

WIADYSŁAW ŁUKASZEK  
Katedra Matematyki D

PEWNE UWAGI O OBLICZANIU  
GĘSTOŚCI PRĄDU I GĘSTOŚCI STRUMIENIA CZĄSTEK

Streszczenie. W oparciu o pojęcia i oznaczenia wprowadzone w publikacji [2] autor omawia niektóre przypadki szczególne i podaje pewne wskazówki przydatne przy wykonywaniu obliczeń.

1. Przypadek cząstek monoenergetycznych

W zagadnieniach dotyczących fizyki reaktorów podawany jest często wzór na gęstość strumienia neutronów w postaci:

$$\varphi_N(\vec{r}) = v_0 n(\vec{r}), \quad (1)$$

gdzie:

$v_0$  - prędkość neutronów,  $\text{cm sek}^{-1}$ ,  
 $n(\vec{r})$  - gęstość neutronów na jednostkę objętości w punkcie określonym przy pomocy wektora  $\vec{r}$ ,  $\text{cm}^{-3}$ .

Podany wzór dotyczy neutronów monoenergetycznych lub quasimonoenergetycznych. Prędkość  $v_0$  rozumiana jest tutaj jako wartość bezwzględna możliwych wektorów prędkości neutronów  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ , takich, że:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \dots = |\vec{v}_1| = \dots = |\vec{v}_k| = v_0, \quad (2)$$

Wzór (1) może być uzyskany dość prosto w sposób elementarny. W tym celu rozważy się naprzód i-tą kategorię neutronów, której

odpowiada prędkość  $\vec{v}_1$ . Gęstość strumienia neutronów odpowiadająca wybranej kategorii, wyrazi się związkami

$$\varphi_N(\vec{r}) \Big|_1 = |\vec{v}_1| n_1(\vec{r}),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varphi_N(\vec{r}) \Big|_1 & - \text{gęstość strumienia neutronów } i\text{-tej kategorii,} \\ & \text{cm}^{-2} \text{sek}^{-1}, \\ n_1(\vec{r}) & - \text{gęstość neutronów } i\text{-tej kategorii, cm}^{-3}. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu można napisać

$$\varphi_N(\vec{r}) = v_0 \sum_{i=1}^k n_i(\vec{r}).$$

Zgodnie z zasadą addytywności gęstości (neutronów), zachodzi związek

$$\sum_{i=1}^k n_i(\vec{r}) = n(\vec{r}),$$

wskutek czego uzyskuje się wzór (1).

Chociaż rozumowanie poprzednie dotyczyło skończonej liczby wektorów prędkości neutronów, spełniających warunek (2), wzór (1) jest ważny również w przypadku gdy zarówno prędkość  $\vec{v}_0$  jak i gęstość  $n$  wyrażają się przy pomocy ciągłych funkcji zmiennego przestrzennie wektora jednostkowego  $\vec{\Omega}$ .

Niech będzie dana następująca rozwinięta postać funkcji rozkładu gęstości strumienia cząstek wg energii i kierunków:

$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \equiv v_0 n_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) \delta(E - E_0), \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} n_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) & - \text{funkcja rozkładu gęstości neutronów wg kierunków} \\ & \text{cm}^{-3}(\text{St rad})^{-1}, \\ E & - \text{energia, erg,} \end{aligned}$$

$E_0$  - energia rozważanych neutronów monoenergetycznych, posiadających prędkość  $v_0$ , erg,

$\delta(E-E_0)$  - funkcja delta Diraca.

Gęstość strumienia neutronów w punkcie  $\vec{r}$  wyrazi się całką po dwójną:

$$\varphi_N(\vec{r}) = \iint_{(E)4\pi} v_0 n_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) \delta(E-E_0) d\Omega dE.$$

Ze względu na to, że  $v_0$  jest stałe (neutrony monoenergetyczne) oraz że:

$$\int_{(E)} \delta(E-E_0) dE = 1$$

jeżeli funkcji Diraca przypisze się wymiar  $\text{erg}^{-1}$  [1], uzyskuje się w dalszym ciągu:

$$\varphi_N(\vec{r}) = v_0 \int_{4\pi} n_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega. \quad (4)$$

Wartość całki w wyrażeniu (4) jest równa całkowej gęstości neutronów w punkcie  $\vec{r}$ , a zatem:

$$\int_{4\pi} n_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = n(\vec{r})$$

i w konsekwencji dochodzi się również do wzoru (1).

W konkretnych zastosowaniach postacie funkcji  $n_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$  mogą być podawane w formie analitycznej lub graficznej. Dla obliczenia gęstości strumienia neutronów monoenergetycznych, zgodnie z wzorem (1) wystarczy znajomość gęstości neutronów  $n(\vec{r})$ , co pozwala na uniknięcie trudności związanych z wyznaczeniem zależności  $n_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ .

## 2. Rzut wektora gęstości prądu ozastek

W większości praktycznych przypadków posiada znaczenie pewien rzut wektora  $\vec{J}_N(\vec{r}, E)$  względnie wektora  $\vec{J}_N(\vec{r})$ . Przez

$\vec{J}_N(\vec{r}, E)$  oznaczono funkcję wektorową rozkładu gęstości prądu cząstek wg energii natomiast przez  $\vec{J}_N(\vec{r})$  - gęstość prądu cząstek, w pewnym punkcie przestrzeni określonym wektorem  $\vec{r}$ .

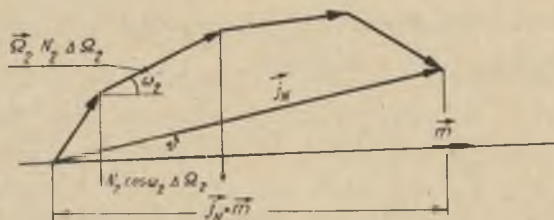
Przy badaniu zjawisk powierzchniowych związanych z działaniem promieniowania lub w przypadku pomiarów wykonywanych detektorem kierunkowym, konkretna powierzchnia posiada ustaloną orientację, określoną np. wektorem jednostkowym  $\vec{m}$ . Rzut wektora  $\vec{J}_N$  na kierunek określony przez wektor  $\vec{m}$  obliczyć można przy pomocy związku

$$J_{N,m} = \vec{J}_N \cdot \vec{m} = \int_{4\pi} N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cos \vartheta d\Omega, \quad (5)$$

gdzie:

$$\vartheta = \angle(\vec{J}_N, \vec{m}).$$

Ilustrację wzoru (5) stanowi rys. 1.



Rys. 1. Ilustracja do wzoru (5)

Jeżeli ponadto funkcja  $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  przyjmuje w płaszczyznach pęku o osi przechodzącej przez punkt  $\vec{r}$  i zorientowanej zgodnie z  $\vec{m}$ , równe wartości dla równych  $\omega$  gdzie:

$$\omega = \cos(\vec{\Omega}, \vec{m}),$$

wówczas funkcja  $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  charakteryzuje się symetrią względem kierunku  $\vec{m}$ . W przypadku symetrii:

$$\vec{J}_N \parallel \vec{m} \quad \text{oraz} \quad J_{N,m} = J_N$$

Związek  $J_N = J_{N,m}$  prawdziwy jest z dokładnością do znaku jeżeli weźmie się pod uwagę, że wektor  $\vec{m}$  może posiadać dwa możliwe zwroty.

Dalsze wnioski mogą być wyciągnięte jeżeli napisze się wyrażenia dla  $J_{N,m}(\vec{r})$  i  $\varphi_N(\vec{r})$ , tzn. dla rzutu gęstości prądu cząstek na kierunek  $\vec{m}$  oraz dla gęstości strumienia cząstek. Uzyskuje się wówczas odpowiednio:

$$J_{N,m}(\vec{r}) = \int_{4\pi} \int_E N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cos(\vec{\Omega}, \vec{m}) dE d\Omega, \quad (6)$$

$$\varphi_N(\vec{r}) = \int_{4\pi} \int_E N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE d\Omega. \quad (7)$$

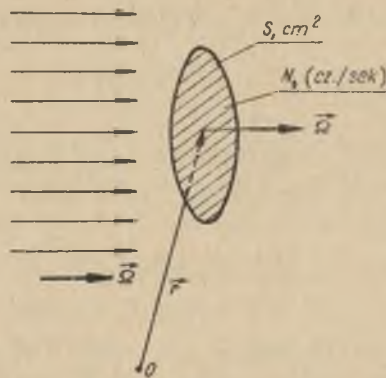
Z porównania prawych stron wynika, że przy obliczaniu  $J_{N,m}$  wyrażenie podcałkowe zawiera dodatkowo  $\cos(\vec{\Omega}, \vec{m})$ . Z uwagi na zakres zmienności funkcji  $y = \cos x$  musi być spełniony warunek

$$|J_{N,m}(\vec{r})| \leq \varphi_N(\vec{r}) \quad (\text{liczbowo}).$$

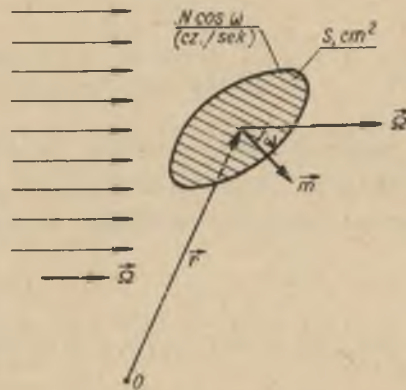
### 3. Zasady obliczania i wymierzania gęstości strumienia i gęstości prądu

Zasadę obliczania wielkości  $J_{N,m}(\vec{r})$  oraz  $\varphi_N(\vec{r})$  w przypadkach praktycznych łatwo będzie zrozumieć po zanalizowaniu sytuacji przedstawionych na rys. 2 i rys. 3.

Na rysunkach tych pokazano odpowiednio zasadę pomiaru gęstości strumienia cząstek oraz gęstości prądu cząstek monokierunkowej wiązki cząstek zorientowanej zgodnie z kierunkiem  $\vec{\Omega}$



Rys. 2. Pomiar gęstości strumienia cząstek monokierunkowej wiązki promieniowania



Rys. 3. Pomiar rzutu gęstości prądu cząstek wiązki promieniowania z rys. 2. Dla uzyskania wyniku liczbowego tego pomiaru wystarczy wynik z pomiaru na rys. 2. pomnożyć przez  $\cos \omega$

Zliczanie cząstek przy wymierzaniu gęstości strumienia cząstek występuje jedynie w tym położeniu powierzchni jednostkowej, w którym jej orientację określa wektor  $\vec{s}$ . Jeżeli w tym położeniu na powierzchnię  $S \text{ cm}^2$  pada  $N$  cząstek w ciągu jednej sekundy, wówczas:

$$\varphi_N(\vec{r}) = \frac{N}{S}, \text{ cm}^{-2} \text{ sek}^{-1}.$$

Na rys. 3 pokazana jest zasada pomiaru wielkości rzutu prądu oszątek w pewnym kierunku  $\vec{m}$ , w którym zorientowano powierzchnię S. Zgodnie z wyrażeniem (6) wynik z poprzedniego pomiaru należy pomnożyć przez cosinus kąta pomiędzy kierunkiem ruchu oszątek i kierunkiem zorientowania powierzchni. W ten sposób:

$$J_{N,m}(\vec{r}) = \frac{N}{S} \cos \omega \text{ cm}^{-2} \text{ sek}^{-1}$$

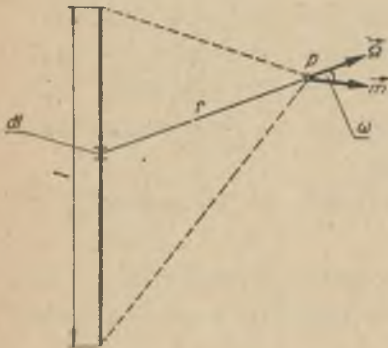
Warto zauważyć, że jeżeli  $\vec{m}$  jest zgodny z  $\vec{\Omega}$ , wówczas:

$$J_{N,m}(\vec{r}) = | \vec{J}_N(\vec{r}) |$$

oraz

$$| \vec{J}_N(\vec{r}) | = \varphi_N(\vec{r}) \quad (\text{liczbowo}).$$

Mając na uwadze przykłady przedstawione na rysunkach 2 i 3 można przejść do omówienia zasady obliczania  $\varphi_N(\vec{r})$  oraz  $J_{N,m}(\vec{r})$  w dowolnym polu promieniowania. Niech dany będzie np. pręt z materiału radioaktywnego, emitujący promieniowanie w sposób izotropowy (rys. 4) oraz punkt umieszczenia



Rys. 4. Wymierzanie  $d\varphi_N(r)$  oraz  $dJ_{N,m}(r)$  od elementu  $dl$  liniowego źródła radioaktywnego. Wektor  $\vec{m}$  orientuje detektor kierunkowy ustawiony w punkcie P

detektora P. Wybierając element  $dl$  pręta, przyjąć można, że element ten wysyła do punktu P wiązkę równoległą zorientowaną zgodnie z kierunkiem  $\vec{\Omega}$ . Wkład tej wiązki w gęstość strumienia oszątek oznaczyć można jako elementarną gęstość strumienia oszątek  $d\varphi_N(r)$ . Przy detektorze kierunkowym zorientowanym w kierunku  $\vec{m}$ , wkład tej samej wiązki w wielkość rzutu  $J_{N,m}(r)$  gęstości prądu oszątek określony może być związkami:

$$dJ_{N,m}(r) = d\varphi_N(r) \cos \omega$$

Podstawowa trudność przy wykonywaniu obliczeń polega na tym, że w celu wykonania całkowania potrzebna jest znajomość wyrażenia  $d\varphi_N$ .

Stosunkowo proste postacie  $d\varphi_N$  uzyskuje się w przypadku:

- 1) źródeł izotropowych,
- 2) źródeł o stacjonarnych mocach,
- 3) pominięcia osłabienia promieniowania w ośrodkach rozłożonych pomiędzy źródłem i detektorem, np. w powietrzu.

Przez moc źródła rozumie się liczbę cząstek (np. neutronów) wysyłanych przez źródło na jednostkę czasu. Dla źródeł liniowych, powierzchniowych i objętościowych można wprowadzić odpowiednie pojęcie mocy liniowej, mocy powierzchniowej oraz mocy objętościowej. Jeżeli moce te są stałe, tzn. nie zależą od wyboru punktu źródła, wówczas napisanie wyrażenia dla  $d\varphi_N$  ułatwia się jeszcze bardziej. Niezależnie od wymienionych przypadków, które w konsekwencji ułatwiają wykonanie całkowania, w wyrażeniach dla  $d\varphi_N$  musi się uwzględniać czynnik, odpowiadający osłabieniu geometrycznemu z tytułu istnienia pewnej odległości pomiędzy wybranym elementem źródła i detektorem.

W tabelicy 1 podane zostały postacie wyrażen  $\varphi_N$  i  $J_N$  dla źródła punktowego, liniowego, powierzchniowego i objętościowego. Podane wyrażenia uzyskano przy założeniu, że źródła są izotropowe i posiadają stacjonarne moce. Przyjęto również, że nie istnieje osłabienie promieniowania w ośrodku otaczającym źródła. Nadmieniam, że niedotrzymanie tych założeń utrudnia na ogół całkowanie analityczne w związku z czym w wyniku uzyskuje się funkcje specjalne. Należy się również liczyć z koniecznością przeprowadzenia całkowania przybliżonego.

Wyprowadzenia wyrażen podanych w tabelicy 1 można znaleźć w pracy [3].


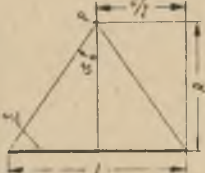

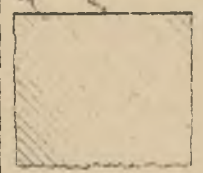
W zakończeniu artykułu pragnę złożyć podziękowanie dr T. Świerzawskiemu za propozycję włączenia rozdziału 1 do niniejszej pracy.

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1964 r.



Tablica 1

Zestawienie wyrażen  $\varphi_N$  i  $J_N$  dla źródeł izotropowych o wskazanej geometrii z pominięciem osłabienia promieniowania w ośrodku otaczającym źródło

Lp.	Geometria i opis układu źródło-detektor	Wzory	Uwagi
1	 <p>Źródło punktowe. Detektor w punkcie P.</p>	$\varphi_N(P) = \frac{M}{4\pi R^2}, \quad J_N(P) = \frac{M}{4\pi R^2}$	<p>S - źródło, M - moc źródła, <math>\text{sek}^{-1}</math>, R - odległość, cm.</p>
2	 <p>Źródło liniowe. Detektor w punkcie P w płaszczyźnie symy trójkąta.</p>	$\varphi_N(P) = \frac{M_1 \alpha}{2\pi R}$ $J_N(P) = \frac{M_1 \sin \alpha}{2\pi R}$	<p><math>M_1</math> - moc liniowa źródła, <math>\text{cm}^{-1} \text{sek}^{-1}</math>, <math>M_1 = \frac{M}{l}</math>, l - długość źródła, cm,</p>
3	 <p>Źródło tarczowe (kolowe). Detektor w punkcie P na osi źródła.</p>	$\varphi_N(P) = \frac{M_p}{h} \ln \left( 1 + \frac{h^2}{R^2} \right)$ $J_N(P) = \frac{M_p R}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2 + h^2}} \right)$	<p><math>M_p</math> - moc powierzchniowa źródła, <math>\text{cm}^{-2} \text{sek}^{-1}</math>, <math>M_p = \frac{M}{\pi R^2}</math>, h - promień tarczy, cm,</p>
4	 <p>Źródło objętościowe w postaci półprzeźroczystej. Detektor w punkcie P na ścianie płaskiej źródła.</p>	$\varphi_N(P) = \frac{M_v}{2} \lambda$ $J_N(P) = \frac{M_v}{4} \lambda$	<p><math>M_v</math> - moc objętościowa źródła, <math>\text{cm}^{-3} \text{sek}^{-1}</math>, <math>\lambda</math> - długość relaksacji dla materiału źródła i wysykanego promieniowania, cm.</p>

## LITERATURA

- [1] Lejpuński J., Nowożiłow B., Sacharow W.: "Rasprostranienje gamma kwantow w wieszozestwie", Moskwa 1960.
- [2] Łukaszek W.: "Definioje i nazwy pojęć związane z opisem pola promieniowania jądrowego". Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka z. 16, 1964.
- [3] Price B.F., Horton C.C., Spinney K.F.: "Radiation Shielding", London 1957.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ИСЧИСЛЕНИЯМ ПЛОТНОСТИ ТОКА И ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОТОКА  
ЧАСТИЦ

Р е з ю м е

Принимая во внимание понятия и обозначения, приведенные в работе [2], автор указывает на некоторые особые случаи и дает указания, пригодные при выполнении исчислений.

SOME REMARKS ON CALCULATION THE NUMBER CURRENT  
DENSITY AND THE INTEGRATED NUMBER FLUX

S u m m a r y

In connection with the definitions and designations given in the previous author's paper [2], some particular cases are described. Also the directions of practical importance are presented.