ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: AUTOMATYKA z. 123 Nr kol. 1389

Jan KAŁUSKI
Politechnika Śląska

N – OSOBOWE GRY STOCHASTYCZNE Z KOALICJAMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono model n-osobowej stochastycznej gry z koalicjami. Koalicje w takiej grze tworzone są losowo. Model gry zakłada, że proces podejmowania decyzji w grze jest decyzyjnym łańcuchem Markowa ze skończoną liczbą stanów. Dla każdego gracza dane są jego wygrane w zależności od tego, w jakiej koalicji on gra. Wyznaczany jest całkowity dochód w grze. Przedyskutowano szereg właściwości dotyczących nowego modelu gry. Zwrócono uwagę na brak opisu takiej gry w dostępnej literaturze. Zaprezentowano modelowy przykład gry.

N-PERSON STOCHASTIC GAMES WITH COALITIONS

Summary. In the work a coalitional n-person stochastic game is considered. The formalised model of the game is presented. The coalitions in this game are created at random. Some properties and constraints on the subject are discussed. We assume that this model can be a discrete Markov decision process with finite states. Considering random conditions of the game at the moment t=0,1,2,... we notice that the game and the players can be in different states. The payoffs for each player are given. The one depends on the number of persons taking part in a given coalition. The overall reward for each player in the n- person stochastic game with coalitions is calculated if the initial state for each player is defined. Finally, some remarks and conclusions about the described coalitional n-person stochastic game as well as appropriate references are presented.

1. Wstęp

Będziemy rozpatrywali grę, w której udział bierze n-graczy. W czasie gry gracze mogą łączyć się w k-osobowe koalicje, k= 1,...,n . Swoje decyzje o należeniu do określonej koalicji gracze podejmują w dyskretnych chwilach czasu t = 0,1,2,..., zwanych etapami gry. Gracze w dowolny sposób mogą porozumiewać się ze sobą w celu utworzenia określonej koalicji. W chwili t = 0 gra znajduje się w stanie początkowym. Możliwości tworzenia koalicji przez graczy zmieniają się z etapu na etap w sposób losowy. Wobec tego na każdym etapie gry gracze wybierają możliwe strategie z prawdopodobieństwem zależnym od losowych warunków gry.

W związku z tak opisaną grą można postawić pytanie. W jaki sposób gracze powinni grać w tych warunkach, aby ich wygrana indywidualna była jak największa?

Niewątpliwie, odpowiedź zależy od losowych warunków gry na etapach $t = 0,1,2,...$, od postaci początkowej gry w chwili $t = 0$ oraz wypłat graczy, związanych z ich przynależnością do k – osobowych koalicji. Jest jasne bowiem, że ze względu na losowy charakter gry, nie zawsze przynależność do koalicji dwu- i więcejosobowych będzie lepsza niż gra w pojedynkę.

Stąd opisany problem optymalizacyjny nie jest trywialny i wymaga odpowiedniej analizy w celu wyznaczenia optymalnych strategii dla każdego gracza.

Opisaną grę będziemy nazywali n-osobową stochastyczną grą koalicyjną.

Celem niniejszej pracy jest analiza tak opisanej gry ze względu na możliwości budowy jej modelu matematycznego oraz analiza właściwości asymptotycznych gry co do stabilności struktur koalicyjnych graczy z uwzględnieniem określonej równowagi koalicyjnej.

W związku z tym w punkcie 2 pracy przedstawiono sformalizowany model omawianej gry, w której koalicje są tworzone w sposób losowy, oraz przedyskutowano szereg właściwości i ograniczeń wynikających z przyjętego modelu. Uzasadniono, że modelem tym może być dyskretny decyzyjny łańcuch Markowa ze skończoną liczbą stanów. W punkcie 3 pracy wprowadzono wypłaty dla poszczególnych graczy, w zależności od tego w jakiej k-osobowej koalicji oni grają. Wyznaczono całkowite dochody w n-osobowej grze dla każdego gracza, jeżeli określony był stan wyjściowy gracza. W celu otrzymania skończonej oczekiwanej wartości dochodu dla każdego gracza, wprowadzono współczynnik dyskonta $\beta<1$. Stąd modelem matematycznym n-osobowej koalicyjnej stochastycznej gry jest zdyskontowany decyzyjny łańcuch Markowa ze skończoną liczbą stanów. W rozpatrywanym modelu prawdopodobieństwa przejść ze stanu do stanu, nie zależą od decyzji graczy lecz od losowych warunków gry. Przedstawiono sposób podejmowania przez graczy optymalnych decyzji w tych warunkach, tzn. należenia do określonej k-osobowej koalicji, $k \le n$. W punkcie 4 pracy przedstawiono ideowy przykład pewnej n-osobowej stochastycznej gry koalicyjnej. W zakończeniu pracy (punkt 5) sformułowano wnioski i uwagi końcowe. Literatura natomiast obejmuje te pozycje, które, zdaniem autora niniejszej pracy, mają przynajmniej pośredni związek z omawianym tematem. Bowiem nie udało się jak na razie znaleźć żadnej pozycji literaturowej, która by bezpośrednio dotyczyła n-osobowej stochastycznej gry koalicyjnej.

2. Model gry

Niech zadany jest zbiór elementów $J = \{1,2,...,n\}$, nazywanych dalej graczami. Gra przebiega w taki sposób, że w chwili $t = 0,1,2,...$ gracze podejmują decyzję o należeniu do określonej k-osobowej koalicji. Stan n-osobowej gry w chwili $t = 0,1,2,...$ będziemy oznaczali przez S_t^n. Jest to zmienna losowa jednowymiarowa ze skończonego zbioru $S \in \{1,2,...,s,...,N$, zwanego przestrzenią stanów. Zdarzenie $(S_t^n = s)$ oznacza, że n-osobowa gra w chwili t znajduje się w stanie s, gdzie s jest n-wymiarowym wektorem wierszowym postaci:

$$s = \left[s_t^1, s_t^2, ..., s_t^n\right] = \left[s_t^i\right] \quad i = 1,...,n; \quad t = 0,1,2,.... \tag{1}$$

Stąd

$$(S_t^n = s) := \left\{S_t^n = \left[s_t^1, s_t^2, ..., s_t^n\right]\right\}. \tag{2}$$

Składowa $s_t^i, i = 1,...,n$ wektora s określa stan i-tego gracza w chwili $t = 0,1,2,...$. Przez stan i-tego gracza będziemy rozumieli jego możliwości należenia do różnych koalicji z n po k, $k \le n$ w chwili $t = 0,1,2,...$. Zatem s_t^i, $i = 1,...,n$ jest n-wymiarowym wektorem wierszowym postaci:

$$s_t^i = \left[m_1, m_2, ..., m_k, ..., m_n\right], \tag{3}$$

gdzie

$$m_k = C_{n-1}^{k-1}, \quad k = 1,...,n. \tag{4}$$

jest liczbą różnych koalicji k-osobowych każdego gracza n-osobowej gry, do których gracz może należeć w chwili t. Liczba wszystkich różnych k – osobowych koalicji do których może należeć każdy gracz w chwili t, wynosi więc

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = 2^{n-1}, \quad k = 1,...n; \quad k \le n. \tag{5}$$

Zauważmy, że liczba wszystkich możliwych koalicji z n po k (bez koalicji pustej) wynosi:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1. \tag{6}$$

Obecnie objaśnijmy ten model na przykładzie 4-osobowej gry. Zgodnie z przyjętym opisem gry mamy:

Dla pierwszego gracza :

$$s_t^1 := \left\{ [(1)], \begin{bmatrix} (1,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (1,2,3) \\ (1,2,4) \\ (1,3,4) \end{bmatrix}, [(1,2,3,4)] \right\}.$$

Dla drugiego gracza:

$$s_t^2 := \left\{ [(2)], \begin{bmatrix} (2,1) \\ (2,3) \\ (2,4) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (2,3,4) \\ (2,3,1) \\ (2,4,1) \end{bmatrix}, [(2,1,3,4)] \right\}.$$

itd.

Natomiast $\left\{ \sum_{k=1}^{4} C_4^k \right\}$ można zapisać w postaci:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{4} C_4^k \right\} := \left\{ \begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (1,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \\ (2,3) \\ (2,4) \\ (3,4) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (1,2,3) \\ (1,2,4) \\ (1,3,4) \\ (2,3,4) \end{bmatrix}, [(1,2,3,4)] \right\}.$$

Dalej dla i-tego gracza w skrócie będziemy pisali

$$s_t^i := \{[(1),(3),(3),(1)]\}, \quad i = 1,\ldots,4$$

a dla $\left\{ \sum_{k=1}^{4} C_4^k \right\}$ skrót ten będzie miał postać:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{4} C_4^k \right\} := \{[(4),(6),(4),(1)]\}.$$

W tak przyjętym skrótowym zapisie kolejne liczby w nawiasach okrągłych oznaczają liczbę k-osobowych różnych koalicji, $k = 1,\ldots,n$.

W tym modelu nie uwzględniono pustej koalicji. Oznacza to, że na każdym etapie gry każdy gracz ma do wyboru przynajmniej jedną koalicję k-osobową. Jeżeli w chwili $t = 0,1,2,\ldots$ i-ty gracz, ze względu na uwarunkowania gry, które, jak powiedzieliśmy zmieniają się losowo, nie będzie mógł wybrać przynależności do żadnej z k-osobowej koalicji, to w zapisie skrótowym w miejsce tych koalicji będziemy pisali zero .

Zatem przykładowy stan 4-osobowej gry w chwili $t = 0,1,2,\ldots$ może mieć postać:

$$(S_t^4 = s) := (S_t^4 = \{[(1),(2),(1),(0)],[(1),(3),(1),(1)],[(0),(0),(3),(0)],[(1),(1),(1),(1)]\}).$$

Co oznacza, że na przykład gracz trzeci może na danym etapie gry wybrać jedną koalicję 3-osobową spośród 3 koalicji 3-osobowych.

Stan i-tego gracza postaci (3) będziemy nazywali jego strukturą koalicyjną w chwili $t = 0,1,2,...$.

Wyznaczmy obecnie prawdopodobieństwo zdarzenia $(S_t^n = s)$. W tym celu zauważmy, że w ramach struktury koalicyjnej każdy gracz w chwili $t = 0,1,2,...$może, rzecz jasna, należeć tylko do jednej k-osobowej koalicji, $k = 1,...,n$. Zatem prawdopodobieństwo stanu w chwilach $t = 0,1,2,...$ dla i-tego gracza można zapisać w następujący sposób:

$$P(s_t^i) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot p_n, \tag{7}$$

gdzie p_n jest stałym (hipotetycznym) prawdopodobieństwem wyboru przez i-tego gracza, $i = 1,...,n$ dowolnej k-osobowej koalicji , $k = 1,...,n$ w dowolnym stanie $s \in S$ w n-osobowej grze.

Wobec tego prawdopodobieństwo stanu n-osobowej gry w chwili $t = 0,1,2,...$ będzie iloczynem prawdopodobieństw stanów poszczególnych graczy.

$$P(S_t^n = s) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot p_n, \quad t = 0,1,2,...; \quad k = 1,...,n; \quad i = 1,...,n. \tag{8}$$

Problemem wyznaczania prawdopodobieństwa p_n dla $n = 3$ zajmiemy się w dalszej części pracy.

Kontynuując opis n-osobowej stochastycznej gry z koalicjami, zakładamy, że w następnej chwili po t , tzn. $t + 1$ system może przejść do innego możliwego stanu s' lub pozostać w stanie poprzednim. W związku z tym rozpatrzmy, jakie są możliwe stany, a właściwie, jaka jest ich liczba w tak opisanej n-osobowej grze.

Jak już powiedzieliśmy stan gry w chwili t jest jednoznacznie zdefiniowany wektorem $S_t^n = \left[s_t^i\right]$, $i = 1,...,n$; $t = 0,1,2,...$ i zależy od liczby graczy i ich możliwości należenia do różnych koalicji . Możliwości te są uwarunkowane losowo występującymi ograniczeniami w chwilach $t = 0,1,2,...$. Natomiast stan i-tego gracza jest określony jego możliwą strukturą koalicyjną.

Liczba N_i wszystkich możliwych struktur koalicyjnych i-tego gracza, uwzględniając możliwość braku jakiejkolwiek k-osobowej koalicji w strukturze koalicyjnej (w tym miejscu będzie zero), można wyznaczyć z następującej zależności:

$$N_i = \prod_{k=1}^{n} (C_{n-1}^{k-1} + 1), \tag{9}$$

gdzie „+1" oznacza występowanie koalicji zerowej w strukturze k-osobowej koalicji (brak koalicji k-osobowej). Stąd dla n-graczy liczba N możliwych stanów gry w chwili $t = 0,1,2,...$ wyniesie

$$N = N_i^n = [\prod_{k=1}^{n}(C_{n-1}^{k-1}+1)]^n. \tag{10}$$

Niestety, liczba ta nawet dla 3-osobowej gry jest duża. Mamy bowiem dla 3-osobowej gry

$$N\left\{\begin{bmatrix}(1)\\(0)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}(2)\\(0)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}(1)\\(0)\end{bmatrix}\right\} = (2\cdot 3\cdot 2)^3 = 12^3 = 1728.$$

Nietrudno jednak widzieć, że mamy tu do czynienia z 3-osobową grą o największej możliwości tworzenia różnych struktur koalicyjnych. Dla gry 3-osobowej jest ich w tym przypadku aż 12 dla każdego gracza.

Z kolei najmniejszą liczbę możliwych struktur koalicyjnych (stanów) ma 3-osobowa gra w postaci:

$$N\{[(1)],[(2)],[(1)]\} = (1\cdot 2\cdot 1)^3 = 8.$$

Można pokazać, że różnych możliwych wariantów 3-osobowej gry jest dokładnie osiem. Dla przykładu zapiszmy jeszcze jeden wariant 3-osobowej gry:

$$N\left\{[(1)],\begin{bmatrix}(2)\\(0)\end{bmatrix},[(1)]\right\} = (1\cdot 3\cdot 1)^3 = 27.$$

Konstruując dalsze warianty 3-osobowej gry, liczbę $N_j, j = 1,...,8$ możliwych struktur koalicyjnych dla wszystkich ośmiu wariantów tej gry, pokazuje tablica 1 w kolejności rosnącej liczby stanów.

Tablica 1

Liczba stanów 3-osobowej gry

j	1	2	3	4	5	6	7	8
N_j	8	27	64	64	216	216	512	1728

Każda taka gra wyróżnia się innym rozkładem prawdopodobieństw stanów.

Dalej zakładamy, że dla $t = 0$ poszczególni gracze znajdują się w stanie początkowym (startowym). W ten sposób, na przykład, stan 3-osobowej gry – wariant $j = 1$ z tablicy 1 w chwili $t = 0,1,2$ będzie miał postać:

$$(S_{0,1}^3 = s) := \{[(1),(2),(1)],[(1),(2),(1)],[(1),(2),(1)]\}.$$

Zaś przykładowo dla wariantu $j = 5$, 3-osobowej gry – postać:

$$(S^3_{0,5} = s) := \left\{ \left[\begin{bmatrix} (1) \\ (0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (2) \\ (0) \end{bmatrix}, [(1)] \right], \left[\begin{bmatrix} (1) \\ (0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (2) \\ (0) \end{bmatrix}, [(1)] \right], \left[\begin{bmatrix} (1) \\ (0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (2) \\ (0) \end{bmatrix}, [(1)] \right] \right\}.$$

Itd.

Oczywiście prawdopodobieństwa tych stanów będą różne. Jest również jasne, że suma prawdopodobieństw stanów każdego j-tego wariantu n-osobowej gry powinna być unormowana, tzn.:

$$\sum_{l=1}^{N_{n,j}} P(S^n_{t,j,l}) = 1, \tag{11}$$

gdzie

$N_{n,j}$ - liczba stanów j-tego wariantu gry,

$S^n_{t,j,l}$ - l - ty stan n-osobowej gry w chwili t dla j-tego wariantu, $l = 1,2,\ldots,N_j$

Dla $n = 3$, $j = 1,\ldots,8$; dla $j = 1$, $l = 1,\ldots,8$; dla $j = 2$, $l = 1,\ldots,27$; itd.

Obecnie obliczmy prawdopodobieństwo poszczególnych stanów dla wybranych dwóch wariantów 3-osobowej gry. Z tablicy 1 widać, że najłatwiej to będzie zrobić dla j = 1,2., $(N_{3,1} = 8; N_{3,2} = 27)$.

Kluczowym zagadnieniem dla obliczania wartości tych prawdopodobieństw jest znajomość wspomnianego już prawdopodobieństwa $p_n = p_{n,j}$. Niestety nie da się zapisać w postaci jakiegoś ogólnego wzoru zależności. $p_{n,j}(N_{n,j})$. Wobec powyższego drogą eksperymentalną znaleziono $p_{3,1} = \frac{1}{7} = 0{,}1428$ oraz $p_{3,2} = \frac{1}{9} = 0{,}1111$. Stąd już można obliczyć prawdopodobieństwa $P(S^3_{t,1,l})$ oraz $P(S^3_{t,2,l})$ dla t = 0,1,2,...; l = 1,...,8 dla j = 1 i l = 1,...,27 dla j = 2, uwzględniając wzory (7),(8). W tablicy 2 zapisano wszystkie obliczone prawdopodobieństwa $P(S^3_{t,1,l})$ w kolejności malejącej.

Tablica 2

Wartości $P(S^3_{t,1,l})$

l	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(.)$	0,1865	0,1399	0,1399	0,1399	0,1049	0,1049	0,1049	0,0787

Dla przykładu wyznaczmy kilka prawdopodobieństw podanych w tablicy 2. Prawdopodobieństwo $P(S^3_{t,1,8}) = 0{,}0787$ wyznaczono w następujący sposób:

$$P(S^3_{t,1,8}) = P(S^3_{t,1,8} = \{[(1),(1),(1)],[(1),(1),(1)],[(1),(1),(1)]\}) =$$

$$(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7})^3 = 0{,}0787.$$

Inny przykład: $P(S^3_{t,1,4}) = 0{,}1399.$

$$P(S^3_{t,1,4}) = P(S^3_{t,1,4} = \{[(1),(2),(1)],[(1),(2),(1)],[(1),(1),(1)]\}) = (\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7})^2(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}) = 0{,}1399.$$

Itd.

Wyniki obliczeń prawdopodobieństw stanów dla drugiego wariantu 3-osobowej gry ($j = 2$, $l = 1,...,27$) zostały pokazane w tablicy 3.

Tablica 3

Wartości $P(S^3_{t,2,l})$

l	$P(S^3_{t,2,l})$	l	$P(S^3_{t,2,l})$	l	$P(S^3_{t,2,l})$
1	0,0877	10	0,0438	19	0,0247
2	0,0740	11	0,0370	20	0,0247
3	0,0740	12	0,0329	21	0,0219
4	0,0740	13	0,0329	22	0,0219
5	0,0555	14	0,0329	23	0,0219
6	0,0555	15	0,0329	24	0,0164
7	0,0555	16	0,0329	25	0,0164
8	0,0438	17	0,0329	26	0,0164
9	0,0438	18	0,0247	27	0,0109

Ze względu na pracochłonność obliczeń w niniejszej pracy nie będziemy analizowali pozostałych wariantów 3-osobowej gry. Z dotychczasowej jednak analizy 2 najmniejszych wymiarowo wariantów 3-osobowej gry, można wyciągnąć pewne wnioski przydatne w dalszej analizie.

Zakładając, że gracze są nierozróżnialni, liczba możliwych stanów 3-osobowej stochastycznej gry z koalicjami znakomicie zmniejsza się. Mianowicie, dla pierwszego wariantu (zobacz tabl.1) liczba stanów zmniejsza się z $N_{3,1} = 8$ do $N_{3,1,zredukowane} = 4$. Dla drugiego wariantu (zobacz tabl.2) - z $N_{3,2} = 27$ do $N_{3,2,zred.} = 10$.

Prawdopodobieństwa zredukowanych stanów danego wariantu 3-osobowej gry wyznaczamy bezpośrednio z tablic 2 i 3, sumując odpowiednio takie same wartości prawdopodobieństw nie zredukowanych stanów . Przedstawiono to w tablicach 4 i 5.

Tablica 4

Prawdopodobieństwa $P(S_{t,1,l_{zred.}})$

$l_{zredukowane}$	1	2	3	4
$P(S_{t,1,l_{zred.}})$	0,4198	0,3147	0,1865	0,0787

Tablica 5

Prawdopodobieństwa $P(S_{t,2,l_{zred.}})$

$l_{zredukowane}$	1	2	3	4	5
$P(S_{t,2,l_{zred.}})$	0,2220	0,1974	0,1666	0,1314	0,0874
$l_{zredukowane}$	6	7	8	9	10
$P(S_{t,2,l_{zred.}})$	0,0741	0,0657	0,0492	0,0370	0,0109

Zinterpretujmy prawdopodobieństwa $P(S_{t,1,l_{zred.}})$ znajdujące się w tabl.4. Wektor prawdopodobieństw $P(S_{t,1,l_{zred.}}) = [0{,}4198 \quad 0{,}3147 \quad 0{,}1865 \quad 0{,}0787]$ jest wektorem hipotetycznych prawdopodobieństw definiującym pierwszy wariant 3-osobowej stochastycznej gry z koalicjami. Prawdopodobieństwo pierwszego stanu gry $P(S_{t,1,1}) = 0{,}4198$ jest prawdopodobieństwem zajścia stanu gry w postaci:

$$(S_{t,1,1} = \{[(1),(2),(1)],[(1),(2),(1)],[(1),(2),(1)]\})$$

Oznacza to, że stan gry określony przez stan trzech graczy jest następujący:

3- gracze mogą grać :

- każdy osobno lub,
- każdy w jednej z dwóch koalicji dwuosobowych lub,
- wszyscy razem (jedna koalicja 3-osobowa).

Prawdopodobieństwo drugiego stanu gry $P(S_{t,1,2}) = 0{,}3147$ jest prawdopodobieństwem zajścia stanu gry w postaci:

$$(S_{t,1,2} = \{[(1),(2),(1)],[(1),(2),(1)],[(1),(1),(1)]\})$$

Oznacza to, że stan gry określony przez stan trzech graczy jest następujący:

3- gracze mogą grać :

- każdy osobno lub,
- 2-ch graczy w jednej z dwóch koalicji dwuosobowych; trzeci gracz w jednej koalicji dwuosobowej lub,
- wszyscy grają razem.

Prawdopodobieństwo trzeciego stanu gry $P(S_{t,1,3}) = 0{,}1865$ jest prawdopodobieństwem zajścia stanu gry w postaci:

$$(S_{t,1,3} = \{[(1),(2),(1)],[(1),(1),(1)],[(1),(1),(1)]\})$$

Oznacza to, że stan gry określony przez stan trzech graczy jest następujący:

3- gracze mogą grać :

- każdy osobno lub,
- jeden gracz ma wybór jednej spośród dwóch koalicji dwuosobowych, pozostali dwaj gracze mogą grać w jednej koalicji dwuosobowej lub,
- wszyscy grają razem.

Prawdopodobieństwo czwartego stanu gry $P(S_{t,1,4}) = 0{,}0{,}787$ jest prawdopodobieństwem zajścia stanu gry w postaci:

$$(S_{t,1,4} = \{[(1),(1),(1)],[(1),(1),(1)],[(1),(1),(1)]\})$$

Oznacza to, że stan gry określony przez stan trzech graczy jest następujący:

3- gracze mogą grać :

- każdy osobno lub,
- każdy gracz może grać w jednej dwuosobowej koalicji lub,
- wszyscy grają razem.

W analogiczny sposób można zinterpretować prawdopodobieństwa stanów drugiego wariantu 3- osobowej gry, podanych w tabl.5.

Podsumowując powyższe rozważania, zauważmy, że w ogólnym przypadku każdy gracz w chwili $t = 0,1,2,...$ może znaleźć się w dowolnym możliwym stanie tylko jednego określonego wariantu n-osobowej stochastycznej gry z koalicjami. Każdy wariant $j = 2,...,8$, 3-osobowej gry zawiera 8 stanów wariantu pierwszego oraz dodatkowe stany, wynikające z początkowych warunków gry. Prawdopodobieństwa występowania tych stanów zmniejszają się wraz ze wzrostem numeru wariantu 3-osobowej gry. Dlatego analizując 3-osobową stochastyczną grę z koalicjami, należy ustalić stan początkowy gry, gdyż zbiory stanów poszczególnych wariantów gry nie przecinają się. Nie jest więc możliwe w chwili t przejście ze stanów jednego zbioru (jednego wariantu gry) do stanów drugiego zbioru. Przeczyłoby to bowiem postulatowi zupełności zdarzeń danego wariantu gry.

Do dalszych rozważań zakładamy, że istnieje warunkowe prawdopodobieństwo przejścia $P(S^n_{t+1} = s' / S^n_t = s)$, $s, s' \in S$ oraz że ciąg $\{S^n_t\}$, $t = 0,1,2,..$ jest procesem Markowa z czasem dyskretnym ze skończoną liczbą stanów N. Zadając jednokrokową stochastyczną macierz przejść określamy n-osobową stochastyczną grę z koalicjami według wyżej opisanego modelu, z uwzględnieniem rozkładu prawdopodobieństwa stanu początkowego gry.

W następnym punkcie pracy przeanalizujemy opisany model gry, wprowadzając wypłaty dla poszczególnych graczy, w zależności od tego w jakiej k-osobowej koalicji oni grają. Przeanalizujemy również problem podejmowania optymalnych decyzji przez 3-graczy, jeżeli określone będą dochody każdego gracza w zależności od podejmowanych decyzji oraz określone będą losowe warunki gry.

3. Wprowadzenie wypłat w grze

Niech rozważana gra ma, jak poprzednio, zbiór stanów $s \in S$, $s = 1,\dots,N$. W chwili $t = 0,1,2,\dots$ proces jest obserwowany przez 3 graczy. W każdej chwili t każdy gracz może otrzymać informację o aktualnym stanie procesu oraz podjąć odpowiednio decyzję $d_1 \in D_1(s), d_2 \in D_2(s), d_3 \in D_3(s)$. Decyzje te w chwili t zależą od stanu s i polegają na tworzeniu odpowiednich koalicji ; jedno-, dwu- lub 3- osobowych. Decyzje te dla każdego i-tego gracza, $i = 1,2,3$ w 3-osobowej grze będziemy oznaczali przez $d_i^{(1)}, d_i^{(2)}, d_i^{(3)}$. Stąd $D_i(s) := \{d_i^{(1)}, d_i^{(2)}, d_i^{(3)}\}$. W omawianej 3-osobowej grze każdy gracz ma do wyboru jedną koalicję jednoosobową, dwie koalicje dwuosobowe oraz jedną koalicję trzyosobową. Zbiór koalicji dwuosobowych będziemy oznaczali przez $d_i^{(2)} := \{d_i^{(2)}, d_{i'}^{(2)}\}$ $i, i' = 1,2,3; i' \neq i$.

Załóżmy dalej, że każdy gracz otrzymuje nagrodę $r(s'/s; d_i^{(1)}) : S \times D_i(s) \to R$, jeżeli w chwili $t = 0,1,2,\dots$, przechodząc ze stanu s do s', $s, s' \in S$, wybiera koalicję jednoosobową (gra sam); otrzymuje nagrodę

$r(s'/s; d_i^{(2)}, d_{i'}^{(2)}) : S \times D_i(s) \times D_{i'}(s) \to R$, gdy wybiera koalicję dwuosobową oraz otrzymuje nagrodę

$r(s'/s; d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, d_3^{(3)}) : S \times D_1(s) \times D_2(s) \times D_3(s) \to R$, gdy wybiera koalicję trzyosobową. Wielkości nagród spełniają następującą relację:

$$r(s'/s; d_i^{(2)}, d_{i'}^{(2)}) \geq r(s'/s; d_i^{(1)}) \tag{12}$$

oraz

$$r(s'/s; d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, d_3^{(3)}) \geq r(s'/s; d_i^{(2)}, d_{i'}^{(2)}) \tag{13}$$

Przejście systemu ze stanu s do s' zachodzi ze stałym prawdopodobieństwem

$$p(s'/s) = P\{S_{t+1} = s'/S_t = s\}, t = 0,1,2,\dots, s, s' = 1,\dots,N. \tag{14}$$

i zależy tylko od losowych warunków gry , natomiast nie zależy od decyzji podejmowanych przez graczy. Zakładamy dalej, że dana jest stochastyczna macierz przejść postaci:

$$P(S'/S) = \left[p(s'/s)\right], s, s' = 1,\dots,N, \tag{15}$$

oraz odpowiednie macierze nagród:

$$\begin{aligned} R_i &= [\, r(s'/s; d_i^{(1)})\,], \\ R_{i,j} &= [\, r(s'/s; d_i^{(2)}, d_j^{(2)})\,], \\ R_{1,2,3} &= [\, r(s'/s; d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, d_3^{(3)})\,] \\ i, i' &= 1,2,3; i' \neq i, s, s' = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{16}$$

Oznaczmy dalej przez $v_t(s; d_i^{(1)})$ całkowity dochód i- tego gracza w chwili t, jeżeli jego stanem wyjściowym był stan s i jeżeli grał on sam; przez $v_t(s; d_i^{(2)}, d_j^{(2)})$, jeżeli grał on w jednej z dwuosobowych koalicji oraz przez $v_t(s; d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, d_3^{(3)})$, jeżeli wszyscy trzej gracze grali razem.

Można pokazać (zob. np. Howard [5]), że słuszna jest następująca rekurencyjna zależność dla dochodów:

$$v_t(s; d) = \sum_{s'=1}^{N} p(s'/s)\left[r(s'/s; d) + v_{t-1}(s'; d)\right], \tag{17}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przez $f(s;d)$ oznaczono odpowiednio v i r dla różnych koalicji (decyzji).

Przepiszmy (17) w postaci:

$$v_t(s; d) = \sum_{s'}^{N} p(s'/s) \cdot r(s'/s; d) + \sum_{s'=1}^{N} p(s'/s) \cdot v_{t-1}(s'; d) \tag{18}$$

i oznaczmy przez

$$q(s; d) = \sum_{s'=1}^{N} p(s'/s) \cdot r(s'/s; d) \tag{19}$$

jednokrokowy zysk procesu. Stąd

$$v_t(s; d) = q(s; d) + \sum_{s'=1}^{N} p(s'/s) \cdot v_{t-1}(s'; d). \tag{20}$$

Dla $t \to \infty, v_t(\cdot) \to \infty$. W celu otrzymania skończonych wartości dochodów dla każdego gracza wprowadźmy współczynnik dyskonta $\beta < 1$. Oznacza to, że wartość jednostki dochodu otrzymana na etapie t wynosi β^t. Wprowadzając współczynnik dyskonta β do (20) otrzymamy:

$$v_t(s;d) = q(s;d) + \beta \sum_{s'=1}^{N} p(s'/s) \cdot v_{t-1}(s';d). \tag{21}$$

Dla wygody dalszych rozważań zapiszmy wzór (21) w postaci wektorowej

$$\mathbf{V}_t(d) = \mathbf{q}(d) + \beta \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_{t-1}(d) \tag{22}$$

gdzie

$$\mathbf{V}_t(d) = [v_t(1;d)\ v_t(2;d)\ \cdots\ v_t(s;d)\ \cdots\ v_t(N;d)]^T \tag{23}$$

$$\mathbf{q}(d) = [q(1;d)\ q(2;d)\ \cdots\ q(s;d)\ \cdots\ q(N;d)]^T \tag{24}$$

oraz

$$\mathbf{V}_t(d) := \mathbf{V}_t(d_i^{(1)}) \cup \mathbf{V}_t(d_i^{(2)}, d_{i'}^{(2)}) \cup \mathbf{V}_t(d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, d_3^{(3)}) \tag{25}$$

$$i, i' = 1,2,3; i' \neq i.$$

$$\mathbf{q}(d) := \mathbf{q}(d_i^{(1)}) \cup \mathbf{q}(d_i^{(2)}, d_{i'}^{(2)}) \cup \mathbf{q}(d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, d_3^{(3)}) \tag{26}$$

$$i, i' = 1,2,3; i' \neq i.$$

Wracając do wzoru (22) łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_0, \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_1 = \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} + \beta^2 \cdot \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{V}_0, \\ \mathbf{V}_t &= \mathbf{q} + \beta^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{V}_0 + \sum_{t=1}^{t-1} \beta^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \tag{27}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{q} \equiv \beta^0 \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{q} \tag{28}$$

otrzymamy

$$\mathbf{V}_t = \beta^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{V}_0 + \sum_{t=0}^{t-1} \beta^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{q} \tag{29}$$

co dla $t \to \infty$ prowadzi do następującego wzoru:

$$\mathbf{V}_\infty = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{1} - \beta \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{q} \tag{30}$$

Ostatecznie

$$\mathbf{V}_\infty(d) = (\mathbf{1} - \beta \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{q}_{(d)} \tag{31}$$

Wzór ten pozwala na obliczenie oczekiwanych pełnych dochodów dla każdego gracza, w przypadku gdy gra on w k-osobowej koalicji, $k = 1,\ldots,n$ oraz stanem wyjściowym był stan s.

Korzystając z powyższych wzorów, można poszukiwać optymalnych decyzji dla każdego gracza w n-osobowej stochastycznej grze z koalicjami. Problem ten szczegółowo rozpatrzymy dla 3-osobowej gry, w której gracze są nierozróżnialni. Wprowadźmy w tym celu następujące upraszczające oznaczenia:

$$\begin{aligned} &v_\infty(s;d_i^{(1)}) = v(s;1) \\ &v_\infty(s;d_i^{(2)},d_{i'}^{(2)}) = v(s;2) \\ &v_\infty(s;d_1^{(3)},d_2^{(3)},d_3^{(3)}) = v(s;3) \Rightarrow v(s;k); \\ &s = 1,\dots,N; k = 1,2,3;\ \ i,i' = 1,2,3;\ \ i' \neq i. \end{aligned} \tag{32}$$

oraz

$$\begin{aligned} &q(d_i^{(1)}) = q(1) \\ &q(d_i^{(2)},d_{i'}^{(2)}) = q(2) \\ &q(d_1^{(3)},d_2^{(3)},d_3^{(3)}) = q(3) \Rightarrow q(k), k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{33}$$

Wówczas

$$\mathbf{V}_\infty(k) = (\mathbf{1} - \beta \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{q}(k),\quad s = 1,\dots,4;\quad k = 1,2,3. \tag{34}$$

gdzie

$$\mathbf{V}_\infty(k) = \left[v(1;k), v(2;k), v(3;k), v(4;k)\right]^T, k = 1,2,3. \tag{35}$$

oraz

$$\mathbf{V}_\infty(d) = \left[v_\infty(s;k)\right]_{s\times k} \tag{36}$$

Jest jasne, że każdy gracz powinien wybierać optymalną strategię w danej grze (przynależność do k-osobowej koalicji) według następującego kryterium:

$$v_{opt.} = v_\infty(s^0;k^0) = \max_k v(s;k) \tag{37}$$

Interpretacja wyniku $v(s^0;k^0)$ jest następująca: Każdy gracz powinien grać w k^0 - osobowej koalicji , k^0 =1,2,3 z prawdopodobieństwem $\pi(s^0)$, gdzie $\pi(s^0)$ jest prawdopodobieństwem stacjonarnym (ergodycznym) zajścia stanu $s^0 = 1,\dots,4$.

4. Idea przykładu

Zanim opiszmy jeden z możliwych wariantów n-osobowej stochastycznej gry z koalicjami, zauważmy, że w dostępnej literaturze nie ma informacji o takich grach. Tymczasem

szereg sytuacji rzeczywistych obserwowanych w praktyce z zakresu, na przykład wytrzymałości materiałów, rozwoju populacji komórkowych, seryjnej produkcji wyrobów na liniach montażowych oraz wielu innych sytuacji prowadzi do modelu n-osobowej stochastycznej gry z koalicjami.

Obecnie opiszemy grę, która może być modelem wielu rzeczywistych sytuacji przedstawionych wyżej.

N – osób stoi nad ruchomą taśmą, której grubość zmienia się losowo. Od grubości taśmy zależy jej wytrzymałość. W najcieńszym miejscu taśma może wytrzymać ciężar tylko jednej osoby; w najgrubszym – n-osób. Gracze w dyskretnych chwilach czasu $t = 0,1,2,...$ podejmują decyzję czy wchodzić na taśmę pojedynczo, czy też w koalicjach 2,3 lub więcej osobowych, ryzykując przy tym, że taśma może się zerwać. Wynagrodzenie każdego gracza w k-osobowej koalicji jest nie mniejsze niż w (k-1)-osobowej koalicji. Gracze nie wiedzą, jaka jest grubość taśmy w chwili t. Wiedzą jednak, jaki jest losowy rozkład jej grubości w czasie. Optymalną decyzją gracza w takiej grze będzie jego wybór takiej koalicji (strategii) dla $t \to \infty$, która da mu największy oczekiwany dochód.

W następnym artykule zostanie przedstawiony przykład zastosowania powyższej gry do modelowania problemu harmonogramowania linii montażowej w warunkach losowych.

5. Zakończenie

Przedstawiony i przeanalizowany w pracy model matematyczny n-osobowej stochastycznej gry z koalicjami jest próbą połączenia wieloosobowych kooperacyjnych gier [6] z niekooperacyjnymi dwuosobowymi grami stochastycznymi [4]. Model stochastycznego wieloetapowego problemu podejmowania decyzji z jednym decydentem był rozpatrywany przez Howarda [5]. Wręcz akademickim podręcznikiem z tego zakresu jest praca Chrzana [2]. W nieco innym ujęciu różne modele dwuosobowych nie kooperacyjnych gier stochastycznych były rozpatrywane przez Sheplye'a [8], Altmana i Szwartza [1] oraz Parthasarathy'ego [7]. W ich ujęciu zadanie programowania dynamicznego było zawężone w stosunku do Bellmanowskiego podejścia. W podobny sposób ujmuje zagadnienie Filar i Tolwiński [3] oraz Filar i Vrieze [4]. Sposób ten przedstawia zadanie programowania dynamicznego w postaci czterech obiektów S,A,q i r , gdzie S i A są to pewne niepuste mierzalne przestrzenie, q – odwzorowanie podające dla każdej pary $(s,a) \in S \times A$ rozkład prawdopodobieństwa $q(\cdot / s,a)$ na S, oraz r- ograniczona Baire'owska funkcja na $S \times A$..

W naszym ujęciu stochastyczna macierz prawdopodobieństw przejść z jednego stanu gry do drugiego jest niezależna od decyzji graczy . Macierz ta steruje dochodami graczy. W ten sposób mamy do czynienia ze stochastyczną grą, w której gracze tworzą różne możliwe koalicje w zależności od liczby grających oraz losowych warunków gry. Stąd decyzje podejmowane przez graczy o przynależności do $k \leq n, k = 1,...,n$ z etapu na etap, tzn. w chwilach $t = 0,1,2,...$, zależą od wektora prawdopodobieństw stanu początkowego n-osobowej gry oraz stochastycznej macierzy prawdopodobieństw przejść Odpowiednie wypłaty w takiej grze są ***skutkiem*** podjętej przez gracza decyzji, a nie ***przyczyną*** jego postępowania, jak to miało miejsce w dwuosobowej stochastycznej nie kooperacyjnej grze. Oczywiście, jak w jednym, tak i w drugim przypadku gry każdy gracz dąży do maksymalizacji swoich wygranych.

LITERATURA

4. G.E. Altman, and A. Szwartz.: Markov Decision Problems and State Action Frequencies. SIAM Journal on Control and Optimization, 29:4,786-809, 1991.
5. P. Chrzan, Markov decisions chains and their applications in economics. Akademia Ekonomiczna, Katowice, 1990 (in Polish).
6. J.A. Filar and B. Tolwinski.: On the algorithm of Pollatschek and Avi Itzhak. In T.E.S. Raghavan, T.S. Ferguson, T. Parthasarathy, and O.J. Vrieze, editors, Stochastic Games and Related Topics. Kluwer Academic Publishes, 1991.
7. J.Filar, and K. Vrieze.: Competitive Markov Decision Processes. Springer- Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1996.
8. R.A. Howard.: Dynamic Programming and Markov Process. John Wiley and Sons., Inc, New-York- London, 1960.
9. Kałuski J.: Game- Theoretical Model of the Assembly Line Balancing Problem. International Yearbook:" Game Theory and Applications". Vol.3, Nova Science Pbl., New York, 1997, (Ed. By Leon Petrosjan).
10. T.Partahasarathy,and T.E.S. Raghavan.: Some Topics in Two-Person Games. American Elsevier Publishing Comp., Inc. New-York, 1971.
11. L.C. Shapley.: Stochastic Games. Proceedings, Nat. Acad. Of Science USA, 39: 1095-1100, 1953.

Recenzent: Prof. dr inż. Tadeusz Puchałka

Abstract

In the work a coalitional n – person stochastic game is considered. The players can create k- person coalitions, k=1,...,n during the game. The decisions of the players belonging to a given coalition are realised at the discrete moment t=0,1,2..., called a stage of the game. At time t=0 the game starts. The possibilities for creating coalitions by players from stage to

stage change at random. Therefore at each stage the players choose possible strategies with the probability depending on random conditions of the game.

The question arises: How should players play in these conditions to maximise their payoffs ?

No doubt the answer depends on random conditions of the game at stage $t=0,1,2,...$, the beginning of game at moment $t=0$ and players' payoffs related to their adherence to k-person coalitions. Taking into account the randomness of the game it is obvious that adherence to two-or more person coalitions will not necessarily give better result than no coalition case. Therefore this problem is not trivial and it requires a careful analysis in order to attain the optimal strategies for each player.

The game under consideration will be called an n- person stochastic game with coalitions or a coalitional n- person stochastic game.

The aim of this work is to analyse this game considering the possibilities of construction of the mathematical model, as well as to analyse the asymptotic properties of the game and stability of coalitional structures and payoffs for each player, considering the coalitional equilibrium.

This work is organised as follows: In section 2 the formalised model of the game is presented. The coalitions in this game are created at random. Some properties and constraints on the subject are discussed. We assume that this model can be a discrete Markov decision process with finite states. The mathematical model distinguishes the state of stochastic game defined by the state for each player. The state of the game at the moment $t=0,1,2,...$ is a product of states for n- players. Considering random conditions of the game at the moment $t=0,1,2,...$ we notice that the game and the players can be in different states. We assume that the number of possible states of the game is finite and equals N. The state of the i-th player, $i=1,...,n$ is determined by his possibility of creating different k-person coalitions at time t.

In the work probability of the given state of game and players is calculated. Number N_1 of the state of the players and number N of the state of n- person stochastic game with coalitions is obtained, too. It is assumed that the states of the game generate a homogeneous Markov process with finite states. A transition probability matrix for this process is defined. Moreover, the vector of probability distributions for the initial state for a three-person game is calculated in the work.

In section 3 of the paper payoffs for each player are given. The payoff for each player depends on the number of persons taking part in a given coalition. The overall reward for each

player in the n- person stochastic game with coalitions is calculated if the initial state for each player is defined.

To obtain a finite expected overall reward for each player, the discount factor $\beta<1$ is introduced. In this way the mathematical model of an n- person stochastic game with coalitions for each player is a discounted Markov decision process with finite states. In this process the probability of transition from state to state is independent of the players' decisions, however, it depends on random conditions of the game. Finally, some remarks and conclusions about the described coalitional n- person stochastic game as well as appropriate references are presented.