ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: Energetyka z. 18 Nr kol. 129

STANISŁAW JERZY GDULA
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

O ANALOGII PEWNYCH PRZYPADKÓW NIEUSTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie. Wykazano analogię pomiędzy nieustalonym przewodzeniem ciepła w ciele stałym zanurzonym w środowisku o zmieniającej się w czasie temperaturze i nieustalonym przewodzeniem ciepła w ciele stałym z równomiernie rozłożonymi źródłami wewnętrznymi, zanurzonym w środowisku o niezmiennej temperaturze.

1. Wstęp

Przy rozwiązywaniu czy to analityczno-rachunkowym, czy też doświadczalnym różnych problemów technicznych stosujemy często teorię podobieństwa. Dzięki zastąpieniu zmiennych i parametrów opisujących zjawisko bezwymiarowymi ich kombinacjami uzyskujemy wyraźne zmniejszenie ilości zmiennych. Rozważania analityczne i ich wyniki rachunkowe zyskują dzięki temu na zwartości i przejrzystości. Korzyści jakie daje zmniejszenie ilości zmiennych przy badaniach doświadczalnych nie potrzeba uzasadniać. Należy tylko dodać, że dla zmiany wartości bezwymiarowych wielkości zredukowanych wystarczy zmieniać tylko po jednej z występujących w nich wielkości bezwzględnych i w tym celu można wybrać tylko te, które najłatwiej jest uzmiennić. Dodatkową korzyścią jest uniezależnienie się od układów jednostek, co jest szczególnie istotne przy opracowywaniu wzorów empirycznych - wzory te podane w formie kryterialnej mają własności równań wielkościowych.

Teoria podobieństwa jest podstawą do modelowania zjawisk, umożliwiającego wykonanie badań w najdogodniejszej do tego celu skali (nie tylko geometrycznej). Z podobieństwem wiąże się bardzo ściśle analogia, a ze zwykłym modelowaniem - modelowanie analogowe. Powiązanie to wynika stąd, że w obu wypadkach stosujemy te same prawa i te same metody. Modelowanie analogowe jest jeszcze jednym krokiem dalej na drodze do ułatwienia i udogodnienia doświadczeń. Poza wszystkimi korzyściami, jakie daje zwykłe modelowanie oparte tylko na podobieństwie, modelowanie analogowe umożliwia zamianę pewnych niedogodnych do pomiaru wielkości innymi. Wiąże się to ze zmianą obiektu badanego (modelu) na inny, łatwiejszy do zrealizowania i badania.

2. Identyczność, podobieństwo, analogia

Najprymitywniejszym modelem jest model odtwarzający dokładnie badany obiekt i zachodzące w nim zjawisko. Oba zjawiska (w modelu i obiekcie) zachodzą w układach geometrycznych identycznych (przystających). Są to zjawiska te same, a więc opisane tymi samymi równaniami różniczkowymi i warunkami brzegowymi, a występujące w tych równaniach wielkości geometryczne i fizyczne mają te same wartości liczbowe. Zjawiska spełniające powyższe warunki nazywamy zjawiskami i d e n t y c z n y m i.

Zjawiskami p o d o b n y m i mogą być tylko zjawiska fizycznie takie same, a więc opisane takimi samymi równaniami różniczkowymi i warunkami brzegowymi, w których poszczególne wielkości mają ten sam sens fizyczny. Jednak pozostałe warunki konieczne dla zaistnienia podobieństwa są łagodniejsze niż przy identyczności. W miejsce identyczności geometrii układów w których zachodzą zjawiska, wymagane jest tylko podobieństwo geometryczne. Również wielkości fizyczne opisujące zjawiska podobne nie muszą mieć tych samych wartości liczbowych. Warunek ten muszą spełniać jedynie pewne ich kombinacje zwane kryteriami podobieństwa (wielkościami zredukowanymi), wiążące się również, poprzez charakterystyczny rozmiar geometryczny układu, z jego skalą geometryczną. Kryteria podobieństwa otrzymuje się z analizy równań różniczkowych i warunków brzegowych lub też innymi metodami [4].

Zjawiskami a n a l o g i c z n y m i mogą być zjawiska fizycznie różne, ale opisane tymi samymi równaniami różniczkowymi i warunkami brzegowymi. Wystarczy przy tym, by choć jedna wielkość występująca w równaniach opisujących zjawisko była fizycznie inna. Odpowiadające sobie i różne fizycznie wielkości w dwu zjawiskach analogicznych nazywamy a n a l o g a m i.

Analogia zjawisk znajduje praktyczne zastosowanie (przy modelowaniu analogowym) dopiero po połączeniu jej z podobieństwem. Dwa zjawiska analogiczne są podobne, jeżeli przebiegają w układach geometrycznie podobnych, są opisane identycznymi równaniami kryterialnymi, a występujące w tych równaniach i odpowiadające sobie kryteria są równe. Odpowiadające sobie kryteria o fizycznie różnym znaczeniu nazywamy również analogami. Niekiedy analogia uwidacznia się dopiero po sprowadzeniu równań opisujących zjawiska do postaci kryterialnej.

3. Analogia nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym ze źródłami wewnętrznymi i w ciele stałym zanurzonym w środowisku o zmiennej temperaturze

Jeżeli jednorodne, izotropowe ciało stałe o temperaturze początkowej ϑ_p, wewnątrz którego działa równomiernie rozłożone wewnętrzne źródło ciepła o jednostkowym (objętościowym) natężeniu $\dot{q}_w$, umieścimy w środowisku płynnym o temperaturze t, to wewnątrz ciała będzie zachodzić nieustalone przewodzenie ciepła, przy jednoczesnym konwekcyjnym przepływie ciepła na powierzchni ciała. Jeżeli natężenie wewnętrznego źródła ciepła nie zmienia się w czasie, to w wyniku nieustalonego przewodzenia ciepła ciało osiąga (teoretycznie po czasie nieskończenie długim) pewien stan ustalony. Przy nieustalonym przewodzeniu ciepła temperatura ciała jest funkcją współrzędnych i czasu $\vartheta = \vartheta(\bar{r},\tau)$, natomiast w stanie ustalonym rozkład temperatur jest niezmienny $\vartheta_s = \vartheta_s(\bar{r})$, przy czym

$$\vartheta_s(\bar{r}) = \lim_{\tau \to \infty} \vartheta(\bar{r},\tau). \tag{1}$$

W stanie ustalonym ilość ciepła wytwarzanego przez źródła wewnętrzne jest równa ilości ciepła oddawanego na drodze konwekcji do środowiska.

Nieustalone przewodzenie ciepła opisuje równanie Fouriera-Kirchhoffa [3]

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta + \frac{\dot{q}_w}{c\varrho}, \tag{2}$$

które jest spełnione wraz z warunkiem brzegowym

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha(\vartheta - t) \quad \text{dla} \quad \bar{r} \in s \tag{3}$$

(n oznacza normalną zewnętrzną do powierzchni s ciała) i warunkiem początkowym

$$\vartheta = \vartheta_p \qquad \text{dla} \quad \tau = 0. \tag{4}$$

Wprowadzamy następujące bezwymiarowe wielkości zredukowane: zredukowane współrzędne

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}}{l_o}, \quad N = \frac{n}{l_o}, \tag{5}$$

zredukowaną temperaturę

$$\Theta = \frac{\vartheta - t}{\vartheta_p - t}, \tag{6}$$

zredukowany czas(liczbę Fouriera)

$$(Fo) = \frac{a\tau}{l_o^2}, \tag{7}$$

liczbę Biota

$$(Bi) = \frac{\alpha l_o}{\lambda} \tag{8}$$

oraz zredukowane natężenie wewnętrznego źródła ciepła

$$K_q = \frac{\dot{q}_w l_o^2}{\lambda(\vartheta_p - t)}. \tag{9}$$

W równaniach powyższych l_o jest charakterystycznym rozmiarem liniowym ciała stałego.

Ponieważ λ, c i ϱ nie zależą od współrzędnych (ciało jednorodne) a t nie zależy od czasu (stała temperatura środowiska), więc po wprowadzeniu wielkości (5) – (9) do równań (2) - (4) otrzymujemy równania kryterialne

$$\frac{\partial\Theta}{\partial(Fo)} = \nabla^2\Theta + K_q, \tag{10}$$

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial N} = (Bi)\Theta \quad \text{dla} \quad \bar{R}\in S, \tag{11}$$

$$\Theta = 1 \quad \text{dla} \quad (Fo) = 0. \tag{12}$$

Np. dla uzyskania równania (10) należy w równaniu (2) zastąpić ϑ przez $(\vartheta - t)$, a następnie całe równanie pomnożyć obustronnie przez wyrażenie $\frac{l_o^2}{a(\vartheta_p - t)}$. Wciągając odpowiednie (stałe) wielkości pod znaki różniczek dochodzimy do równania (10). W równaniu tym operator Laplace'a jest również operatorem zredukowanym, gdyż występujące w nim pochodne liczone są względem zredukowanych współrzędnych.

Rozwiązanie równania różniczkowego (10) przy warunkach (11) i (12) doprowadza do wynikowego równania kryterialnego

$$\Theta = \Theta(\bar{R}, (Fo), (Bi), K_q). \tag{13}$$

W ogólnym wypadku, jeżeli natężenie wewnętrznego źródła ciepła jest funkcją czasu, kryterium K_q zależy od liczby Fouriera $K_q = K_q(Fo)$. Najczęściej jednak mamy do czynienia ze stałym natężeniem źródła ciepła i wówczas po czasie nieskończenie długim dochodzimy do stanu ustalonego opisanego równaniem kryterialnym

$$\Theta_s = \Theta_s(\bar{R}, (Bi), K_q) = \lim_{(Fo)\to\infty} \Theta(\bar{R},(Fo),(Bi),K_q). \tag{14}$$

Rozpatrzmy z kolei nieustalone przewodzenie ciepła w ciele stałym bez wewnętrznych źródeł ciepła lecz zanurzonym w środowisku o zmiennej w czasie temperaturze $t = t(\tau)$. Zmienność w czasie temperatury środowiska wyklucza osiągnięcie stanu ustalonego i zjawisko jest zawsze zjawiskiem nieustalonym.

Równanie Fouriera-Kirchhoffa ma w tym wypadku postać

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta, \tag{15}$$

a warunki brzegowy i początkowy są te same co poprzednio (równ. (3) i (4)). Porównanie równania (15) z równaniem (2), mimo identyczności warunki brzegowego i początkowego, nie wskazuje na żadne powiązania obu zjawisk. Sprowadźmy jednak równanie (15) wraz z towarzyszącymi mu warunkami do postaci kryterialnej. W tym celu użyjemy bezwymiarowych wielkości zredukowanych określonych równaniami (5), (7) i (8) oraz zredukowanej temperatury

$$\theta = \frac{\vartheta - t}{\vartheta_p - t_p} \tag{16}$$

i kryterium określającego zmienność temperatury środowiska

$$K_t = \frac{l_p^2}{a(t_p - \vartheta_p)} \frac{dt}{d\tau}. \tag{17}$$

W równaniach tych t_p oznacza początkową wartość temperatury środowiska

$$t_p = t(0).$$

Kryterialną postać równania (15) uzyskamy odejmując od obu jego stron wyrażenie $\frac{dt}{d\tau}$. Następnie po lewej stronie obie pochodne łączymy w jedną, po prawej zastępujemy pod znakiem różniczek ϑ przez $(\vartheta - t)$ i obie strony równania mnożymy przez wyrażenie $\frac{l_o^2}{a(\vartheta_p - t_p)}$. Ostatecznie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial (Fo)} = \nabla^2 \Theta + K_t. \tag{18}$$

Wprowadzenie wielkości zredukowanych do warunku brzegowego i początkowego daje równania

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial N} = (Bi)\Theta \quad \text{dla} \quad R \in S, \tag{19}$$

$$\Theta = 1 \quad \text{dla} \quad (Fo) = 0. \tag{20}$$

Z porównania równań (10) – (12) z równaniami (18) – (20) wynika analogia zjawisk nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym z wewnętrznymi źródłami ciepła, zanurzonym w środowisku o niezmiennej temperaturze i nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym bez wewnętrznych źródeł, zanurzonym w środowisku o zmiennej w czasie temperaturze. Analogami są: zredukowane natężenie wewnętrznego źródła ciepła K_q i kryterium K_t określające zmienność temperatury środowiska.

Z analogii wynika, że końcowe równanie kryterialne dla przypadku drugiego jest identyczne jak dla pierwszego, przy czym wielkość K_q zastępuje kryterium K_t

$$\Theta = \Theta(\bar{R},(Fo),(Bi), K_t). \tag{21}$$

W ogólnym wypadku, dla dowolnej zmienności temperatury środowiska pochodna $\frac{dt}{d\tau}$ zależy od czasu i wówczas kryterium K_t zależy od liczby Fouriera $K_t = K_t(Fo)$. Jeżeli natomiast temperatura środowiska zmienia się liniowo

$$t = t_p + b\tau,$$

to kryterium K_t ma stałą wartość

$$K_t = \frac{bl_o^2}{a(t_p - \vartheta_p)}.$$

Odpowiada to analogicznemu przypadkowi stałego natężenia wewnętrznego źródła ciepła. Funkcja (21) posiada wtedy granicę przy (Fo)$\to\infty$ (równ. (14)), a więc po czasie nieskończenie długim zredukowana temperatura Θ jest funkcją tylko współrzędnych ((Bi) i K_t są parametrami). Biorąc pod uwagę definicję zredukowanej temperatury (równ. (16)) dochodzimy ostatecznie do wniosku, że przy liniowej zmienności temperatury środowiska różnica temperatur ciała i środowiska jest po czasie nieskończenie długim funkcją tylko współrzędnych.

4. Przypadek zerowej początkowej różnicy temperatur

Jedną z wielkości opisujących nieustalone przewodzenie ciepła w ciele stałym jest początkowa różnica temperatur płynu i ciała stałego. Wielkość ta wchodzi w skład określonych w p.3. bezwymiarowych wielkości zredukowanych (równ. (6), (9), (10) i (17)). Osobnego omówienia wymaga przypadek, gdy różnica ta jest równa zeru, tzn.

$$\vartheta_p - t = 0 \text{ czyli } \vartheta_p = t$$

dla ciała ze źródłami wewnętrznymi i

$$\vartheta_p - t_p = 0, \quad \text{czyli} \quad \vartheta_p = t_p$$

dla zmiennej temperatury środowiska.

W myśl twierdzenia Buckinghama [1] ilość bezwymiarowych wielkości zredukowanych równa się ilości wielkości bezwzględnych opisujących zjawisko, pomniejszonej o ilość podstawowych wielkości wymiarowych. Jeżeli z opisu zjawiska znika początkowa różnica temperatur, a wymiar temperatury pozostaje nadal w wymiarach innych wielkości, to ilość bezwymiarowych wielkości zredukowanych musi być o 1 mniejsza.

W nowym kryterialnym opisie zjawiska pozostają niezmienione: zredukowane współrzędne (równ. (5)), liczba Fouriera (7) i liczba Biota (8). Natomiast zredukowana temperatura jest określona następująco: dla ciała ze źródłami wewnętrznymi

$$\Theta_q = \frac{(\vartheta - t)\lambda}{\dot{q}_{wo} l_o^2}, \tag{22}$$

a dla ciała w środowisku o zmiennej temperaturze

$$\Theta_t = \frac{(t - \vartheta)a}{b\ l_o^2}, \tag{23}$$

gdzie wielkości $\dot{q}_{wo}$ i b wynikają z następującego przedstawienia funkcyj $\dot{q}_w(\tau)$ i $\frac{dt(\tau)}{d\tau}$.

$$\dot{q}_w = \dot{q}_{wo}\ \varphi_q(Fo), \tag{24}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = b\ \varphi_t(Fo). \tag{25}$$

Kryterialna postać równania Fouriera-Kirchhoffa dla obu zjawisk jest następująca

$$\frac{\partial\Theta}{\partial(Fo)} = \nabla^2\Theta + \varphi\ (Fo). \tag{26}$$

Warunek brzegowy jest taki sam jak uprzednio

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial N} = (Bi)\Theta \qquad \text{dla } \bar{R} \in S, \tag{27}$$

natomiast warunek początkowy ma postać

$$\Theta = 0 \qquad \text{dla} \quad (Fo) = 0. \tag{28}$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (26) - (28) doprowadza do wynikowego równania kryterialnego

$$\Theta = \Theta\ (\bar{R},\ (Fo),\ Bi)), \qquad (29)$$

przy czym postać tej funkcji zależy od postaci funkcji φ (Fo).

Analogia nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym ze źródłami wewnętrznymi i nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym umieszczonym w środowisku o zmiennej temperaturze zachodzi więc również i w tym wypadku. Warunkiem analogii jest, poza wymienionymi uprzednio, identyczność funkcyj $\varphi_q(Fo)$ i $\varphi_t(Fo)$. Analogami są zredukowane temperatury θ_q i θ_t.

W szczególnym wypadku źródła o stałym natężeniu

$$\dot{q}_w = \dot{q}_{wo} = idem,$$

lub liniowej zmiany temperatury środowiska

$$t = \vartheta_p + b$$

mamy

$$\varphi_q(Fo) = \varphi_t(Fo) = 1.$$

5. <u>Możliwości praktycznego zastosowania</u>

Opisana analogia może być wykorzystana do modelowania analogowego. Można więc modelować zjawiska nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym znajdującym się w środowisku o zmiennej w czasie temperaturze zjawiskiem nieustalonego przewodzenia ciepła w ciele stałym ze źródłami wewnętrznymi i na odwrót. Wewnętrzne źródła ciepła możemy realizować np. za pomocą grzania indukcyjnego lub w wypadku ciała o kształcie pryzmatycznego pręta - przez przepuszczanie przezeń prądu elektrycznego. Łatwo w ten sposób uzyskać pożądaną zmienność w czasie wewnętrznego źródła ciepła. Jedynym ograniczeniem jest to, że wewnętrzne źródła ciepła może być tylko dodatnie $\dot{q}_w > 0$, a więc kryterium K_q musi mieć stały znak (zależny od znaku początkowej różnicy temperatur (ϑ_p - t) ciała i środowiska). Wobec tego możemy modelować jedynie przypadki monotonicznej zmienności temperatury środowiska (stały znak pochodnej $\frac{dt}{d\tau}$). To samo dotyczy przypadku zerowej początkowej różnicy temperatur - funkcja $\varphi_q(Fo)$ ma stały znak, a ze stałości znaku funkcji $\varphi_t(Fo)$ wynika monotoniczność funkcji $t(\tau)$.

Analogia umożliwia również wzajemne przenoszenie rozwiązań analitycznych z jednego zjawiska na drugie. I tak np. istniejące rozwiązania nieustalonego przewodzenia ciepła przy liniowej zmianie temperatury środowiska i zerowej początkowej różnicy temperatur, doprowadzone do postaci roboczych wykresów [2] mogą być wykorzystane dla rozwiązywania zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych tego samego kształtu, z wewnętrznymi źródłami ciepła o stałym natężeniu.

LITERATURA

[1] Guchman A.A.: Wwiedienije w teoriu podobija, Moskwa 1963 r. Gos.Izd. "Wysszaja Szkoła".

[2] Kutateładze S.S.: Osnowy teorii tiepłoobmiena. Wydanie 2. Moskwa-Leningrad 1962 r. Maszgiz.

[3] Ochęduszko S.: Termodynamika stosowana, Warszawa 1964 r. WNT.

[4] Około-Kułak W.: Określenie kryteriów podobieństwa za pomocą metody "równań ramowych", Zesz.Nauk.Pol.Śl. Energetyka z.4, 1960 r.

Pracę złożono w Redakcji w dniu 2.IX.1964 r.

ОБ АНАЛОГИИ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЕВ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В статье указано аналогию между нестационарной теплопроводностью в твердом теле, погруженном в среде с изменяющейся по времени температурой и нестационарной теплопроводностью при наличии в теле равномерно распределенных источников тепла и при постоянной температуре среды.

ABOUT THE ANALOGY OF CERTAIN CASES OF THE UNSTEADY-STATE HEAT CONDUCTION

S u m m a r y

In the paper the analogy between the unsteady-state heat conduction in a solid at the variable temperature of the environment and at the unsteady-state heat conduction in a solid with the uniform internal heat generation at the steady environment temperature has been discussed.