ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: ENERGETYKA z. 18 Nr kol. 129

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

OBSZARY STATECZNOŚCI RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO I TRZECIEGO

Streszczenie. W pracy omawiano zagadnienie obszarów stateczności równania stopnia drugiego i trzeciego. Nawiązuje ona do poprzednich prac autora,do tyczących równania stopnia czwartego i piątego.Dla równania stopnia trzeciego otrzymano inną drogą wyniki analogiczne do wyników Wiszniegradzkiego. Rozpatrzono również na wykresie krzywe pierwiastków wspólnych funkcji i jej drugiej pochodnej oraz pierwszej i drugiej pochodnej. Przedyskutowano również wartości pierwiastków podwójnych równania.

1. Wstęp

W poprzednich pracach [6, 7, 8] omawiano zagadnienia obszarów stateczności równania stopnia czwartego i piątego. Aby mieć porównanie, jak bardzo komplikuje się zagadnienie przez podwyższenie stopnia równania o jeden, rozwiązano zagadnienie tą samą metodą dla równania stopnia drugiego i trzeciego. Badanie równania stopnia drugiego jest sprawą stosunkowo prostą. Dla równania trzeciego stopnia posiadamy znane z monografii poświęconych algebrze i automatyce [1, 2, 3, 4, 5] rozwiązanie [9]. Autor dochodzi inną metodą do analogicznych wyników.

2. Równanie charakterystyczne stopnia drugiego

W najogólniejszej postaci równanie stopnia drugiego może być napisane w postaci następującej:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

gdzie:

a_i, $i = 0, 1, 2$ stałe rzeczywiste dodatnie.

Jak wiadomo przy podanych założeniach o współczynnikach rozwiązania równania są stateczne.

Stosując dwa przekształcenia

$$a_i \quad a_2 = b_i, \; i = 0,1 \tag{2}$$

oraz

$$z = x\sqrt{b_0}, \quad b_1\sqrt{b_0} = c_1 \tag{3}$$

sprowadzamy zagadnienie do dyskusji równania o jednym parametrze c_1

$$z^2 + c_1 z + 1 = 0 \tag{4}$$

Widać łatwo, że równanie posiada pierwiastek podwójny $z = \pm 1$ dla $c_1 = \pm 2$

2.1. Rozpatrywanie geometryczne

Przyjmując dwa równania, powstałe z równania (4)

$$f(z) = z^2 + c_1 z + 1 = 0 \tag{5}$$

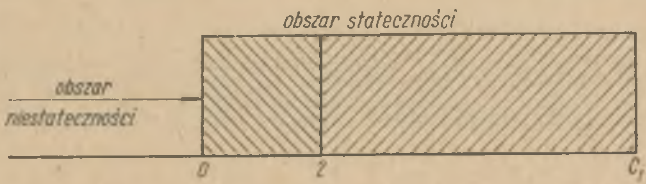
$$f'(z) = 2z + c_1 = 0 \tag{6}$$

otrzymujemy warunek na istnienie pierwiastka podwójnego metodą Eulera-Sylwestra w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} 1, & c_1, & 1 \\ 2, & c_2, & 0 \\ 0, & 2, & c_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

który sprowadza się do równania $c_1 = \pm 2$

Dyskusja obszarów stateczności równania (4) sprowadza się do rozpatrywania położenia punktów na prostej c_1. Na niej wyróżnione są dwa punkty:
punkt $c_1 = 0$ i $c_1 = 2$. Obszarowi niestateczności odpowiada ujemna część prostej c_1. Punktowi $c_1 = 0$ odpowiadają, jako granicy obszaru stateczności pierwiastki urojone równania (4). Między punktami $c_1 = 0$ i $c_1 = 2$ pierwiastki są zespolone sprzężone. Punktowi $c_1 = 2$ odpowiada znikanie urojonej składowej rozwiązań i przez pierwiastek podwójny przechodzą one w dwa pierwiastki rzeczywiste (rys.1).



Rys.1. Obszary stateczności równania stopnia drugiego

Punktowi $c_1 = 0$ odpowiada granica obszaru stateczności (dwa pierwiastki urojone sprzężone), punktowi $c_1 = 2$ odpowiada pierwiastek rzeczywisty podwójny (granica między pierwiastkami rzeczywistymi i zespolonymi sprzężonymi). Kreskowaniem pochylonym w lewo oznaczono zakres, w którym występują pierwiastki zespolone sprzężone, kreskowaniem pochylonym w prawo oznaczono zakres w którym występują dwa różne rzeczywiste pierwiastki

3. Równanie charakterystyczne stopnia trzeciego

Równanie stopnia trzeciego może być napisane w postaci następującej:

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{8}$$

przy czym a_i, $i = 0, 1, 2, 3$ rzeczywiste dodatnie współczynniki stałe.
W celu zmniejszenia liczby parametrów od których będą zależały własności równania, stosujemy dwa przekształcenia:

$$a_i / a_3 = b_i, \; i = 0,1,2 \tag{9}$$

$$z = x \sqrt[3]{b_0}, \quad c_2 = b_2 \sqrt[3]{b_0}, \quad c_1 = b_1 \sqrt[3]{b_0^2} \tag{10}$$

Wtedy równanie (8) przybiera następującą postać:

$$z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + 1 = 0 \tag{11}$$

3.1. <u>Wyznaczenie obszaru stateczności</u>

Stosując kryterium Hurwitza Routha [2-5] otrzymujemy jako warunki konieczne i dostateczne na to, by rozwiązania równania (11) były stateczne, w postaci następujących nierówności:

$$c_i > 0, \quad i = 1,2 \qquad \begin{vmatrix} c_2, & 1 \\ 1, & c_1 \end{vmatrix} > 0 \tag{12}$$

Jako granicę obszaru stateczności otrzymujemy stąd (w granicznym przypadku, gdy wyznacznik zeruje się) równanie

$$c_1 c_2 = 1 \tag{13}$$

Ten sam warunek otrzymuje się z postulatu, by pierwiastki równania (11) były urojone.

Równanie (13) przedstawia w płaszczyźnie (c_1, c_2) hiperbolę równoboczną.

3.2. <u>Badanie pierwiastków równania (11)</u>

Badanie przeprowadzamy rozpatrując następujące równania

$$\begin{aligned} &a) \quad f(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + 1 = 0 \\ &b) \quad f'(z) = 3 z^2 + 2c_2 z + c_1 = 0 \\ &c) \quad f''(z) = 3 z + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

3.2.1. <u>Warunek na istnienie pierwiastka potrójnego</u>

Pierwiastek potrójny równania (11) równy $z = -1$ otrzymujemy dla

$$c_2 = c_1 = 3 \tag{15}$$

Jest to punkt w płaszczyźnie (c_1, c_2), leżący w obszarze stateczności.

Przy dalszych rozważaniach zastąpimy współczynniki c_i przez

$$c_i = 3\,k_i, \quad i = 1,2 \tag{16}$$

przy czym dolna wartość, jaką może przybierać dodatni współczynnik k_i jest równa 1.

3.2.2. Rozpatrywanie geometryczne

Punkt określony równaniami (15) otrzymujemy rozpatrując przecięcie się w płaszczyźnie (c_1, c_2) trzech krzywych, otrzymanych przez postulowanie o równaniach (14), by równania (a, b), (a, c), (b,c) miały wspólne pierwiastki

$$\begin{vmatrix} 1, & c_2, & c_1, & 1 & \\ & 1, & c_2, & c_1, & 1 \\ 3, & 2c_2, & c_1 & & \\ & 3, & 2c_2, & c_1 & \\ & & 3, & 2c_2, & c_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} 1, & c_2, & c_1, & 1 \\ 3, & c_2 & & \\ & 3, & c_2 & \\ & & 3, & c_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$\begin{vmatrix} 3, & 2c_2, & c_1 \\ 3, & 2c_2 & \\ & 3, & 2c_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Przy pomocy relacji (16) doprowadzamy je do postaci

$$4 k_2^3 - 6 k_1 k_2 - 3 k_1^2 k_2^2 + 4 k_1^3 + 1 = 0 \tag{20}$$

$$2 k_2^3 - 3 k_1 k_2 + 1 = 0 \tag{21}$$

$$k_2^2 - k_1 = 0 \tag{22}$$

Łatwo sprawdzić, że punkt potrójny $k_i = 1$, $i = 1,2$ spełnia wszystkie równania. W celu wyznaczenia położenia pierwiastków podwójnych należy rozpatrzeć równanie (20).

3.2.3. Transformacja równań (20) - (22) do układu współrzędnych przechodzącego przez punkt $k_i = 1$, $i = 1,2$

Przy pomocy przekształcenia

$$k_i = l_i + 1, \quad i = 1,2 \tag{23}$$

doprowadzamy równania (20) - (22) do postaci następującej:

$$4 l_2^3 + 9 l_2^2 - 18 l_1 l_2 - 3 l_1^2 l_2^2 + 9 l_1^2 - 6 l_1^2 l_2 - 6 l_1 l_2^2 + 4 l_1^3 = 0 \tag{24}$$

$$2 l_2^3 + 6 l_2^2 - 3 l_1 l_2 + 3 l_2 - 3 l_1 = 0 \tag{25}$$

$$l_2^2 + 2 l_2 - l_1 = 0 \tag{26}$$

3.2.4. Dyskusja krzywych (24) - (26)

Prosto przeprowadza się dyskusję krzywej (25) i (26), mających mniejsze znaczenie dla badania obszarów stateczności. Jak pokazano na rysunku 3, krzywa (26) jest parabolą drugiego stopnia, krzywa (25) posiada przebieg bardziej złożony, mianowicie składa się z dwu gałęzi z miejscem nieciągłości w punkcie $l_2 = -1$.

Jest to skrajna wartość w kierunku ujemnym dopuszczalna dla współczynników l_1. Wynika stąd, że dla rozpatrywań w obszarze stateczności posiada znaczenie jedynie gałąź krzywej o kształcie zbliżonym do paraboli.

Równanie (24), przedstawiające warunek, na to by pierwiastki równania (11) były podwójne, czyli warunek dający przejście od pierwiastków zespolonych do rzeczywistych, można przedstawić w postaci parametrycznej, rozpatrując przecięcia krzywej z prostą

$$l_2 = l_1\lambda \tag{27}$$

przy czym λ oznacza parametr. Otrzymujemy wtedy równanie

$$-3\lambda^2 l_1^2 + l_1 (4\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1) + 9(\lambda - 1)^2 = 0 \tag{28}$$

oraz $l_1 = 0$

Rozwiązując równanie (28) ze względu na l_1 otrzymujemy

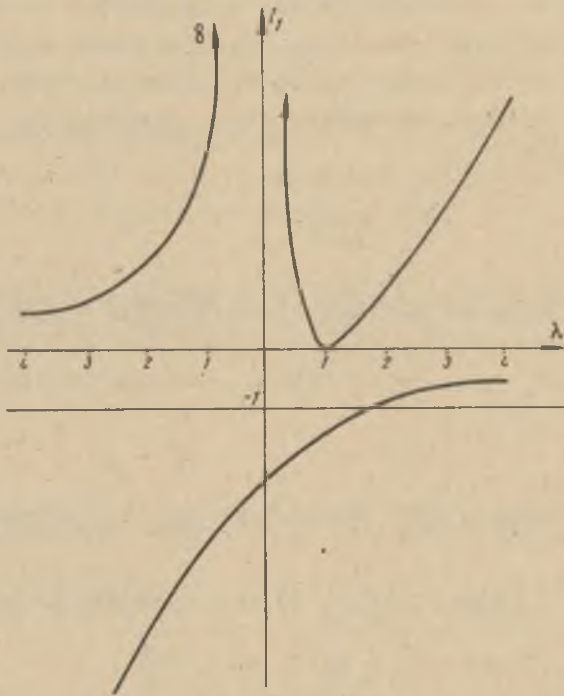
$$l_1 = (1/3\lambda^2)\left[(4\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1) \pm \sqrt{(4\lambda - 2)^2 . (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2 + 12\lambda^2 . 9(\lambda - 1)^2}\right]. \tag{29}$$

Ponieważ wyróżnik jest różny od zera, otrzymujemy dwie różne wartości na l_1, leżące symetrycznie względem wartości określonych równaniem:

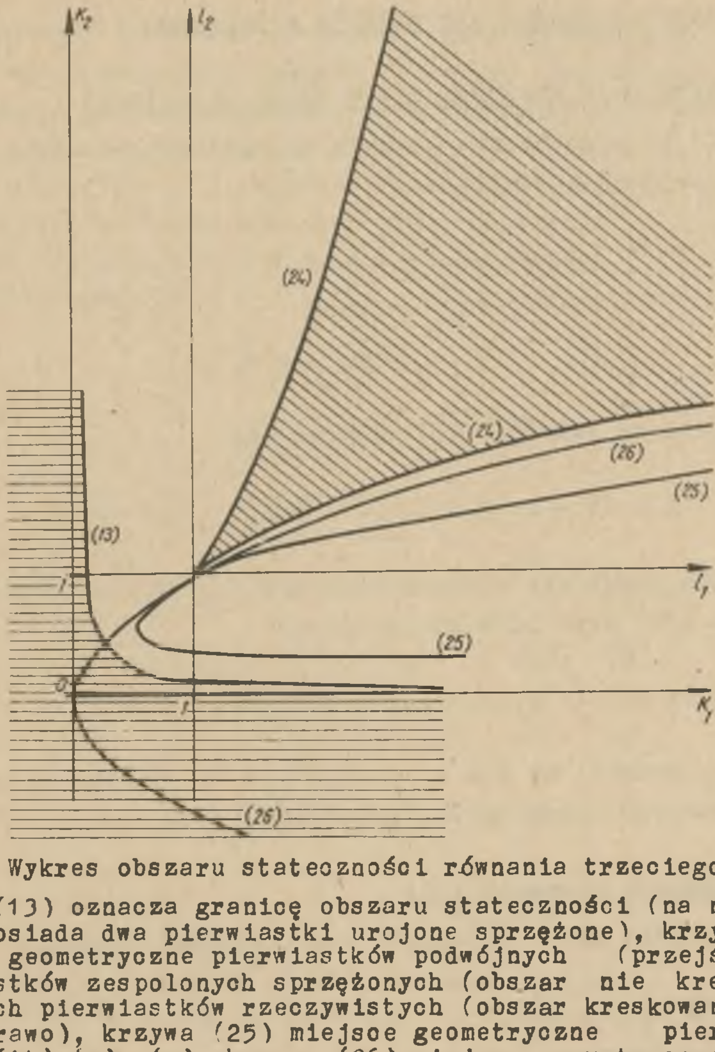
$$l_1 = (1/3\lambda^2)(4\lambda - 2)(\lambda + 1) \tag{30}$$

Oczywiście ze względu na założenie o współczynnikach k_1, najmniejsze wartości przybierane przez l_1 mogą być równe -1.

Orientacyjny przebieg funkcji (29) daje rysunek 2, skąd otrzymujemy wykres obszarów stateczności (rys. 3), na którym zaznaczono krzywe (13), (24), (25), (26).



Rys.2. Krzywa (29) pomocnicza, służąca do wyznaczania krzywej pierwiastków podwójnych



Rys. 3. Wykres obszaru stateczności równania trzeciego stopnia

Krzywa (13) oznacza granicę obszaru stateczności (na niej równanie posiada dwa pierwiastki urojone sprzężone), krzywa (24) miejsce geometryczne pierwiastków podwójnych (przejście od pierwiastków zespolonych sprzężonych (obszar nie kreskowany) do trzech pierwiastków rzeczywistych (obszar kreskowany skośnie w prawo), krzywa (25) miejsce geometryczne pierwiastków równań (14) (a), (c), krzywa (26) miejsce geometryczne pierwiastków równań (14) (b), (c). Obszar poziomo kreskowany odpowiada pierwiastkom (przynajmniej jednemu) nie statecznym.

4. Dyskusja wartości pierwiastka podwójnego

4.1. Obliczenie wartości pierwiastka podwójnego

Równanie na wyznaczenie pierwiastka podwójnego można napisać w następującej postaci:

$$\begin{vmatrix} 1 , & C_2 , & C_1 z + 1 \\ 3 , & 2C_2 , & C_1 z \\ & 3 , & 2C_2 z + C_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

Wykorzystując relacje (16) otrzymujemy

$$z = (1 - k_1 k_2)/(2 k_2^2 - 2 k_1) \tag{32}$$

Wyrażenie staje się nieoznaczone dla $k_1, k_2 \longrightarrow 1$. Wprowadzając relacje (23) oraz (27) otrzymujemy:

$$z = - (1 + \lambda + \lambda l_1) / (4\lambda + 2\lambda^2 l_1 - 2) \tag{33}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $\lambda \longrightarrow 1$, $l_1 \longrightarrow 0$ wyrażenie (33) dąży do wartości pierwiastka potrójnego $z = -1$.

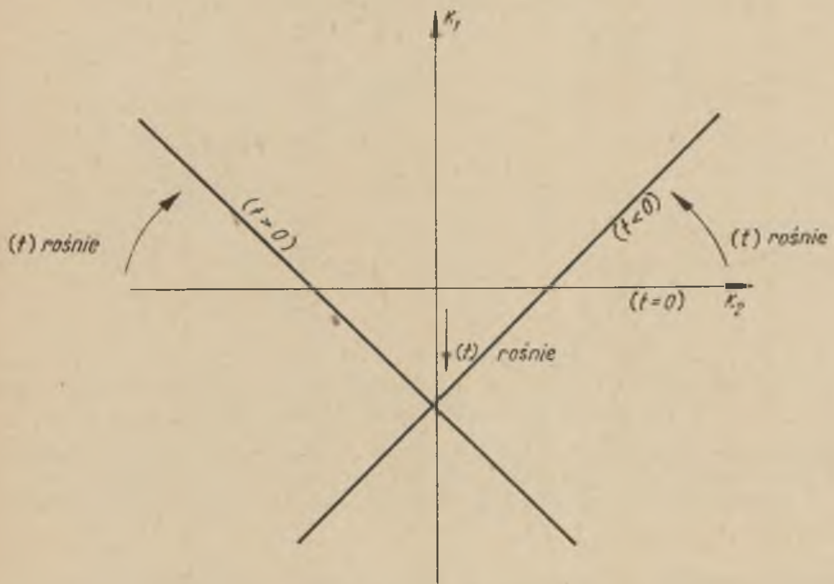
4.2. Dyskusja równania (32)

Równanie (32) można przepisać w następującej postaci

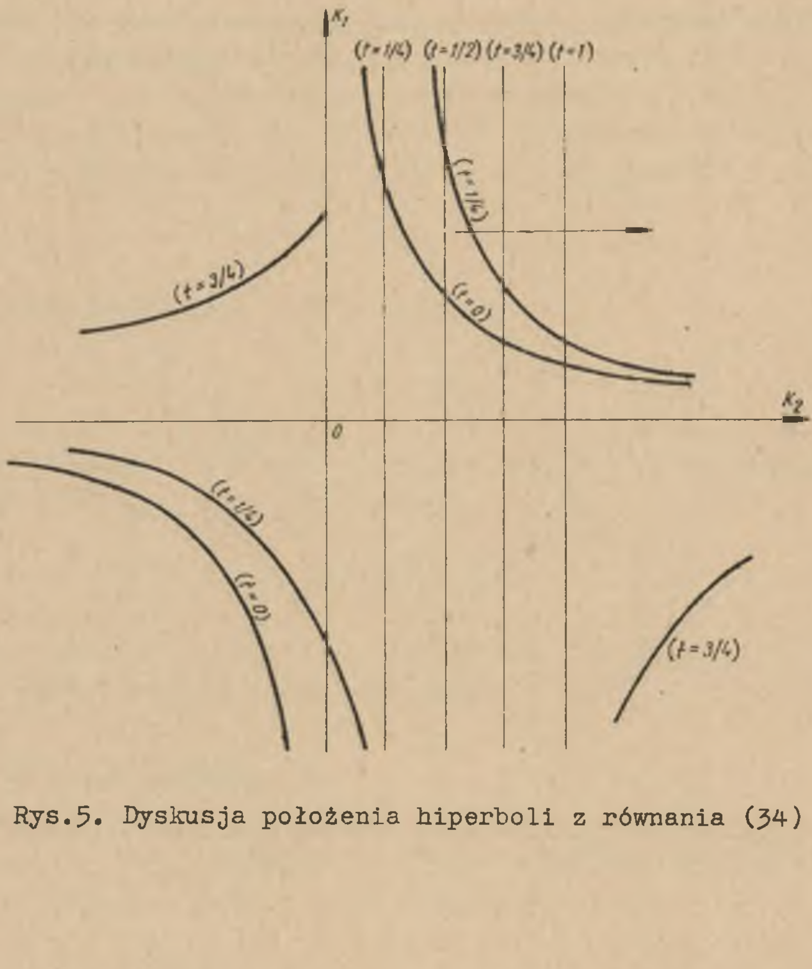
$$k_1 = (2 k_2^2 z - 1)/(2 z - k_2) = -2 k_2 z - 4 z^2 +$$

$$+ (1 - 8 z^3) / (k_2 - 2 z) \tag{34}$$

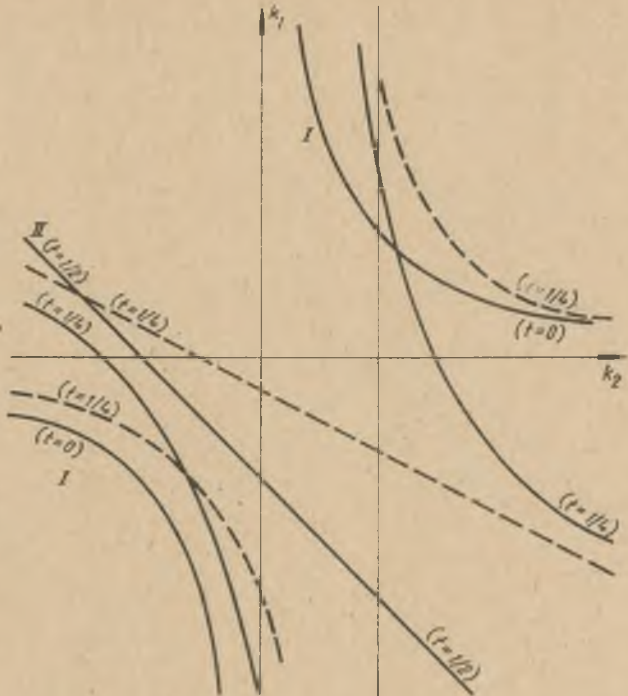
W przestrzeni trójwymiarowej (k_1, k_2, z) jest to równanie pewnej powierzchni. Przebieg jej można przedyskutować, wyznaczając kształt poziomic, odpowiadających różnym wartościom z płaszczyźnie (k_1, k_2). Z równanie (34) jest widoczne, że w przedstawieniu graficznym zależności k_1 od k_2 dla różnych wartości parametru z, wartości k_1 otrzymujemy przez dodanie rzędnych prostej i hiperboli. Dyskutując więc sposób w jaki zmieniają swe położenie i kształt te krzywe otrzymujemy zmiany jakich doznają krzywe przedstawiające poziomice szukanej powierzchni. Zmienność położenia prostej daje rysunek 4, zmienność hiperboli rysunek 5. Strzałką oznaczono kierunek, w którym zmienia się wielkość charakteryzująca kształt odnośnej krzywej lub jej położenie. W dyskusji powierzchni (34) należy wyróżnić 3 obszary: $(0 \leq z \leq 1/2)$, $(1/2 \leq z \leq \infty)$, $(0 \geq z \geq -\infty)$.



Rys. 4. Dyskusja położenia prostej z równania (34)



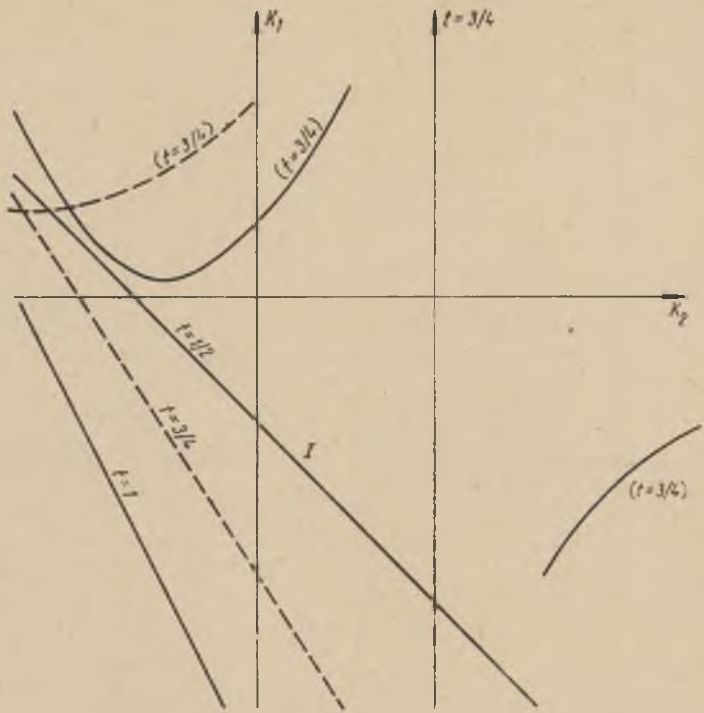
Rys.5. Dyskusja położenia hiperboli z równania (34)



Rys. 6. Przebieg poziomic powierzchni dwu równych pierwiastków (przypadek pierwszy $0 \leqslant z \leqslant 1/2$)

Wartości $z = 0$ odpowiada hiperbola równoboczna I, wartości $z = 1/2$ prosta II, krzywe pośrednie są typu krzywej dla $z = 1/4$. Krzywe pomocnicze do tej ostatniej oznaczono liniami przerywanymi

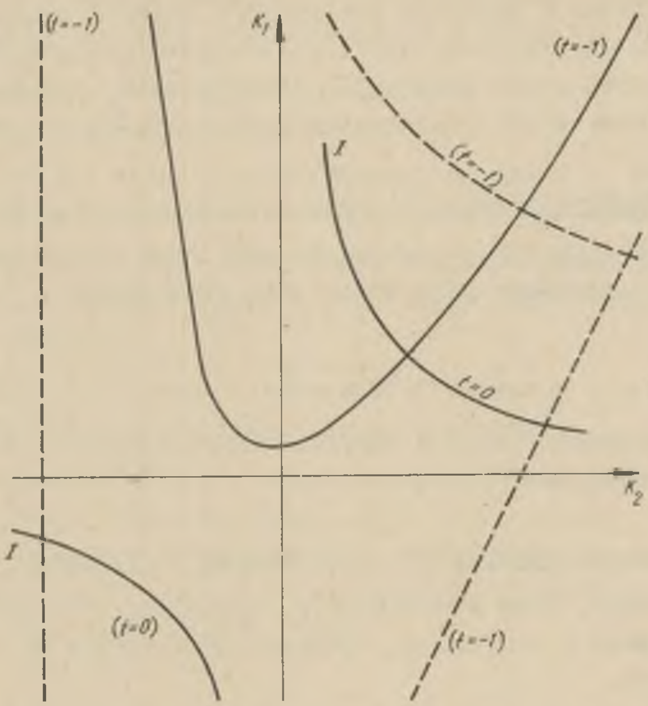
Na rysunku 6 przedstawiono przebieg poziomic odpowiadających skrajnym wartościom parametru z pierwszego przedziału. Jeżeli krzywe te oznaczymy kolejno I i II, z rysunku jest widoczne, jakiej zmianie ulegają poziomice. Krzywe te posiadają punkt nieciągłości oraz asymptoty, które początkowo pokrywają się z osiami współrzędnych, następnie jedna z nich przesuwa się równolegle do osi k_1 w kierunku rosnących wartości k_2, (w skrajnym położeniu o 1), druga ulega skręceniu o kąt ujemny który w skrajnym położeniu wynosi -45°.



Rys. 7. Przebieg poziomic powierzchni dwu równych pierwiastków (przypadek drugi $1/2 \leqslant z \leqslant \infty$)

Dla $z = 1/2$ otrzymujemy prostą I. Jak wyglądają dalsze krzywe wynika z przebiegu krzywej dla $z = 3/4$. Na rysunku ze względu na brak miejsca oznaczono tylko gałąź dodatnią krzywej. Krzywe pomocnicze oznaczono linią przerywaną

W drugim zakresie (rys. 7) licznik wyrażenia przedstawiającego hiperbolę posiada znak ujemny, równocześnie asymptota pionowa przesuwa się w kierunku k_2 rosnących, punkt obrotu drugiej asymptoty przesuwa się w kierunku ujemnych k_1 i równocześnie następuje obrót, przy czym kąt dąży do wartości -90°. Powoduje to, że gałąź krzywej leżąca poprzednio w pierwszej ćwiartce prostokątnego układu (k_1, k_2) przesuwa się do ćwiartki czwartej, przy czym oddala się równocześnie w kierunku ujemnych k_1 i dodatnich k_2. Druga gałąź krzywej przesuwa się w kierunku również ujemnych k_1 i dodatnich k_2.



Rys. 8. Przebieg poziomic powierzchni dwu równych pierwiastków (przypadek trzeci $0 \geq z \geq -\infty$)

Linią I oznaczono krzywą dla $z = 0$. Dla zaznaczenia charakteru krzywych tego obszaru podano krzywą dla $z = -1$. Krzywe pomocnicze oznaczono linią przerywaną

Wreszcie w trzecim zakresie (rys. 8) licznik wyrażenia przedstawiającego hiperbolę jest dodatni, asymptota równoległa do osi k_1 przesuwa się w kierunku ujemnych k_2, równocześnie druga asymptota obraca się dokoła punktu przesuwającego się w kierunku ujemnych wartości k_1 w kierunku dodatnim. Powoduje to przesuwanie się gałęzi rozpatrywanej w pierwszym zakresie jako pierwsza ku ujemnym k_1 i ujemnym k_2. Druga gałąź przesuwa się w kierunku ujemnych k_1 i dodatnich k_2. Dla dyskusji obszarów stateczności ważna jest oczywiście część krzywej, leżąca w pierwszej ćwiartce układu (k_1, k_2), ponieważ tylko takie krzywe mogą przecinać się z walcem przedstawionym równaniem (24). Jak z czysto jakościowego rozpatrywania wynika, jest to możliwe w zakresie pierwszym i trzecim. Krzywe, będące przecięciem powierzchni (34) i (24) wyznaczają miejsce geometryczne pierwiastków podwójnych oraz pozwalają wyznaczyć w jakich warunkach takie pierwiastki podwójne mogą wystąpić.

4.3. Pierwiastki wspólne równaniom 14 a, c i 14 b, c

Miejsce geometryczne pierwiastków wspólnych równaniom 14 a, c i 14 b, c znajdujemy jako przecięcie płaszczyzny

$$z = -k_2 \tag{35}$$

z walcem przedstawionym w układzie współrzędnych (k_1, k_2, z) równaniem (25) lub (26).

4.4. Obliczenie przybliżone pierwiastków podwójnych równania

Wartości przybliżone pierwiastków podwójnych równania (11) otrzymać możemy z wzoru (32), przyjmując wartości k_1 i k_2 z krzywej (24).

Praca wpłynęła do Redakcji 19.09.1964 r.

LITERATURA

[1] Bautin N.N.: Powiedienie dinamiczeskich sistiem wblizi granic obłasti ustojcziwosti, Gos. Izd. T.T. Lit. Leningrad 1949.

[2] Błoch Z.Sz.: Dynamika liniejnych sistiem awtomaticzeskowo regulirowania maszyn, Gos. Izd. T. T. Lit. Moskwa 1952.

[3] Błoch Z.Sz.: Perechodnyje processy w liniejnych sistiemach awtomaticzeskowo regulirowania, Gos.Izd.T.T. Lit. Moskwa 1961.

[4] Cypkin Ja. Z.: Bromberg P.W. - O stiepieni ustojoziwosti liniejnych sistiem, Izw. O T N S S S R, No 12, 1945.

[5] Derwiduế L.: Introduction a l'algèbre supérieure et au cal cul numérique algébrique Masson Paris 1957.

[6] Szpilecki J.: Obszary stateczności równania charakterystycznego stopnia czwartego (przyg. do publikacji).

[7] Szpilecki J.: Układy stateczne, opisane równaniem różniczkowym zwyczajnym 4 rzędu o współczynnikach stałych (przyg. do publikacji).

[8] Szpilecki J.: Obszary stateczności równania charakterystycznego stopnia piątego (przyg. do druku).

[9] Wiszniegradzki J.A.: O regulatorach priamowo diejstwia,Izw S.P.B. Prakt. Technol. Inst. t.I. 1877, 21-62. Dopełnienie, Civilingenieur 23, 1877, 116-119. Przedruk w wydawnictwie: Teoria awtomaticzeskowo regulirowania, Izd. A.N.S.S.S.R. 1949.

ДИАГРАММЫ УСТОИЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются диаграммы устоичивости уравнения второй и третьей степени. Имеется связь этой работы с преднидущими работами автора, в которых решается вопросы уравнения четвертой и пятой степени. Для уравнения третьей степени получены результаты, подобные полученным в [1]. Рассматриваются тоже на чертеже кривые корней общих функций и ее второй производной и первой и второй производной. Рассматриваются тоже значения двойных корней уравнения.

STABILITY DIAGRAMS OF THE SECOND AND THIRD GRADE EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper the problem of stability diagrams of the second and third grade equation has been discussed. It refers to the former papers of the author, dealing with the fourth and fifth grade equations. For the third grade equation the results received in another way are analogous to those of [1]. In the drawing the curves of common roots of the function and its second derivative as well as of the first and second derivative have been given. The discussion of the values of double roots of the equation was also given here.