ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 117 Energetyka z. 16 1964

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

PRZEBIEGI CZASOWE TEMPERATUR W UKŁADZIE PŁASKIM JEDNOWARSTWOWYM

Streszczenie. W pracy podano rozwiązanie zagadnienia brzegowego, sformułowanego przy pomocy równań (1)-(5) przy pomocy funkcji Greena i porównano je z analogicznymi rozwiązaniami problemu w przypadku nieskończenie dużej prędkości rozchodzenia się ciepła oraz nieskończenie dużej stałej przewodzenia temperatury. Jest to kontynuacja zagadnienia poruszonego w [6] dla symetrii sferycznej. Zagadnienie jest ważne dla problemów niestacjonarnej wymiany ciepła.

WSTĘP

W poprzednich pracach [5, 6] autor przedyskutował dwa czynniki, wpływające na przebiegi temperaturowe w układach jedno i dwuwarstwowych o symetrii kulistej: mianowicie wpływ ruchomych wskutek rozszerzalności cieplnej ograniczeń układu oraz wpływ skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła. Do rozwiązywania tego rodzaju zagadnień specjalnie wygodne są funkcje Greena. Ich tworzenie jest względnie proste w przypadku ciał o prostej konfiguracji w szczególności jednowarstwowych. W przypadkach bardziej złożonych przedstawia znaczne trudności. Dlatego w pracy niniejszej obrano układ prosty pod względem teoretycznym, jakkolwiek przedstawiający pewne trudności doświadczalne. Praca niniejsza jest częścią pierwszą obszerniejszej pracy, w której prócz ciał jednowarstwowych rozpatrywano także ciała dwuwarstwowe. Ponieważ w przypadku ciała dwuwarstwowego wyrażenia matematyczne komplikują się znacznie, co powiększyło objętość pracy, zdecydowano się na podział pracy na dwie części, mianowicie część poświęconą omawianiu własności ciał jednowarstwowych i część poświęconą omawianiu własności rozwiązań układów dwuwarstwowych.

Obrano jako wyjściowy przypadek najogólniejszy spośród trzech. Dla celów porównawczych omówiono również dwa inne przypadki graniczne, mianowicie układu w nieskończenie dużym współczynniku przewodzenia temperatury oraz o nieskończenie dużej prędkości rozchodzenia się ciepła. Pozwala to zorientować się, jak bardzo komplikuje się rozwiązanie, jeżeli współczynnik przewodzenia temperatury i prędkość rozchodzenia się ciepła posiadają wartości skończone.

Istnieje szereg metod budowy funkcji Greena. Zagadnienie to omówiono szerzej w pracy [7]. W pracy niniejszej obrano metodę opartą na transformacji Laplace'a, wzorując się na [3]. Metoda ta daje rozwiązania w formie szeregów lub sum skończonych funkcji Greena. Ponieważ posługiwano się funkcjami Greena zdefiniowanymi dla nieskończonego przedziału zmienności zmiennej niezależnej, spełnienie warunków brzegowych na granicy ciała, wymaga użycia nieskończonych lub skończonych ilości funkcji Greena. Fizykalnie oznacza to realizację pewnego rozkładu temperatury przez odpowiednie rozmieszczenie źródeł ciepła. Metodą zastosowaną w pracy otrzymuje się w możliwie prosty sposób funkcje opisujące poszczególne źródła.

Wyprowadzone funkcje Greena odnoszą się do układu o niezerowych wartościach brzegowych. Nie jest to wadą, ponieważ postępując dokładnie tak samo można otrzymać funkcje Greena dla zerowych warunków brzegowych przez odpowiednią modyfikację sformułowania zagadnienia [8] i w razie potrzeby uwzględnienie niezerowych warunków metodą klasyczną [8] czy też przy pomocy twierdzenia o splocie.

Takie podejście do zagadnienia jest wygodne, jako wyróżniające rolę granic, w szczególności do zagadnień z ruchomymi granicami [2].

SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przewodnik płaski w kierunku poprzecznym nieskończony o a_1 współczynniku przewodzenia temperatury i c_1 prędkości rozchodzenia się ciepła, rozciąga się od $x=0$ do $x=b$ (rys. 1). Temperatura otoczenia, znajdującego się w obszarze $x > b$ zmienia się według następującego prawa

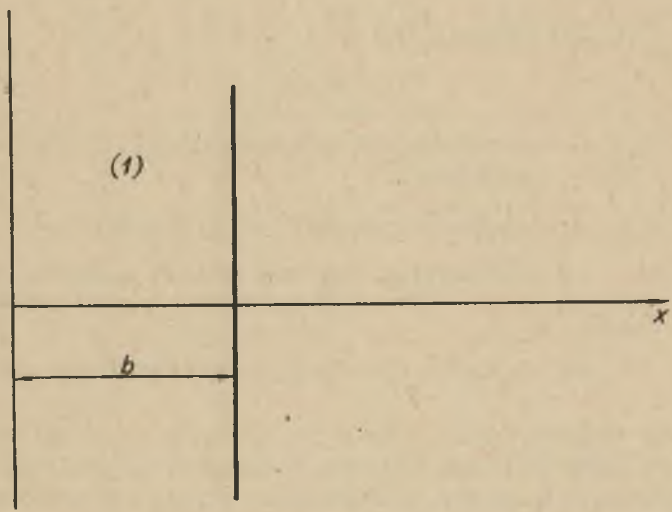
$$t(\tau) = \sum_{k=1}^{n} B_k e^{\alpha_k \tau} + \Theta \tag{1}$$

gdzie:

$t(\tau)$ - temperatura,

τ - czas,

B_k, Θ - stałe rzeczywiste, α_k stałe rzeczywiste ujemne.



Rys. 1. Konfiguracja układu rozpatrywanego

Aby mieć możność porównania rozwiązań z rozwiązaniami otrzymanymi dla przypadku kulistego, przyjęto ścianę $x=0$ jako adiabatyczną, to znaczy strumień ciepła w kierunku ujemnej osi x przyjęto równy zeru.

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE PROBLEMU

Równanie różniczkowe problemu przyjmujemy w następującej postaci:

$$(1/a_1)\,\partial t_1(x,\tau)\,/\partial\tau + (1/c_1^2)\,\partial^2\, t_1(x,\tau)\,/\partial\tau^2 =$$

$$= \partial^2\, t_1(x,\tau)\,/\,\partial x^2 \qquad (2)$$

przy czym t_1 - temperatura ciała.

WARUNKI BRZEGOWE

$$t_1(x,0) = t_{1,o} \qquad dt_1(x,0)/d\tau = t'_{1,o}, \tag{3}$$

$$\partial t_1(0,\tau)/\partial x = 0 \tag{4}$$

$$\partial t_1(b,\tau)/\partial x = (\bar{\alpha}/\lambda_1)(t_1(b,\tau) - t(\tau)) \tag{5}$$

gdzie:

$t_{1,o}$, $t'_{1,o}$ – wartości początkowe funkcji i jej pierwszej pochodnej,

$\bar{\alpha}$ – współczynnik wnikania ciepła,

λ_1 – współczynnik przewodzenia ciepła.

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

W pracy podamy wyniki końcowe, odsyłając czytlenika do przypisów, gdzie podane są szczegółowe obliczenia.

Transformatę Laplace'a rozwiązania zagadnienia można napisać w postaci następującej

$$T_1(x,p) - t_{1,o}/p - t'_{1,o}/c_1^2 q_1^2 = (\bar{\alpha}/\lambda_1)\left[e^{q_1(x-b)} + e^{-q_1(x+b)}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} B_k/(p-\alpha_k) + \Theta/p\right]/\left[(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1) - (q_1 - \bar{\alpha}/\lambda_1)\, e^{-2q_1 b}\right] \tag{6}$$

Oznaczenia jak w przypisach.

Rozpatrzono następujące przypadki:

1) w mianowniku (6) pomijamy wyraz zawierający $e^{-2q_1 b}$, jako mały w porównaniu z wyrazem pozostałym,

2) przypadek ogólny.

Trzy przypadki, omówione we wstępie otrzymujemy specyfikując wartości q_1 oraz $t_{1,o}$.

PRZYPADEK 1

a) $$q_1 = \sqrt{p/a_1 + p^2/c_1^2}$$

W tym przypadku otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$t_1(x,\tau) = t_{1,o} - t'_{1,o}\left(e^{-(c_1^2/a_1)\tau} - 1\right)/(c_1^2/a_1) +$$

$$+ (\bar{\alpha}/\lambda_1)\Theta\cdot L^{-1}(I + II) + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\sum_{k=1}^{n} B_k\, L^{-1}(III + IV)_k \tag{7}$$

gdzie L^{-1} oznacza przejście od transformat Laplace'a do funkcji czasowej

$$L^{-1}(I + II) = \left[\int_0^{\tau} d\tau \left\{ e^{-(c_1^2/2a_1)\tau}\, I(x,\tau) - (\bar{\alpha}/\lambda_1)\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\int_0^{\tau}\left[e^{-(c_1^2/2a_1)(\tau - \bar{\tau})}\cdot I(x,\tau - \bar{\tau})\right]\left[c_1\, e^{-(c_1^2/2a_1 + c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)\bar{\tau}} +\right.$$

$$\left. + (c_1^2/2a_1)\int_0^{\bar{\tau}} I(u)\, du\cdot e^{-(c_1^2/2a_1 + c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)\sqrt{\bar{\tau}^2 - u^2}}\, d\bar{\tau}\right\} \tag{8}$$

$$L^{-1}(III+IV)_k = \left[\int_0^{\tau} d\bar{\bar{\tau}}\; e^{\alpha_k(\tau-\bar{\tau})}\left\{e^{-(c_1^2/2a_1)\tau}\cdot I(x,\bar{\tau})\right\} -\right.$$

$$- (\bar{\alpha}/\lambda_1)\int_0^{\bar{\tau}}\left\{e^{-(c_1^2/2a_1)(\bar{\tau}-\bar{\bar{\tau}})}\; I(x,\bar{\tau}-\bar{\bar{\tau}})\cdot\right.$$

$$\cdot\left[c_1\, e^{-(c_1^2/2a_1 + c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)\bar{\bar{\tau}}} + (c_1^2/2a_1)\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\int_0^{\bar{\bar{\tau}}} e^{-(c_1^2/2a_1 + c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)\sqrt{\bar{\bar{\tau}}^2 - u^2}}\cdot I_1(u)\,du\right]d\bar{\bar{\tau}}\right\} \tag{9}$$

przy czym

$$I(x,\tau) = I_0\left[(c_1^2/2a_1)\sqrt{\tau^2 - (b-x)^2/c_1^2}\right] +$$

$$+ I_0\left[(c_1^2/2a_1)\sqrt{\tau^2 - (x+b)^2/c_1^2}\right] \tag{10}$$

gdzie $I_0(z)$, $I_1(z)$ funkcje Bessela urojonego argumentu. Wyrażenie (7) przedstawia więc dwa rozwiązania: $0 \leqslant c_1\tau \leqslant b \pm x$ rozwiązanie jest równe zeru, dla $c_1\tau > b \pm x$ otrzymujemy wypisane powyżej rozwiązanie. Taki obraz odpowiada przypadkowi skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła.

b) $q_1 = p/c_1$.

W tym przypadku otrzymuje się następujące rozwiązanie:

$$t_1(x,\tau) = t_{1,o} + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\theta\cdot L^{-1}(I + II) +$$

$$+ (\bar{\alpha}/\lambda_1)\sum_{k=1}^{n} B_k\, L^{-1}(III + IV)_k \tag{11}$$

$$L^{-1}(I + II) = \int_0^{\tau} d\tau_k \; c_1 \; E(x,\tau) \tag{12}$$

$$L^{-1}(III + IV) = \int_0^{\tau} e^{\alpha_k(\tau - \bar{\tau})} d\bar{\tau} \cdot c_1 \; E(x,\bar{\tau}) \tag{13}$$

$$E(x,\tau) = e^{-(c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)(\tau-(b-x)/c_1)} + e^{-(c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)(\tau-(b+x)/c_1)} \tag{14}$$

Jest to rozwiązanie równania falowego.

c) $\quad q_1 = \sqrt{p/a_1}$.

W tym przypadku otrzymuje się następujące rozwiązanie:

$$t_1(x,\tau) = t_{1,o} + \theta(\bar{\alpha}/\lambda_1)\, L^{-1}(I+II) + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\sum_{k=1}^{n} B_k\, L^{-1}(III+IV)_k \tag{15}$$

$$L^{-1}(I+II) = \int_0^{\tau} d\tau \left\{ \pi^{-1/2} \tau^{-1/2} F_1(x,\tau) - (\bar{\alpha}/\lambda_1) F_2(x,\tau) \right\} \sqrt{a_1} \tag{16}$$

$$L^{-1}(III + IV)_k = \int_0^{\tau} e^{\alpha_k(\tau-\bar{\tau})} d\bar{\tau} \left\{ \pi^{-1/2} \bar{\tau}^{-1/2} F_1(x,\bar{\tau}) - (\bar{\alpha}/\lambda_1) F_2(x,\bar{\tau}) \right\} \sqrt{a_1} \tag{17}$$

$$F_1(x,\tau) = e^{-(b-x)^2/4 a_1 \tau} + e^{-(b+x)^2/4 a_1 \tau} \tag{18}$$

$$F_2(x,\tau) = e^{(\bar{\alpha}/\lambda_1)(b-x)\sqrt{a_1} + (\bar{\alpha}^2/\lambda_1^2)a_1\tau} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{erf} c \left[(1/2)(b-x)\tau^{-1/2}\sqrt{a_1} + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\tau^{1/2} \right] +$$

$$+ e^{(\bar{\alpha}/\lambda_1)(b+x)\sqrt{a_1} + (\bar{\alpha}^2/\lambda_1^2)a_1\tau} \cdot \operatorname{erf} c \left[(1/2)(b+x) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \tau^{-1/2}/\sqrt{a_1} + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\tau^{1/2} \right] \tag{19}$$

Przypadek ten odpowiada równaniu przewodnictwa ciepła z nie skończoną prędkością rozchodzenia się.

PRZYPADEK 2

W podprzypadkach a), b), c) można rozwiązanie napisać w postaci:

$$t_1(x,\tau) - t_{1,o} + t'_{1,o} \cdot \psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} T_1(b+2\,nb \pm x,\tau) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2(\bar{\alpha}/\lambda_1) \int_0^{\tau} T_1(b + 2nb \pm x, \tau - \tau')\, d\tau' \cdot$$

$$\cdot \phi(\tau') \binom{n}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^2(\bar{\alpha}/\lambda_1)^2 \binom{n}{2} \int_0^{\tau} \phi(x, \tau - \tau')\, d\tau' \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau'} T_1(b + 2n\, b \pm x, \tau'')\, \phi(x, \tau' - \tau'')\, d\tau'' + \ldots \tag{20}$$

gdzie:

w przypadku a)

$$\psi(\tau) = t_{1o}'\left[e^{-(c_1^2/a_1)\tau} - 1\right]/(c_1^2/a_1) \tag{21}$$

w przypadku b)

$$\psi(\tau) = t_{1o}' \cdot \tau \tag{22}$$

w przypadku c)

$$\psi(\tau) = 0 \tag{23}$$

Wartości wyrażeń $T_1(b \pm x,\tau)$ oraz $\phi(x,\tau)$ znajdujemy w przypisach (P 22) oraz (P 23), przy czym w przypadkach a), b), c) należy za pierwszą funkcję podstawić odpowiednio (7) (11), (15), natomiast za drugą (P12), (P 24), (P 25).

Oznaczone kropkami w formule (20) pominięte wyrazy są tworzone podobnie jak poprzednie, przy czym w każdym następnym występuje jedna nowa całka z funkcji $T_1(b + 2n\,b \pm x, \tau - \tau')$ i czynnik $2(\bar{\alpha}/\lambda_1)$ oraz zmienia się mianownik wyrażeń na współczynniki dwumienne o 1.

Jak widać z porównania formuły (20) z formułami przypadku 1, te ostatnie zawierają tylko pierwsze człony formuły (20).

Otrzymane wyrażenie można zinterpretować w ten sposób, że w tym przypadku otrzymujemy nieskończony szereg źródeł, których położenie jest zależne od argumentu $\pm\,2n\,b$.

LITERATURA

[1] Erdelyi A.: Tables of integral transforms, vol. 1, Mc Graw Hill, N.York, 1954.

[2] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, cz. 1, PWN W-wa 1957.

[3] Łykow A.W.: Tieorie tiepłoprowodnosti, Gos.Izd.T.T. Lit. Moskwa 1952.

[4] Ryżik I.M., Gradstejn I.S.: Tablicy integrałow, summ, riadow i projzwiedienij, Gos.Izd.T.T.Lit. Moskwa 1951.

[5] Szpilecki J.: Wpływ przewodnictwa cieplnego na zmiany objętości w ciele kulistym dwuwarstwowym, Z.N.Pol.Śl., Energetyka nr 6, 1961.

[6] Szpilecki J.: Wpływ skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła na zjawiska przewodnictwa ciepła w układzie kulistym jedno i dwuwarstwowym (w druku).

[7] Szpilecki J.: Związki między funkcjami Greena w przypadku równania przewodnictwa ciepła i równania falowego (przygot. do druku).

[8] Tichonow A.N., Samarskij A.A.: Urawnienia matematiczeskoj fizyki, Gos.Izd.T.T. Lit. Moskwa 1951.

PRZYPISY

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1) - (5) metodą całki Laplace'a [1, 4]

Jeżeli transformatę Laplace'a funkcji $t(x,\tau)$ oznaczymy przez $\bar{T}(x,p)$, gdzie p parametr transformacji, otrzymujemy transformatę równania (2)

$$d^2\, T_1(x,p)/dx^2 = q_1^2\, T_1(x,p) - (q_1^2/p)\, t_{1,o} - t_{1,o}'/c_1^2 \qquad (P\ 1)$$

gdzie

$$q_1 = \sqrt{p/a_1 + p^2/c_1^2} \tag{P 2}$$

Transformaty warunków brzegowych posiadają następującą postać:

$$dT_1(0,p)/dx = 0 \tag{P 3}$$

$$dT_1(b,p)/dx = - (\bar{\alpha}/\lambda_1) \left[T_1(b,p) - T(p)\right]$$

Transformata rozwiązania problemu posiada następującą postać

$$T_1(x,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}'/c_1^2 q_1^2 =$$

$$= \text{ch}\, q_1 x \, (\bar{\alpha}/\lambda_1)\, T(p) \left[q_1 \,\text{sh}\, q_1 b + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\,\text{ch}\, q_1 b\right] \tag{P 4}$$

W celu przejścia do funkcji Greena wygodnie jest to równanie napisać w postaci (6).

PRZYPADEK 1

Transformatę rozwiązania możemy w tym przypadku napisać w postaci:

$$T_1(x,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}'/c_1^2 q_1^2 = (\bar{\alpha}/\lambda_1)\, \Theta\,(I + II) +$$

$$+ (\bar{\alpha}/\lambda_1) \sum_{k=1}^{n} B_k(III + IV)_k \tag{P 5}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} I &= e^{q_1(x-b)}/[p(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1)] \\ II &= e^{-q_1(x+b)}/[p(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1)] \\ III &= e^{q_1(x-b)}/[(p-\alpha_k)(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1)] \\ IV &= e^{-q_1(x+b)}/[(p-\alpha_k)(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1)] \end{aligned}\right\} \qquad (P\ 6)$$

a) $q_1 = \sqrt{p/a_1 + p^2/c_1^2}$

W tym przypadku wyrażenia I - IV można napisać w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} I &= A\ \ B\ \ (1/p) \\ II &= A'\ \ B\ \ (1/p) \\ III &= A\ \ B\ \ (1/(p-\alpha_k)) \\ IV &= A'\ B\ \ (1/(p-\alpha_k)) \\ A &= e^{q_1(x-b)}/q_1 \\ A' &= e^{-q_1(x+b)}/q_1 \\ B &= q_1/(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1) \end{aligned}\right\} \qquad (P\ 7)$$

Obliczenie funkcji czasowych

$$L^{-1}\{A\} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant c_1 < b-x \\ e^{-(c_1^2/2a_1)\tau} I_0\left[(c_1^2/2a_1)\sqrt{\tau^2 - (b-x)^2/c_1^2}\right] & \text{dla} \quad c_1 \geqslant b-x \end{cases} \qquad (P\ 8)$$

$$B = 1 - C \qquad (P\ 9)$$

gdzie

$$C = (\bar{\alpha}/\lambda_1)/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1) \qquad (P\ 10)$$

dla obliczenia funkcji czasowej, odpowiadającej C, korzystamy z znanego twierdzenia [1]:

Obliczamy pomocniczo

$$L^{-1}\left\{1/\left[(p + c_1^2/2a_1)/c_1 + (\bar{\alpha}/\lambda_1)\right]\right\} =$$

$$= c_1\, e^{-(c_1^2/2a_1 + c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)\tau} = f(\tau) \qquad (P\ 11)$$

wtedy

$$L^{-1}\{C\} = -(\bar{\alpha}/\lambda_1)\left\{f(\tau) + (c_1^2/2a_1c_1)\int_0^\tau f\left[(\tau^2-u^2)^{1/2}\right]\cdot I_1(u)du\right. \qquad (P\ 12)$$

Tu $I_0(u)$, $I_1(u)$ są to funkcje Bessela urojonego argumentu. Stosując do otrzymanych wyrażeń twierdzenie o splocie otrzymujemy prosto rozwiązanie (7).

b) $q_1 = p/c_1$

W tym przypadku z (P 6) otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= A \quad (1/p) \\ \mathrm{II} &= A' \quad (1/p) \\ \mathrm{III} &= A \quad [1/(p-\alpha_k)] \\ \mathrm{IV} &= A' \quad [1/(p-\alpha_k)] \\ A &= e^{p(x-b)/c_1}/(p/c_1+\bar{\alpha}/\lambda_1) \\ A' &= e^{-p(x+b)/c_1}/(p/c_1+\bar{\alpha}/\lambda_1) \end{aligned}\right\} \qquad (P\ 13)$$

Tu wystarczy obliczyć funkcję czasową

$$L^{-1}\left\{A\right\} = c_1\, e^{-(c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)(\tau-(b-x)/c_1)} \qquad (P\ 14)$$

Stąd prosto dochodzimy do rozwiązania (11).

c) $q_1 = \sqrt{p/a_1}$

W tym przypadku wyrażenia I-IV posiadają postać (P 13), przy czym

$$\left.\begin{aligned} A &= e^{q_1(x-b)}/(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1) \\ A' &= e^{-q_1(a+b)}/(q_1+\bar{\alpha}/\lambda_1) \end{aligned}\right\} \qquad (P\ 15)$$

Obliczenie funkcji czasowej

Wystarczy obliczyć

$$L^{-1}\left\{A\right\} = \pi^{-1/2}\,\tau^{-1/2}\,e^{-(b-x)^2/4a_1\tau} -$$

$$-(\bar{\alpha}/\lambda_1)e^{(\bar{\alpha}/\lambda_1)(b-x)\sqrt{a_1}+(\bar{\alpha}^2/\lambda_1^2)a_1\tau}\ \text{erf c}\left[(1/2)(b-x)\tau^{1/2}/\sqrt{a_1}+\right.$$

$$\left.+(\bar{\alpha}/\lambda_1)\tau^{1/2}\right]\sqrt{a_1} \qquad (P\ 16)$$

Stąd **prosto** otrzymujemy rozwiązanie (15).

Występująca w równaniu (P 16) funkcja erf c x określona jest następująco:

$$\text{erf c}\ x = 1 - \text{erf}\ x = (2/\sqrt{\pi})\int_x^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad (P\ 17)$$

$$\text{erf}\ x = (2/\sqrt{\pi})\int_0^{x} e^{-x^2}\,dx \qquad (P\ 18)$$

PRZYPADEK 2

Uwzględniając pełny mianownik (6) możemy przejść od rozwiązań przypadku I do szukanych rozwiązań, mnożąc transformaty rozwiązań przypadku I przez szereg

$$1 + P\,e^{-2q_1 b} - P^2\,e^{-4q_1 b} + P^3\,e^{-6q_1 b} - \ldots\ldots \qquad (P\ 19)$$

gdzie

$$P = (q_1 - \bar{\alpha}/\lambda_1)/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1) = 1-2\,(\bar{\alpha}/\lambda_1)/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1) \qquad (P\ 20)$$

dla wyższych potęg na podstawie twierdzenia o potęgach dwumianu

$$P^n = 1 - \binom{n}{1} 2 (\bar{\alpha}/\lambda_1)/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1) + \binom{n}{2} 2^2(\bar{\alpha}/\lambda_1)^2/$$

$$/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1)^2 - \ldots + (-1)^n 2^n(\bar{\alpha}/\lambda_1)^n/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1)^n \tag{P 21}$$

W szeregu (P 19) występują z wyjątkiem pierwszego wyrazu, wyrazy zawierające po dwa czynniki, z których jednym jest P^n, drugim funkcja wykładnicza. Funkcję wykładniczą można rozpatrywać razem z funkcją występującą w A lub A′. Wtedy w argumencie w miejsce $b \pm x$ występują $b+2n$ $b \pm x$, gdzie $n = 0, 1, 2\ldots$

Stosując do wyrażeń zawierających człon $(\bar{\alpha}/\lambda_1)^n/(q_1+\bar{\alpha}/\lambda)^n$ twierdzenie o splocie tyle razy, ile wskazuje wykładnik potęgowy n, otrzymujemy rozwiązanie w postaci (20), przy czym oznaczono w rozwiązaniach (7), (11) i (15) przypadku a), b) i c)

$$t_1(x,\tau) - t_{1,o} - t'_{i,o}(e^{-(c_1^2/a_1)\tau} - 1)/(c_1^2/a_1) = T(b \pm x,\tau) \tag{P 22}$$

oraz

$$L^{-1}\left\{1/(q_1 + \bar{\alpha}/\lambda_1)\right\} = \phi(x,\tau) \tag{P 23}$$

Ostatnia funkcja może być obliczona w przypadku a) według wzoru (P 12).

W przypadku b)

$$\phi(x,\tau) = c_1\, e^{-(c_1\bar{\alpha}/\lambda_1)\tau} \tag{P 24}$$

W przypadku c)

$$\phi(x,\tau) = \sqrt{a_1}\Big[\pi^{-1/2}\tau^{-1/2} - (\sqrt{a_1}\bar{\alpha}/\lambda_1)\, e^{a_1(\bar{\alpha}^2/\lambda_1^2)\tau}.$$

$$\cdot\, \mathrm{erf\,c}\left[\sqrt{a_1}\,(\bar{\alpha}/\lambda_1)\tau^{1/2}\right]\Big] \tag{P 25}$$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТ ВРЕМЕНИ В ПЛОСКОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Р е з ю м е

В работе дано решение задачи крайних значений (1) - (5), используя функции Грина и сравнено с аналогическими решениями задачи в случае бесконечно большой скорости движения теплоты и бесконечно большой константы проводимости температуры. Работа является продолжением проблемы [6] для сферической симметрии. Предложенное решение имеет значение для задачи нестационарного обмена теплоты.

TEMPERATURE FUNCTIONS OF TIME IN A PLANE ONE-LAYER SYSTEM, EXCHANGING HEAT WITH A SECOND MEDIUM, TAKING INTO CONSIDERATION THE HEAT CONDUCTIVITY AND THE FINITE HEAT PROPAGATION VELOCITY

S u m m a r y

In the paper is the solution given of eigenvalue problem (1)-(5) with use of Green functions and compared with analogous solutions in the case of infinite heat propagation velocity and infinite temperature conduction constant. It is the continuation of the problem of [6] for spherical symmetry. The solution is of importance for nonstationary heat exchange problems.