ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: ENERGETYKA z. 18 Nr kol. 129

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

O DIAGONALIZACJI UOGÓLNIONEGO MACIERZOWEGO RÓWNANIA MEISSNERA

Streszczenie. W pracy podano dowód twierdzenia o diagonalizacji macierzowego równania Meissnera, będącego uogólnieniem skalarnego równania dla jednego stopnia swobody i omawianego w pracy [1]. Ze względu na złożoność obliczeń zastosowano rachunek macierzowy.

1. Wstęp

W pracy [1] podano wynik diagonalizacji macierzowego równania Meissnera, będącego uogólnieniem skalarnego równania, odnoszącego się do jednego stopnia swobody, bez dowodu. Celem obecnej pracy jest uzasadnienie powyższego wyniku.

Wektorowe równanie Meissnera można napisać w następującej postaci:

$$\left[d^2/\,dt^2 + (a \pm 2\,q)\right]\,y = 0 \tag{1}$$

gdzie a, q macierze kwadratowe n rzędu o elementach stałych rzeczywistych, macierz $a \pm 2\,q$ jest symetryczna i posiada pojedyncze elementarne dzielniki.
y wektor – kolumna niewiadomych funkcji.

Równanie (1) może być napisane w postaci następujących dwu równań wektorowych:

$$\left[d^2\,/\,dt^2 + (a + 2\,q)\right]y = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < k\,\pi\,/\omega \tag{2}$$

$$\left[d^2/\;dt^2 + (a - 2\,q)\right]y = 0 \quad \text{dla} \quad k\pi\,/\omega \leq t \leq 2\,\pi\;/\omega$$

$$0 < k < 2 \tag{3}$$

2. Rozwiązanie równań (2), (3)

Rozwiązanie równań (2) albo (3) można napisać w następującej postaci:

$$y = C_{1,2} \sin b_{1,2} t + D_{1,2} \cos b_{1,2} t \tag{4}$$

gdzie indeks 1 odnosi się do równania (2), indeks 2 do równania (3). Macierze $C_{1,2} = (C_{m,n,1,2})$, $D_{1,2} = (D_{m,n,1,2})$ są kwadratowe n rzędu o elementach stałych, m, n = 1 ... n. Wielkości $\sin b_{1,2} t$, $\cos b_{1,2} t$ są to wektory - kolumny zbudowane z elementów $\sin b_{m,1,2} t$, $\cos b_{m,1,2} t$, m = 1,... n, gdzie $b_{m,1,2}$ są pierwiastkami dodatnimi równania charakterystycznego

$$\det (a \pm 2 q - b^2_{1,2} E) = 0 \tag{5}$$

gdzie E macierz jednostkowa n rzędu.

3. Związki między elementami macierzy $C_{1,2}$, $D_{1,2}$.

Jak można się łatwo przekonać spełnione są następujące relacje

$$\left[- b^2_{m,1,2} E + (a \pm 2 q)\right] C_{m,1,2} = 0 \quad m=1 \ldots n \tag{6}$$

$$\left[- b^2_{m,1,2} E + (a \pm 2 q)\right] D_{m,1,2} = 0 \quad m=1 \ldots n \tag{7}$$

gdzie wektory-kolumny $C_{m,1,2}$, $D_{m,1,2}$ przynależą do pierwiastka $b_{m,1,2}$ równania charakterystycznego.

4. Dyskusja równania (6)

4.1. Rozwiązanie równania (6)

Ze względu na podobną budowę równań (6) i (7) wystarczy rozpatrzeć tylko równanie (6). Przedstawia ono układ równań liniowych jednorodnych na wyznaczenie elementów wektora-kolumny $C_{m,1,2}$. Ze względu na założenie o pierwiastkach równania charakterystycznego przynajmniej jeden z minorów n - 1 rzędu wyznacznika (5) jest różny od zera. Niech (co nie ogranicza ogólności rozważania) będzie on zbudowany z $n-1$ pierwszych wierszy i $n-1$ pierwszych kolumn. Wtedy wszystkie elementy $C_{m,i,1,2}$, $i=1, \ldots n-1$ wektora $C_{m,1,2}$ można wyrazić przez element $C_{m,n,1,2}$ w postaci

$$\bar{C}_{m,1,2} = (A_{m,1,2})^{-1}(B_{1,2})\, C_{m,n,1,2} \quad m=1,\ldots n \tag{8}$$

gdzie

$\bar{C}_{m,1,2}$ oznacza wektor-kolumnę elementów $C_{m,i,1,2}$, $i=1 \ldots n-1$

$$(A_{m,1,2}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} - 2q_{1,1} - b^2_{m,1,2}, & a_{1,2} - 2q_{1,2} \ldots & a_{1,n-1} - 2q_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} - 2q_{n-1,1}, & a_{n-1,2} - 2q_{n-1,2}, \ldots & a_{n-1,n-1} - 2q_{n-1,n-1} - b^2_{m,1,2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$(B_{1,2}) = \begin{pmatrix} -(a_{1,n} - 2q_{1,n}) \\ \hline \\ \hline -(a_{n-1,n} - 2q_{n-1,n}) \end{pmatrix}$$

Uzupełniając układ równań (8) równaniem oczywistym

$$C_{m,n,1,2} = C_{m,n,1,2}$$

otrzymujemy

$$C_{m,1,2} = \gamma_{m,1,2}\, C_{m,n,1,2} \tag{10}$$

gdzie wektor-kolumna $C_{m,1,2}$ ma znaczenie takie jak w równaniu (6), wektor-kolumna

$$\gamma_{m,1,2} = \begin{pmatrix} (A_{m,1,2})^{-1} (B_{1,2}) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m=1,\ldots n \tag{11}$$

Z wyrażeń (10) budujemy macierz kwadratową

$$C_{1,2} = (C_{m,1,2}) = (\gamma_{m,1,2}\, C_{m,n,1,2}) = C_{n,1,2}\, \Gamma_{1,2} \quad m=1\ldots n \tag{12}$$

gdzie

$$\Gamma_{1,2} = (\gamma_{m,1,2}), \quad m=1,\ldots n \tag{13}$$

jest wektorem-wierszem zbudowanym z wektorów kolumn

$$\gamma_{m,1,2}, \quad m=1,\ldots n$$

Macierz $C_{n,1,2}$ jest diagonalna o elementach $C_{m,n,1,2}$, $m=1\ldots n$
Podobnie otrzymujemy dla współczynników D

$$D_{1,2} = D_{n,1,2}\, \Gamma_{1,2} \tag{14}$$

Macierze $D_{1,2}$ oraz $D_{n,1,2}$ są zbudowane analogicznie jak macierze $C_{1,2}$ oraz $C_{n,1,2}$.

4.2. Sformułowanie warunków wiążących poszczególne rozwiązania

Postulując podobnie jak w przypadku skalarnego równania Meissnera ciągłość rozwiązań i ich pierwszych pochodnych ze względu na czas w chwili $t = k\pi/\omega$ oraz proporcjonalność (stała s) rozwiązań i pierwszych pochodnych względem czasu w chwilach $t = 0$ i $t = 2\pi/\omega$ otrzymujemy następujące równania warunkowe

$$\begin{gathered}
(C_{n,1}\Gamma_1 \sin[b_1(k\pi/\omega)] + D_{n,1}\,\Gamma_1 \cos[b_1(k\pi/\omega)] = \\
= (C_{n,2}\Gamma_2 \sin[b_2(k\pi/\omega)] + D_{n,2}\,\Gamma_2 \cos[b_2(k\pi/\omega)] \\[1ex]
(C_{n,1}\Gamma_1\, b_1[\cos b_1\,(k\pi/\omega)] - D_{n,1}\,\Gamma_1\, b_1 \sin[b_1(k\pi/\omega)] = \\
(C_{n,2}\Gamma_2\, b_2[\cos b_2\,(k\pi/\omega)] - D_{n,2}\,\Gamma_2\, b_2 \sin[b_2(k\pi/\omega)]
\end{gathered} \tag{15}$$

$$= D_{n,1}\Gamma_1 = C_{n,2}\Gamma_2 \sin\left[b_2(2\pi/\omega)\right] + D_{n,2}\Gamma_2 \cos\left[b_2(2\pi/\omega)\right]$$

$$= C_{n,1}\Gamma_1 b_1 = C_{n,2}\Gamma_2 b_2 \cos\left[b_2(2\pi/\omega)\right] -$$
$$- D_{n,2}\Gamma_2 b_2 \sin\left[b_2(2\pi/\omega)\right] \tag{16}$$

Układ równań (15), (16) przedstawia 4 n równań liniowych jednorodnyoh na wyznaczenie niewiadomyoh stałych $C_{n,1}$, $D_{n,1}$, $C_{n,2}$, $D_{n,2}$. Wyrażenie $b_1 \sin\left[b_1(k\pi/\omega)\right]$ oznacza wektor-kolumnę o elementaoh $b_{1,m} \sin\left[b_{1,m}(k\pi/\omega)\right]$. Podobny sens mają inne wyrażenia analogioznie zbudowane.

4.3. Redukcja układu (15), (16) do prostszej postaci

Układ równań (15), (16) można rozwiązać eliminująo zmienne $D_{n,1}$, $C_{n,1}$. Wyliczają się one prosto z układu równań (16), jeżeli uwzględni się, że występująoe w nim wektory kolumny można zastąpić przez macierze diagonalne napisane z prawej strony macierzy Γ_1, Γ_2. Jeżeli jeszoze macierz diagonalną $\overline{b_1 \sin\left[b_1(k\pi/\omega)\right]}$ i inne podobne przedstawimy w postaci iloczynu macierzy diagonalnych oraz uwzględni się, że w równaniach (15) w wyrażeniach lewej strony występują po prawej stronie wektory kolumny $\cos\left[b_1(0\pi/\omega)\right]$, wtedy rozwiązująo równania (15) ze względu na zmienne $D_{n,1}$, $C_{n,1}$ i podstawiająo do układu równań (16), otrzymujemy następujący układ równań z którego wyznaczamy równanie charakterystyczne problemu

$$\begin{aligned} C_{n,2}\Gamma_2 d + D_{n,2}\Gamma_2 e = 0 \\ C_{n,2}\Gamma_2 f + D_{n,2}\Gamma_2 g = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

przy ozym diagonalne macierze

$$d = (d_m),\; e = (e_m),\; f = (f_m),\; d = (g_m),\; m=1,\ldots n \tag{18}$$

posiadają następujące elementy:

$$d_m = \overline{\sin}\left[b_{m,2}(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] + \bar{b}_{m,2}\ \overline{\cos}\left[b_{m,2} \cdot (2\pi/\omega)\right] \cdot (\bar{b}_{m,1})^{-1} \cdot \overline{\sin}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] - s \cdot \overline{\sin}\left[b_{m,2}(k\pi/\omega)\right]$$

$$e_m = \overline{\cos}\left[b_{m,2}(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] - \bar{b}_{m,2} \cdot \sin\left[b_{m,2} \cdot (2\pi/\omega)\right] \cdot (\bar{b}_{m,1})^{-1} \cdot \overline{\sin}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] - s \cdot \overline{\cos}\left[b_{m,2} \cdot (k\pi/\omega)\right] \qquad (19)$$

$$f_m = \bar{b}_{m,2}\ \overline{\cos}\left[b_{m,2}(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] - \overline{\sin}\left[b_{m,2} \cdot (2\pi/\omega)\right] \cdot \bar{b}_{m,1} \cdot \overline{\sin}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] - s \cdot \bar{b}_{m,2}\ \overline{\cos}\left[b_{m,2} \cdot (k\pi/\omega)\right]$$

$$g_m = -\bar{b}_{m,2}\ \overline{\sin}\left[b_{m,2}(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] - \overline{\cos}\left[b_{m,2}(2\pi/\omega)\right] \cdot \bar{b}_{m,1} \cdot \overline{\sin}\left[b_{m,1}(k\pi/\omega)\right] + s \cdot b_{m,2}\ \overline{\sin}\left[b_{m,2}(k\pi/\omega)\right]$$

Macierze (18) piszemy w postaci sum macierzy diagonalnych

$$d = d' - s\,d'', \quad e = e' - s\,e'', \quad f = f' - s.f'', \quad g = g' - s\,g'' \qquad (20)$$

przy czym

$$d' = \overline{\sin}\left[b_e(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_1(k\pi/\omega)\right] + \bar{b}_2 (\bar{b}_1)^{-1}\ \overline{\cos}\left[b_2 \cdot (2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\sin}\left[b_1(k\pi/\omega)\right]$$

$$e' = \overline{\cos}\left[b_2(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_1(k\pi/\omega)\right] - \bar{b}_2(\bar{b}_1)^{-1}\ \overline{\sin}\left[b_2(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\sin}\left[b_1(k\pi/\omega)\right]$$

$$f' = \bar{b}_2\ \overline{\cos}\left[b_2(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\cos}\left[b_1(k\pi/\omega)\right] - \bar{b}_1\ \overline{\sin}\left[b_2(2\pi/\omega)\right] \cdot \overline{\sin}\left[b_1(k\pi/\omega)\right]$$

$$g' = -\bar{b}_2\,\overline{\sin}\left[b_2(2\pi/\omega)\right]\overline{\cos}\left[b_1(k\pi/\omega)\right] -$$

$$- \bar{b}_1\,\overline{\cos}\left[b_2(2\pi/\omega)\right] . \overline{\sin}\left[b_1\,(k\pi/\omega)\right] \tag{21}$$

$$d'' = \overline{\sin}\left[b_2\,(k\pi/\omega)\right], \quad e'' = \overline{\cos}\left[b_2(k\pi/\omega)\right], \quad f'' = e''\,\bar{b}_2,$$

$$g'' = d''\,\bar{b}_2 \tag{22}$$

Macierze diagonalne mają podobne własności jak ich elementy, więc

$$d''^2 + e''^2 = E \tag{23}$$

$$d'^2 + e'^2 = \overline{\cos}^2\left[b_1\,(k\pi/\omega)\right] + \bar{b}_2^2\,(\bar{b}_1^{-1})^2\,\overline{\sin}^2\left[b_1\,(k\pi/\omega)\right]$$

$$f'^2 + g'^2 = \overline{\cos}^2\left[b_1\,(k\pi/\omega)\right] . \bar{b}_2^2 + \overline{\sin}^2\left[b_1\,(k\pi/\omega)\right] . \bar{b}_1^2$$

$$d'^2 + e'^2 = (\bar{b}_1^{-1})^2\,(f'^2 + g'^2) = E + \bar{b}_2^2\,(\bar{b}_1^{-1})^2$$

(E macierz jednostkowa).

4.4. Sformułowanie warunku na granicę obszaru stateczności

Warunek na istnienie nietrywialnego rozwiązania równania (17) ze względu na stałe $C_{n,2}$, $D_{n,2}$ może być napisany następująco:

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_2\, d & \Gamma_2\, e \\ \Gamma_2\, f & \Gamma_2\, g \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

Z równania (24) można wyznaczyć parametr s, decydujący o tym, czy rozwiązanie równania (17) będzie stateczne czy też nie. Warunek na granicę obszaru stateczności otrzymujemy przyj tym przypadku indeksem 0, wtedy otrzymujemy na wyznaczenie granicy obszaru stateczności następujące równanie

$$\det\begin{pmatrix} \Gamma_2\, d_o, & \Gamma_2\, e_o \\ \Gamma_2\, f_o, & \Gamma_2\, g_o \end{pmatrix} = 0 \tag{25}$$

4.5. Przekształcenie równania (25)

Wykonując znane przekształcenia, można napisać równanie (25) w następującej postaci:

$$\det\begin{pmatrix} \Gamma_2\,(d_o\, g_o - e_o\, f_o), & \Gamma_2\, e_o \\ \Gamma_2\,(f_o\, g_o - g_o\, f_o), & \Gamma_2\, g_o \end{pmatrix} = 0 \tag{26}$$

Równanie to będzie spełnione jeżeli będzie

$$d_o\, g_o - e_o\, f_o = 0 \tag{27}$$

albo

$$g_o = 0 \tag{28}$$

bez względu na własności macierzy Γ_2.

Operacje zaznaczone w równaniu (26) należy rozumieć w tym sensie, że są one wykonywane na każdym elemencie macierzy oddzielnie.

Poszczególne elementy macierzy (27) mają następującą postać

$$d_{i,o}\, g_{i,o} - f_{i,o}\, e_{i,o} = -2\, b_{i,o} +$$

$$+ (1/b_{i,1})\Big[(b_{i,1}^2 + b_{i,2}^2)\cdot \sin\left[b_{i,1}(k\pi/\omega)\right]\cdot \sin\left[b_{i,2}(k-2)\pi/\omega\right] +$$

$$2\, b_{i,1}\, b_{i,2}\cdot \cos b_{i,2}\left[(2-k)\pi/\omega\right]\cdot \cos\left[b_{i,1}\,(k\pi/\omega)\right]\Big]$$

$$i = 1,\dots n \tag{29}$$

Są one analogicznie zbudowane jak wyrażenia odnoszące się do skalarnego równania Meissnera dla jednego stopnia swobody. Spełnienie warunku (28) wykluczamy, jako nie istotne dla rozpatrywanego problemu, ponieważ przy innych przekształceniach wyznacznika (26) w miejsce g_o występowałaby macierz e_o, d_o f_o przy niezmienionym warunku (27).

W ogólnym przypadku dla s dowolnego, możemy równanie (24) przekształcić analogicznie, otrzymując na poszczególne elementy macierzy d g - e f wyrażenia analogiczne jak w przypadku równania o jednym stopniu swobody.

Postulując, że spełnione jest równanie macierzowe

$$d\ g - e\ f = 0 \tag{30}$$

otrzymujemy na wyznaczenie parametrów s, odpowiadających poszczególnym stopniom swobody następujące równania:

$$d_i\ g_i - e_i\ f_i = - s^2\ b_{i,2} +$$
$$+ (s/b_{i,1}) \Big[(b_{i,1}^2 + b_{i,2}^2) \cdot \left[\sin b_{i,1}\ (k\pi/\omega)\right] \cdot \sin\left[b_{i,2}\ (k - 2)\pi/\omega\right] +$$
$$+ 2\ b_{i,2}\ b_{i,2} \cdot \cos\left[b_{i,1}\ (k\pi/\omega)\right] \cos\left[b_{i,2}\ (k - 2)\pi/\omega\right]\Big] - b_{i,2} = 0 \tag{31}$$
$$i = 1,\ldots n$$

Drugi warunek

$$g = 0 \tag{32}$$

odrzucamy, ze względów podobnych jak warunek (28). Można podobnie jak w przypadku równania skalarnego wprowadzić parametry δ_i charakteryzujące stateczność układu. Jeżeli mianowicie równanie (31) zapiszemy krótko

$$s_i^2 - 2\ s_i\ A_i + 1 = 0, \text{ wtedy}$$

$$\delta_i = \sqrt{2\ (1 - A_i)}\ e^{\pm i\ \operatorname{arc\,tg} \sqrt{(A_i + 1)/(A_i - 1)}} \tag{33}$$

Znikanie parametru odpowiada granicy obszaru stateczności. Największą wartość argumentu otrzymujemy dla $A_1 = 0$.

Praca wpłynęła do Redakcji 19.9.1964 r.

LITERATURA

[1] Szpilecki J.: Rezonanse autoparametryczne w układach o n stopniach swobody, Spraw. z Zebr. Nauk. Oddz. Gliwickiego Pol. Tow. Mech. Teor. i Stos. zesz. 8, 1962, str. 37.

О ДИАГОНАЛИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ МАЙСНЕРА

Р е з ю м е

В работе дано доказание теоремы с диагонализации матричного уравнения Майснера, обобщенного скалярного уравнения для одной степени свободы, рассматриваемого в работе [1]. По поводу сложности выкладок использовано матричное исчисление.

ON DIAGONALIZATION OF GENERALISED MATRIX MEISSNER EQUATION

S u m m a r y

In the paper the proof of the theorem on diagonalization of the matrix Meissner equation has been given. This is a generalisation of scalar equation for one grade of freedom which has been discussed in [1]. Because of the complexity of the problem the matric calculus was used.