdzenie 3. Macierze fundamentalne Φ_i słabo dodatniego układu (1) mają następujące właściwości:

Jeżeli $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$, to $\Phi_i \in R_+^{n\times n}$ dla $i>0$ oraz jeżeli $\Phi_{-1} \in R_-^{n\times n}$, to $\Phi_i \in R_-^n$ dla $i<1$ (13a)

Jeżeli $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$ i $\Phi_{-1} \in R_-^{n\times n}$, to macierz $G_{ij} = \begin{bmatrix} I_n, & \Phi_i A \\ -\Phi_j E, & I_n \end{bmatrix} \in R_+^{2n\times 2n}$ dla $i \geq 0$, (13b)

$j<0$ i jest odwracalna

$$G_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} I_n, & -\Phi_i A \\ \Phi_j E, & I_n \end{bmatrix} \tag{13c}$$

Dowód. Z (5c) dla $i=0$, $j \geq 0$ mamy $\Phi_{j+1} = \Phi_0 A \Phi_j$ dla $j \geq 0$. Zatem jeżeli $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$ i $A \in R_+^{n\times n}$, to $\Phi_j \in R_+^{n\times n}$ dla $j>0$. Podobnie z (5b) dla $i=-1, j<0$ mamy $-\Phi_{-1}E\Phi_j = \Phi_{j-1}$ dla $j<0$. Wobec tego jeżeli $\Phi_{-1} \in R_-^{n\times n}$, to $\Phi_i \in R_-^n$ dla $i<1$

$$\det G_{ij} = \det\begin{bmatrix} I_n, & \Phi_i A \\ -\Phi_j E, & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_n, & \Phi_i A \\ 0, & I_n + \Phi_j E \Phi_i A \end{bmatrix} = 1$$

gdyż zgodnie z (5b) $\Phi_j E \Phi_i = 0$ dla $i \geq 0, j<0$.

Łatwo sprawdzić, że $G_{ij}G_{ij}^{-1} = G_{ij}^{-1}G_{ij} = I_{2n}$, gdyż $\Phi_i A \Phi_j = 0$ i $\Phi_j E \Phi_i = 0$ dla $i \geq 0$, $j<0$.

□

Twierdzenie 4. Rozwiązanie x_i układu słabo dodatniego (1) z warunkiem początkowym $x_0 \in R_+^n$ i $u_i \in R_+^m, i \in Z_+$ ma postać

$$x_i = x_i^+ + x_i^- \tag{14}$$

przy czym

$$\text{jeżeli } \Phi_0 \in R_+^{n\times n} \text{ to } x_i^+ := \Phi_i E x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \Phi_{i-j-1} B u_j \in R_+^n \tag{15a}$$

$$\text{jeżeli } \Phi_{-1} \in R_-^{n\times n} \text{ to } x_i^- := \sum_{j=i}^{i+\mu-1} \Phi_{i-j-1} B u_j \in R_-^n \tag{15b}$$

Dowód. Dekompozycja (14) wynika natychmiast z (6). Zgodnie z (13a) jeżeli $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$, to $\Phi_i \in R_+^{n\times n}$ dla $i > 0$. Zatem dla $E \in R_+^{n\times n}, B \in R_+^{n\times m}, x_0 \in R_+^n$ i $u_j \in R_+^m$ mamy $x_i^+ = \Phi_i E x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \Phi_{i-j-1} B u_j \in R_+^n$. Biorąc pod uwagę, że jeżeli $\Phi_{-1} \in R_-^{n\times n}$, to $\Phi_i \in R_-^{n\times n}$ dla $i < 1$ otrzymamy $x_i = \sum_{j=i}^{i+\mu-1} \Phi_{i-j-1} B u_j \in R_-^n$. □

Uwaga 2. Z (15b) wynika, że jeżeli $\mu = 0$, to $x_i^- = 0$.

Wiadomo, że [10] dla każdej $E \in R^{n\times n}$, której $rząd\, E < n$, istnieje macierz nieosobliwa $T \in R^{n\times n}$ taka, że

$$\overline{E} = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1} \tag{16}$$

przy czym $J \in R^{n_1\times n_1}$ jest nieosobliwą macierzą Jordana, a $N \in R^{n_2\times n_2}$ jest macierzą nilpotentną $n = n_1 + n_2$.

Twierdzenie 5. Dla dodatniego układu singularnego (1) macierz $\Phi_{-1} A \in R_-^{n\times n}$, jeżeli $\Phi_0 A \in R_+^{n\times n}$ oraz

$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{bmatrix} \in R_+^{n\times n} \tag{17}$$

przy czym

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{T}_{11} & \overline{T}_{12} \\ \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} T_{11}, \overline{T}_{11} \in R^{n_1\times n_1} \\ T_{22}, \overline{T}_{22} \in R^{n_2\times n_2} \end{matrix}$$

Dowód. Z (11) dla $i = 0$ mamy

$$\Phi_0 = \overline{E}^D [Ec - A]^{-1} \tag{18}$$

Z założenia $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$ i (18) mamy $\Phi_0 E = \overline{E}^D \overline{E} \in R_+^{n\times n}$, a zgodnie z (4) $\Phi_{-1}A = \Phi_0 E - I_n = \overline{E}^D \overline{E} - I_n$. Biorąc pod uwagę, że dla (16)

$$\overline{E}^D = T\begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1} \text{ otrzymamy } \overline{E}^D\overline{E} = T\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1}$$

oraz

$$\Phi_{-1}A = \overline{E}^D\overline{E} - I_n = T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{n_2} \end{bmatrix}T^{-1} = -\begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{bmatrix} \in R_-^{n\times n}$$

jeżeli zachodzi (17). □

Uwaga 3. Jeżeli $T \in R_+^{n\times n}$ jest uogólnioną macierzą permutacyjną (w każdej kolumnie i w każdym wierszu ma tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe są równe zeru), wtedy $T^{-1} \in R_+^{n\times n}$ i warunek (17) jest spełniony.

Twierdzenie 6. Jeżeli $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$ to macierz charakterystyk impulsowych słabo dodatniego układu (1) spełnia warunek

$$h_i = C\Phi_{i-1}B + D \in R_+^p \text{ dla } i \geq 1 \tag{19}$$

Dowód. Korzystając z definicji charakterystyki impulsowej i podstawiając

$u_j = \begin{cases} 1 & dla\ \ j = 0 \\ 0 & dla\ \ j > 0 \end{cases}$ i $x_0 = 0$ do $y_i = C\Phi_i E x_0 + \sum_{j=0}^{i+\mu-1} C\Phi_{i-j-1}Bu_j + Du_j$, otrzymamy

$h_i = C\Phi_{i-1}B + D \in R_+^p$. □

5. Redukcja układu słabo dodatniego do standardowego układu dodatniego

Weźmy pod uwagę słabo dodatni układ (1) z $\det E \neq 0$. Mnożąc lewostronnie (1a) przez E^{-1} otrzymamy

$$x_{i+1} = \hat{A}x_i + \hat{B}u_i \tag{20}$$

przy czym

$$\hat{A} = E^{-1}A,\ \hat{B} = E^{-1}B \tag{21}$$

Jeżeli $\hat{A} \in R_+^{n\times n}$ i $\hat{B} \in R_+^{n\times m}$, to układ (19) jest standardowym układem dodatnim. Ze słabo dodatniego układu (1) z $\det E \neq 0$ możemy nie otrzymać układu standardowego dodatniego (20). Na przykład ze słabo dodatniego układu (1) z

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy układ (20) z

$$\hat{A} = E^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \hat{B} = E^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

który nie jest dodatni.

Pojawia się więc problem, przy spełnieniu jakich warunków nałożonych na E, A, B układu (1) układ (20) jest standardowym układem dodatnim.

Definicja 3. Macierz $E \in R_+^{n \times n}$ nazywamy lewym wspólnym dzielnikiem (LWD) macierzy $A \in R_+^{n \times n}$ i $B \in R_+^{n \times m}$, jeżeli istnieją macierze $\hat{A} \in R_+^{n \times n}$, $\hat{B} \in R_+^{n \times m}$ takie, że

$$A = E\hat{A} \text{ oraz } B = E\hat{B} \tag{22}$$

Twierdzenie 7. Układ (20) jest standardowym układem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy E jest LWD macierzy A i B układu (1).

Dowód. Z (1a) dla nieosobliwej macierzy E otrzymujemy (20). Układ (20) jest standardowym układem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy E jest LWD macierzą A i B modelu (1). □

Jeżeli warunki twierdzenia 7 są spełnione, to macierze $\hat{A}$ i $\hat{B}$ dla danych E, A i B możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury

Procedura

Krok 1. Korzystając z działań elementarnych na kolumnach wykonujemy redukcję

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline I_n & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline U_1 & U_2 \\ \hline U_3 & U_4 \end{array}\right] \tag{23}$$

Krok 2. Obliczamy macierz

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}^{-1} \tag{24}$$

Wtedy

$$V_1 = \hat{A} \text{ oraz } V_2 = \hat{B} \tag{25}$$

Uzasadnienie procedury. Z (23) i (24) mamy

$$[A \mid B]\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = [E \mid 0] \text{ oraz } [A \mid B] = [E \mid 0]\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}$$

Skąd

$$A = EV_1 \text{ oraz } B = EV_2 \tag{26}$$

Równość (25) wynika z porównania (22) i (26).□

Przykład 2. Weźmy pod uwagę układ (1) z

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Korzystając z tej procedury i stosując działanie elementarne na kolumnach wykonujemy redukcję

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline I_n & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Skąd

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ \hline 0 & -0.25 & 0 \end{array}\right]$$

oraz

$$\hat{A} = V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Tak więc z układu (1) z (27) otrzymujemy standardowy układ dodatni (20) z (28).

6. Osiągalność i sterowalność

6.1. Osiągalność

Definicja 4. Singularny układ dodatni (1) nazywamy osiągalnym w k krokach, jeżeli dla każdego $x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in R_+^m, i = 0,1,\ldots,k+\mu-1$, który przeprowadza ten układ z zerowego stanu początkowego $x_0 = 0$ do stanu końcowego x_f.

Definicja 5. Singularny układ dodatni (1) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla każdego $x_f \in R_+^n$ istnieje dodatnia liczba całkowita k taka, że układ ten jest osiągalny w k krokach.

Twierdzenie 8. Singularny układ dodatni (1) jest osiągalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

i) $\operatorname{rząd} R_n = n$,

ii) istnieje macierz nieosobliwa $\overline{R}_n$ złożona z n kolumn macierzy R_n taka, że $\overline{R}_n^{-1} \in R_+^{n\times n}$, przy czym

$$R_n := \left[\Phi_{n-1}B, \Phi_{n-2}B, \ldots, \Phi_0 B, \Phi_{-1}B, \ldots, \Phi_{-\mu}B\right] \tag{29}$$

Dowód. Z (6) dla $i = n$; $x_0 = 0$ oraz $x_n = x_f$ mamy

$$x_f = \sum_{j=0}^{i+\mu-1} \Phi_{n-j-1} B u_j = R_n u_{0,n+\mu-1}$$

gdzie $u_{0,n+\mu-1} = \left[u_0^T, u_1^T, \ldots, u_{n-1}^T, u_n^T, \ldots, u_{n+\mu-1}^T\right]^T \in R_+^{(n+\mu)\times m}$

Zauważmy, że dla każdego $x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in R_+^m$, $i = 0,1,\ldots,n+\mu-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki i) i ii). □

Uwaga 4. Korzystając z (11) możemy (29) napisać w postaci

$$R_n = \left[\left(\overline{E}^D \overline{A}\right)^{n-1} \overline{E}^D \overline{B}, \ldots, \overline{E}^D \overline{B}, \left(\overline{E}\overline{E}^D - I_n\right)\overline{A}^D \overline{B}, \ldots, \left(\overline{E}\overline{E}^D - I_n\right)\left(\overline{E}\overline{A}^D\right)^{\mu-1} \overline{A}^D B\right] \tag{29'}$$

Przykład 3. Rozpatrzmy układ (1) z

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę (przykład 1)

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dla } i \geq 0 \quad \Phi_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i korzystając z (29) otrzymamy

$$R_3 = \left[\Phi_2 B, \Phi_1 B, \Phi_0 B, \Phi_{-1} B, \Phi_{-2} B\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Warunek i) twierdzenia 8 jest spełniony ($\operatorname{rząd} R_3 = 3$), ale warunek ii) nie jest spełniony, gdyż

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \notin R_+^{3\times 3}$$

Układ (1) z (20) nie jest więc osiągalny w 3 krokach.

Twierdzenie 9. Singularny układ dodatni (1) z $\Phi_0 \in R_+^{n\times n}$ i $\Phi_{-1} \in R_-^{n\times n}$ nie jest osiągalny w n-krokach, jeżeli macierz $\overline{E}$ ma postać

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \tag{30}$$

gdzie $\overline{A}, \overline{B}$ i $\overline{E}$ są określone przez (9) i $J \in R^{n_1\times n_1}$ jest nieosobliwą macierzą Jordana, a $N \in R^{n_2\times n_2}$ jest macierzą nilpotentną, $n_1 + n_2 = n$.

Dowód. Ze struktury macierzy

$$\overline{E}^D = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dla (30) i (13a) wynika, że

$$\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{n_2} \end{bmatrix} \text{ i } \left(\overline{E}^D\overline{A}\right)^i \overline{E}^D\overline{B} = \begin{bmatrix} F_i \\ 0_{n_2 n} \end{bmatrix} \text{ dla } i = 0,1,\ldots,n-1 \tag{31}$$

$$\left(\overline{E}\,\overline{E}^D - I_n\right)\left(\overline{E}\,\overline{A}^D\right)^i \overline{A}^D\overline{B} = \begin{bmatrix} 0_{n_1 n} \\ G_i \end{bmatrix} \text{ dla } i = 1,\ldots,\mu-1$$

gdzie $F_i \in R_+^{n_1\times n}, G_i \in R_-^{n_2\times n}$ i 0_{kn} $(k = n_1, n_2)$ jest macierzą zerową o wymiarach $k \times n$.

Korzystając z (29') i (31) otrzymamy

$$R_n = \begin{bmatrix} F_{n-1}, & F_{n-2}, & \cdots & F_0, & 0, & \cdots & \\ 0, & 0, & \cdots & 0, & G_0, & \cdots & G_{\mu-1} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Ze struktury (32) wynika, że nie istnieje ciąg sterowań $u_i \in R_+^m$, $i = 0,1,\ldots,n+\mu-1$, który przeprowadza ten układ z $x_0 = 0$ do stanu $x_f \in R_+^n$. □

Uwaga 4. Jeżeli standardowy układ dodatni jest osiągalny, to jest on zawsze osiągalny w n krokach [8,9]. Pokażemy, że słabo dodatni układ (1) może nie być osiągalny w n krokach, ale może być osiągalny w $n+1$ krokach.

Dla układu (1) z

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\Phi_0 = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Phi_1 = E^{-1}AE^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \left(E^{-1}A\right)^2 E^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$\Phi_i = 0$ dla $i < 0$ i

$$R_3 = [\Phi_2 B, \Phi_1 B, \Phi_0 B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ ten nie jest osiągalny w 2 krokach, gdyż

$R_2^{-1} = [\Phi_1 B, \Phi_0 B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ i warunek ii) twierdzenie 8 nie jest spełniony.

Układ ten jest osiągalny w 3 krokach. Z R_3 wybieramy macierz

$\overline{R}_2 = [\Phi_2 B, \Phi_0 B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ która spełnia warunek ii) twierdzenie 8 gdyż $\overline{R}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$.

6.2. Sterowalność

Definicja 5. Singularny słabo dodatni układ (1) nazywamy sterowalnyn w k krokach, jeżeli dla każdych $x_0, x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in R_+^m, i = 0,1,\ldots,k+\mu-1$, który przeprowadza ten układ ze stanu x_0 do stanu x_f.

Definicja 6. Singularny słabo dodatni układ (1) nazywamy sterowalnym, jeżeli dla każdych $x_0, x_f \in R_+^n$ istnieje liczba całkowita $k>0$ taka, że układ ten jest sterowalny w k krokach.

Wprowadźmy nowe pojęcie nieujemnego obrazu macierzy $A \in R^{n\times m}$ (oznaczonego $\mathrm{Im}_+ A$)

$$\mathrm{Im}_+ A := \{y \in R^n : y = Ax \ dla \ wszystkich \ x \in R_+^n\}$$

Twierdzenie 10. Słabo dodatni układ (1) jest sterowalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy., gdy

$$\mathrm{Im}_+ [I, -\Phi_n E] \subset \mathrm{Im}_+ R_n \tag{33}$$

przy czym R_n jest określone przez (29).

Dowód. Z (6) dla $i = n$ i $x_n = x_f$ mamy

$$x_f - \Phi_n E x_0 = [I_n, -\Phi_n E] \begin{bmatrix} x_f \\ x_0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{i+\mu-1} \Phi_{n-j-1} B u_j = R_n u_{0,n+\mu-1}$$

Zauważmy, że dla każdych $x_0, x_f \in R_+^n$ istnieje $u_{0,n+\mu-1} \in R_+^{(n+\mu)\times m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (33) jest spełniony. □

Korzystając z promienia spektralnego $\rho(\overline{E}^D \overline{A})$ macierzy $\overline{E}^D \overline{A}$ otrzymamy następujące warunki konieczne i wystarczające sterowalności układu dodatniego (1).

Twierdzenie 11. Słabo dodatni układ (10) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

i) istnieje macierz nieosobliwa $\overline{R}_n$ złożona z n kolumn macierzy

$$R_k := \left[\Phi_{k-1}B, \Phi_{k-2}B, \ldots, \Phi_0 B, \Phi_{-1}B, \ldots, \Phi_{\mu}B\right] \quad (k \geq n) \tag{34}$$

taka, że $\overline{R}_n^{-1} \in R_+^{n \times n}$ oraz

ii) $\rho\left(\overline{E}^D \overline{A}\right) < 1$, jeżeli przeprowadzenie układu ze stanu x_0 do stanu x_f zachodzi w nieskończenie wielkiej liczbie kroków

lub $\rho\left(\overline{E}^D \overline{A}\right) = 0$, jeżeli przeprowadzenie układu ze stanu x_0 do stanu x_f zachodzi w skończonej liczbie kroków.

Dowód. Zauważmy, że dla $\rho\left(\overline{E}^D \overline{A}\right) < 1$ warunek $\overline{x} := x_f - \Phi_k E x_0 \in R_+^n$ musi być spełniony dla $k \geq n$ (nieskończone lub skończone) oraz dla $\rho\left(\overline{E}^D \overline{A}\right) = 0$ warunek $\overline{x} \in R_+^n$ jest spełniony dla $k = n$. Zgodnie z twierdzeniem 8 stan $\overline{x}$ jest osiągalny w k krokach wtedy i tylko wtedy, gdy warunek i) jest spełniony. □

7. Wnioski

Zostało wprowadzone pojęcie singularnego słabo dodatniego układu dyskretnego. Podano podstawowe właściwości macierzy fundamentalnych oraz rozwiązanie singularnego układu dodatniego. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające redukowalności słabo dodatniego układu (1) do równoważnego układu standardowego. Wykazano, że standardowy układ (1) spełniający warunek (2) i standardowy układ (12) mają to samo rozwiązanie (6) dla dopuszczalnych warunków początkowych. Podano warunki konieczne i wystarczające osiągalności i sterowalności słabo dodatnich układów singularnych. Podano również warunki dostateczne nieosiągalności tych układów. Z niewielkimi modyfikacjami rozważania te można uogólnić na singularne układy słabo dodatnie ciągłe. Uogólnienie tych rozważań na przypadek singularnych układów słabo-dodatnich 2D jest problemem otwartym.

LITERATURA

1. Banaszuk A., Kociecki M., Observability with unknown input and dual properties for singular systems, J.C.Baltzer AG, Scientific Publishing Co, IMACS, 1991, pp. 125-129.
2. Campbell S.L., Singular systems of differential equations, Pitman Advanced Publishing Program, pp.138-143.

3. Campbell S.L., N.K. Nichols and W.J. Terrell, Duality, observability and controllability for linear time-varying descriptor systems, Circuits Systems Signal Process, vol. 10, No 4, 1991, pp. 455-470.

4. Chu K.W. E., Controllability of descriptor systems, Int. j. Control, 1987, vol. 46, No 5. pp. 1761-1770.

5. Cobb D., Controllability, observability and duality in singular systems, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-29, No 12, 1984, pp. 1076-1082.

6. Coxson P.G., Positive input reachability and controllability of positive systems, Linear Algebra and its Applications 94, 1987, pp. 35-53.

7. Dai L., Singular Control Systems, Lectures Note in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1989.

8. Fanti M.P., Maione B. and Turchiano B., Controllability of linear single-input positive discrete-time systems, Int. J. Control, 1989, vol. 50, No 6, pp. 2523-2542.

9. Fanti M.P., Maione and Turchiano B., Controllability of multi-input positive discrete-time systems, Int. J. Control, 1990, vol. 51, No 6, pp. 1295-1308.

10. Kaczorek T., Linear Control Systems, Research Studies Press and J. Wiley, New York, 1993.

11. Klamka J., Controllability of Dynamical Systems, Kluwer Academic Publ,. Dordecht, 1991.

12. Langenhop C.E., The Laurent Expansion for a nearly singular matrix, Linear Algebra and its Applications 4, 1971, pp. 329-340.

13. Lewis F.L., A survey of linear singular systems, Circuits Systems Signal Process, vol. 5, no 1, 1986, pp. 1-36.

14. Lewis F.L., Descriptor systems: Decomposition into forward and backward subsystems, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-29, 1984, pp. 167-170.

15. Lewis F.L., Fundamental, reachability and observability matrices for discrete descriptor systems, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-30, 1985, pp. 502-505.

16. Lewis F.L., Techniques in 2-D implicit systems, Control and Dynamic Systems, vol. 69, pp. 89-131.

17. Luenberger D.G., Time-invariant descriptor systems, Automatica, vol. 14, 1978, pp. 473-480.

18. Luenberger G., Dynamic equations in descriptor form, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-22, No 3, 1977, pp. 312-321.

19. Mertzios B.G. and Lewis F.L., Fundamental matrix of discrete singular systems, Circuits, Syst., Signal Processing, vol. 8, no 3. 1989, pp. 341-355.

20. Murthy D.N.P., Controllability of a linear positive dynamic system, Int. J. Systems Sci., 1986, vol. 17, No 1, pp. 49-54.

21. Ohta Y., Madea H. and Kodama S., Reachability, observability and realizability of continuous-time positive systems, SIAM J. Control and Optimization, vol. 22, No 2, 1984, pp. 171-180.

22. Özçaldiran K., A geometric characterization of the reachable and the controllable subspaces of descriptor systems, Circuits, Syst., Signal Processing, vol. 5, no 1. 1986, pp. 37-48.

23. Yip E.L. and Sinovec E.F., Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-26, 1981, pp. 702-707.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jerzy Klamka

Abstract

A new class of weakly positive singular discrete linear time-invariant systems is introduced. Some properties of the fundamental matrix and solutions of the positive singular discrete linear systems are characterised. Necessary and sufficient conditions are given under which the weakly positive system can be reduced to a standard positive system. For regular singular discrete linear system an equivalent (has the same solution) standard system is derived. Necessary and sufficient conditions are established for the reachability and controllability of the positive singular systems. Sufficient conditions are given for unreachability of the systems.