ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: ENERGETYKA z. 21 Nr kol. 156

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

PRZEDSTAWIENIE I ROZPATRYWANIE PROCESÓW CIEPLNYCH W N WYMIAROWEJ PRZESTRZENI KONFIGURACYJNEJ

Streszczenie. W pracy [27] sformułowano i rozwiązano w n wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej zagadnienie stanu ustalonego oscylacji temperatury układu złożonego z n ciał, które wymieniają ciepło między sobą według liniowego prawa, i które są wywołane wahaniami temperatury jednego ze składników układu, który w określonych chwilach załącza i wyłącza źródło ciepła.

Do powyższej tematyki nawiązują trzy niżej wymienione zagadnienia, które tematycznie tworzą jedną całość:

1) Przedstawienie i rozpatrywanie procesów cieplnych w n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej.

2) Stan ustalony oscylacji w układzie liniowym o n stopniach swobody.

3) Metody rozwiązania równań stanu ustalonego oscylacji relaksacyjnych.

W pracy niniejszej sprowadzono zagadnienie procesów cieplnych takich jak ogrzewanie i ostyganie w liniowych układach wymieniających między sobą ciepło i złożonych z n ciał,do geometrycznych rozważań n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej. Procesy te przedstawione są pewnymi krzywymi n-wymiarowymi, których rzuty na dowolne płaszczyzny współrzędnych są parabolami. Wprowadzono również n-wymiarową przestrzeń temperatur składników układu oraz przedyskutowano stosunki geometryczne między obu przestrzeniami.

Problem ten poruszono już w pracy [28], w której podano bez wyprowadzenia zestawienie wzorów, pozwalających na wyznaczenie stanu ustalonego oscylacji oraz podano odmienną niż w obecnej pracy metodę rozwiązania problemu.

1. Wstęp

W artykule niniejszym przedstawiono pierwsze z zagadnień, wymienionych w streszczeniu. Zagadnienie to było również omówione w trzecim rozdziale pracy doktorskiej autora [27].

W pracy tej rozpatrzono oscylacje temperatur w układzie n ciał, znajdujących się w ośrodku gazowym i wymieniających ciepło między sobą i z otoczeniem. Jedno z ciał jest źródłem ciepła, w określonych chwilach (np. przy pomocy termometru kontaktowego) załączanym i wyłączanym.

Jako pierwsze przybliżenie przyjęto liniowe równania, opisujące wymianę cieplną, następującej postaci

$$K_i \, d\vartheta_i/dt + S_i \, h_i \sum_{k=0}^{n} a_{ik} (\vartheta_i - \vartheta_k) = N_i \, , \; i+1.....n \qquad (1)$$

przy czym

K_i – pojemność cieplna,

S_i – powierzchnia,

h_i – współczynnik charakteryzujący wymianę cieplną ciała,

$a_{ik} \geqslant 0$ – współczynniki charakteryzujące konfigurację układu, własności emisyjne itd. Macierz $a_{ik}, i=1.....$ $....n.k=1 ....n$ jest na ogół niesymetryczna,

ϑ_i, ϑ_K, ϑ_0 – temperatury ciała i,k względnie otoczenia,

N_i – moc źródła i. W pracy przyjęto $N_1 = 0$, $N_i = 0, i=2 ...n$

Jako warunki początkowe przyjęto:

$$t = 0, \quad \vartheta_i = \vartheta_0, \quad i=1....n \text{ dla ogrzewania oraz}$$

$$\vartheta_i = T_i, \; i=1 ....n,$$

gdzie T_i temperatury końcowe poprzedzającego ostyganie procesu ogrzewania.

O macierzy a_{ik} założono, że posiada ona proste dzielniki elementarne, rzeczywiste, ujemne.

Wtedy w przypadku ogrzewania otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \, e^{\alpha_k t} + \Theta_i, \; i=1....n \qquad (2)$$

oraz dla ostygania

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}' \, e^{\alpha_k t} + \vartheta_0, \; i=1....n \qquad (3)$$

przy czym

Θ_i, ϑ_p - oznaczają temperatury stanu ustalonego,

A_{ik}, A'_{ik} - oznaczają stałe, wyznaczone z warunków początkowych.

2. Uwagi dotyczące użytej metody

Charakterystyczną cechą rozpatrywanych w pracy oscylacji jest że ich krzywe czasowej zmienności zbudowane są z krzywych aperiodycznych.

Do badania oscylacji w różnych układach, dających oscylacje relaksacyjne o krzywej zniekształconej, używane są:

1) metody, które jako wyjściowe przyjmują oscylacje sinusoidalne [2, 3, 5, 10, 11, 12, 14, 16] i przy ich pomocy budują rozwiązania dla zniekształconych przebiegów.

2) niektórzy autorzy [20, 21, 24] posługują się metodami graficznymi,

3) w ostatnich latach rozpowszechniają się metody, polegające na rozpatrywaniu oscylacji w płaszczyźnie fazowej [7, 13, 17, 25]. W przypadku nieciągłych charakterystyk, czy nieciągłych funkcji działania, metoda ta wymaga płaszczyzn fazowych wielolistkowych (metoda transformacji punktowych) [1, 6, 8, 9, 17, 18, 22, 23, 25, 29].

Wadą przewagi tych metod jest fakt, że nadają się one jedynie do rozpatrywania prostych przypadków, odpowiadających niedużej ilości stopni swobody układów.

W pracy niniejszej rozpatrywania stanu ustalonego oscylacyj przeprowadzono w przestrzeni konfiguracyjnej n wymiarowej, formułując je następująco:

Chodzi o wyznaczenie stanu ustalonego równoczesnego oscylacji temperatur n-1 ciał układu, gdy temperatura jednego z nich jest zmienna periodycznie między dwiema stałymi, danymi wartościami.

Do rozwiązania zagadnienia użyto metody, znanej w teorii układów równań różniczkowych [4, 15, 19, 26], przy czym wykorzystanie tej metody do sformułowania i interpretacji warunków i mających w stanie ustalonym oscylacji, było przedmiotem i celem pracy niniejszej.

3. Stan ustalony oscylacji

Dla badającego oscylacje, czy projektującego aparaturę, w której przewidziane są oscylacje, ważne są następujące dane:

1. Jak duże wychylenia występują w czasie rozruchu oscylacji i jakimi czynnikami można wpłynąć na ich wielkość. W szczególności, czy istnieje przeregulowanie, objawiające się w formie bardzo dużych oscylacji w czasie rozruchu.

2. Jak szybko otrzymuje się stan ustalony. Wiemy np., że liniowa teoria dla jednego ciała daje stan ustalony już od pierwszego ostygania począwszy.

3. Jak przedstawia się stan ustalony i od czego zależy.

Użyta metoda pozwala odpowiedzieć na wszystkie pytania. Istotne dla metody jest przejście od rozpatrywania przebiegów złożonych do rozpatrywania funkcyj wykładniczych.

4. Przejście od temperatur do współrzędnych ξ_i i η_i

Wychodzimy z układu równań (1) dla ogrzewania, albo przy założeniu dodatkowym $N_i = 0$ dla ostygania. W rozwiązaniach (2), (3) piszemy kreskę u góry, ze względu na dalsze zmiany zmiennych. Wprowadzamy nowe zmienne przy pomocy podstawienia

$$\vartheta_i = \bar{\vartheta}_i - \Theta_i \qquad \text{dla ogrzewania}$$
$$\vartheta_i = \bar{\vartheta}_i - \vartheta_0 \qquad \text{dla ostygania} \tag{4}$$

przy czym Θ_i oznaczają rozwiązania układu równań

$$S_i\, h_i \sum_{k=0}^{n} a_{ik}(\Theta_i - \Theta_k) = N_i, \quad i=1....n, \quad \Theta_0 = \vartheta_0 \tag{5}$$

Po transformaji układ równań (1) przechodzi w następujący

$$d\,\vartheta_i / dt = A_{ii}\,\vartheta_i t \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,\vartheta_k, \quad i=1.....n \tag{6}$$

przy czym

$$A_{ii} = -(S_i\, h_i/K_i) \sum_{k=0}^{n} a_{ik}$$

$$A_{ik} = (S_i\, h_i/K_i)\, a_{ik}, \quad i=1.....n \tag{7}$$

Z kolei wprowadzamy nowe zmienne

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\,\vartheta_k \qquad i=1.....n \text{ dla ogrzewania} \tag{8}$$

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \vartheta_k \qquad i=1....n \quad \text{dla ostygania} \qquad (od.8)$$

α_{ik} wyznaczamy z kładu równań

$$\begin{aligned} &\alpha_{i1} (A_{11} - \lambda_i) + ... + \alpha_{in} A_{n1} = 0 \\ &\text{----------} \\ &\alpha_{i1} A_{1n} + ... + \alpha_{in}(A_{nn} - \lambda_i) = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Z teorii układów równań liniowych jednorodnych, otrzymujemy jako warunek na nietrywialne rozwiązanie, by wyznacznik układu (9) był równy zeru. O pierwiastkach tego równania zakładamy, że są one rzeczywiste, ujemne i różne od siebie. Przy tych założeniach co najmniej jeden z minorów jego rzędu n-1 jest różny od zera. Przyjmujemy, że jest nim

$$\Delta'_i = \begin{vmatrix} A_{22} - \lambda_i, & ..... & A_{n2} \\ \hline A_{2n} & ..... & A_{nn} - \lambda_i \end{vmatrix} \qquad (10)$$

W tym przypadku wielkości α_{ik} możemy wyrazić przy pomocy α_{i1}, $i=1.....n$, $k = 2....n$.

5. Geometryczne przedstawienie układów współrzędnych

Transformacje (8) są affiniczne, więc wywołują prócz skręcenia układu współrzędnych ϑ_i, jeszcze zmianę wymiarów w kierunku poszczególnych osi. Wynika stąd, że jeżeli przyjmiemy, co jest wygodne, układ osi ξ_i lub η_i prostokątny, układ osi ϑ_i jest na ogół skośnokątny.

W układzie ξ_i lub η_i mamy dwa punkty ważne: $P_2(\vartheta_0....,\vartheta_0)$, oraz $P_1(\Theta_1,..... \Theta_n)$, będące punktami osobliwymi dla przypadku ostygania lub ogrzewania. Fizykalnie odpowiadają im stany ustalone dla krzywej ostygania lub ogrzewania.

Rzuty odcinka P_1 P_2, łączącego te punkty, są wyznaczone następująco

$$\xi_{io} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(\Theta_k - \vartheta_0), \qquad i=1....n \qquad (11)$$

6. Przetransformowane równania różniczkowe i ich rozwiązania

Po transformacji (8) układ równań (6) przybiera następującą postać

$$d\,\xi_i/dt = \lambda_i\,\xi_i \quad \text{lub}$$

$$d\,\eta_i/dt = \lambda_i\,\eta_i \qquad i=1\ldots n \tag{12}$$

Jego rozwiązaniami są

$$\xi_i = C_i\,e^{\lambda_i t}$$

$$\eta_i = C_i'\,e^{\lambda_i t} \qquad i=1\ldots n \tag{13}$$

Stałe C_i' dla pierwszego ogrzewania możemy przyjąć równe 1, dla dalszych procesów, będą one na ogół różne od 1 i zależne od stanu początkowego.

Choć posługujemy się współrzędnymi ξ_i η_i, fizykalny sens posiadają temperatury, więc ważne jest uwidocznić w układzie ξ_i temperatury. W dalszym ciągu uważamy ϑ_1 za temperaturę źródła ciepła, ϑ_k temperaturę dowolnego z pozostałych ciał.

7. Wyznaczenie rzutu osi ϑ_i na płaszczyznę (ξ_1, ξ_k)

Rozwiązując równania (8) ze względu na ϑ_i otrzymujemy

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\,\xi_K$$

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\,\eta_k \tag{14}$$

przy czym oznaczono

$$\beta_{ik} = \left|\frac{\alpha_i}{\alpha}\right| \tag{15}$$

$$|\alpha| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots\cdots\cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} \cdots\cdots\cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Wyznaczniki $|\alpha_i|$ powstają z $|\alpha|$ przez wstawienie za i kolumnę, kolumny ξ_i lub η_i. Współczynniki β_{ik} są prosto związane ze współczynnikami równań (2) i (3).

Równania (14) w układzie osi współrzędnych ξ_i przedstawiają pewne hiperpłaszczyzny. Aby otrzymać równanie osi ϑ_i musimy n-1 takich hiperpłaszczyzn, z pominięciem odnoszącej się do indeksu i, poprowadzić przez początek układu. Wtedy ich punkty wspólne leżą na osi ϑ_i. Rozwiązując układ n-1 równań o n niewiadomych, otrzymujemy równania n-1 rzutów osi ϑ_i na płaszczyzny (ξ_i, ξ_k), k=1....n.

W pracy [27] wyprowadzono wyrażenia na rzuty poszczególnych osi ϑ_i:

Dla osi ϑ_i otrzymujemy

$$\xi_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \xi_1, \qquad i=2.....n \tag{16}$$

wszystkie współczynniki kierunkowe są dodatnie.

Dla pozostałych osi ϑ_i otrzymujemy wyrażenia złożone, które podano w [27].

Istnieje szereg powodów, dla których współczynniki kierunkowe tych rzutów powinny być ujemne. Taki znak otrzymujemy w przypadku dwu ciał. W przypadku większej ilości składników układu, według umowy podanej na początku, obrano dwie temperatury o podobnych własnościach, jak w przypadku dwu ciał. Kształt otrzymanych krzywych, ich styczność do osi ξ_1 w początku układu, niemożność przecinania przez nie osi ϑ_i, każe nam przyjąć podobny znak, jak w przypadku dwu ciał.

8. Krzywe w przestrzeni konfiguracyjnej ξ_i lub η_i

W układzie przestrzennym współrzędnych ξ_i proces zmiany temperatur jest przedstawiony pewną krzywą przestrzenną. Jest ona wyznaczona przy pomocy swych rzutów na płaszczyzny (ξ_1, ξ_k), k=2....n. Rzuty te otrzymujemy, eliminując z równań (13) czas

$$\xi_k = C_k \, (\xi_i/C_i)^{\varkappa_{ik}}$$

$$\varkappa_{ik} = \frac{\lambda_k}{\lambda_i}, \quad i \neq k, \quad i,k=1....n \tag{17}$$

Jeżeli przyjmiemy $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n|$ oraz $\varkappa_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1}$, wtedy krzywe są styczne w początku układu do osi ξ_1. Stałe C_1, C_k są wyznaczone przez podanie stanu początkowego układu w danym procesie. Ze względu na istnienie dwojakich krzywych: ogrzewania i ostygania - mamy dwa układy współrzędnych ξ_1 lub η_1 o osiach równoległych z punktem osobliwym (stan ustalony) jako początkiem układu. Jest to niewygodne i dlatego rozumowania przeprowadzono w jednym z tych układów, przynależnym do punktu $P_2(\vartheta_0 \ldots\ldots \vartheta_0)$. W dalszym ciągu dla skrócenia będziemy układ współrzędnych nazywali podając jego początek.

Pierwsza krzywa ogrzewania, kończąca się w P_2 (punkt ten odpowiada temperaturze początkowej układu) posiada w układzie $P_1(\Theta_1 \ldots\ldots \Theta_n)$ równanie

$$\eta_k = \eta_{ko}\left(\frac{\eta_1}{\eta_{10}}\right)^{\varkappa_k}, \quad k=2\ldots\ldots n \tag{18}$$

W równaniu (18) przyjęto jako stan początkowy procesu w celu wyeliminowania stałych C_1, C_k (η_{10}, η_{ko}). Gdyby stan początkowy był inny, jak to zachodzi dla dalszych krzywych, użylibyśmy oznaczenia (η_1^*, η_k^*). Krzywa (18) przetransformowana do układu $P_2(\vartheta_0 \ldots\ldots \vartheta_0)$ posiada następującą postać

$$\xi_{ko} - \xi_k = \xi_{ko}\left(\frac{\xi_{10} - \xi_1}{\xi_{10}}\right)^{\varkappa_k} \tag{19}$$

w przypadku pierwszej krzywej ogrzewania oraz

$$\xi_{ko} - \xi_k = (\xi_{ko} - \xi_k^*)\left(\frac{\xi_{10} - \xi_1}{\xi_{10} - \xi_1^*}\right)^{\varkappa_k} \tag{20}$$

w przypadku dalszych krzywych ogrzewania, przy czym

$$\xi_k^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(T_i - \vartheta_0) \tag{21}$$

$T_i, i=1\ldots\ldots n$ oznacza temperaturę końcową poprzedniego procesu. Krzywe ostygania posiadają w układzie $P_2(\vartheta_0 \ldots\ldots \vartheta_0)$ następującą postać

$$\xi_k = \xi_k^{**}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1^{**}}\right)^{\varkappa_k} \tag{22}$$

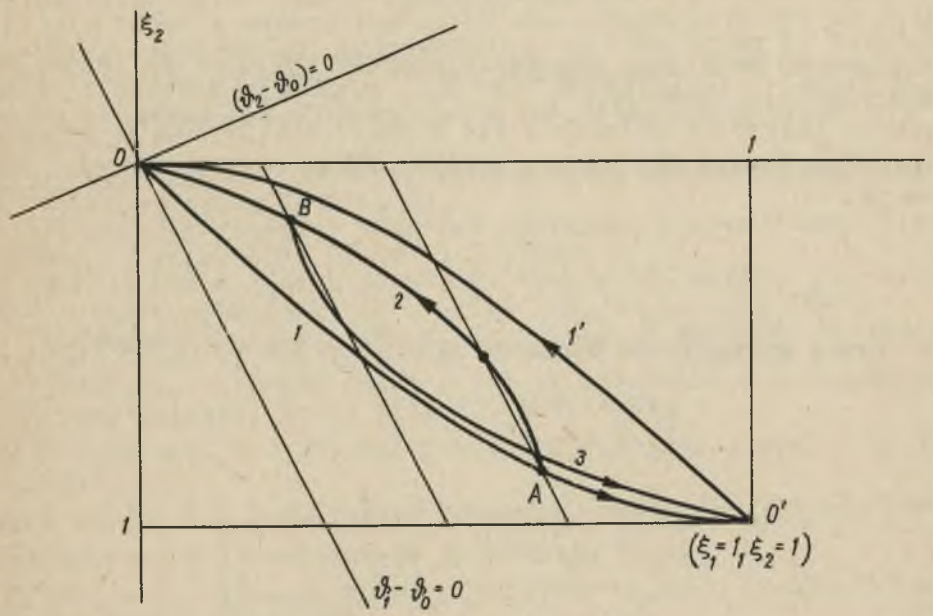
Współrzędne ξ_k^{**}, k=1.....n określone są przy pomocy

$$\xi_k^{**} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} (T_i' - \vartheta_0), \quad k=1.....n \tag{23}$$

przy czym T_i', i=1....n oznaczają temperatury początkowe.

9. Położenie krzywych

Krzywe przedstawione równaniami (19), (20), (22) są parabolami. Krzywe te mogą leżeć w różnych ćwiartkach układu współrzędnych. Odpowiednią ćwiartkę określa fizykalna strona procesu. Mianowicie w rozdziale I wymienionej wyżej pracy [27] wykazano, że krzywe przedstawiające przebiegi temperaturowe składników układu, nie posiadających źródła ciepła, od pierwszej krzywej ostygania począwszy, posiadają ekstrema. W płaszczyźnie (ϑ_1, ϑ_k) i jej rzutach występuje również ekstremum, czyli jednej wartości ϑ_k odpowiadają dwie wartości ϑ_1. ϑ_1 odnosi się do ciała posiadającego źródło ciepła. To decyduje o wyborze poło-



Rys. 1. Krzywe temperaturowe w dwuwymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej. 1,3 krzywe ogrzewania, 1', 2 krzywe ostygania

żenia krzywych, jak na rysunku 1. Rysunek ten odnosi się do przypadku dwu ciał, ale na podstawie poprzednich uwag, podobny przebieg powinien być w przypadku układu więcej składnikowego.

10. Nierówności, charakteryzujące przebiegi krzywych

Ostatnie uwagi o istnieniu ekstremów możemy sformułować matematycznie. Ponieważ rzut na płaszczyznę (ξ_1, ξ_k) krzywej traktowany jako funkcja ϑ_1, ϑ_k posiada postać uwikłaną, przyjmujemy ϑ_1 jako zmienną zależną ϑ_k jako zmienne niezależne. Badając więc pochodne ϑ_k względem ϑ_1 znajdujemy warunek na ekstremum. Obliczenie, przeprowadzone w pracy [27] daje dla krzywych ostygania czy ogrzewania następujące nierówności

$$\frac{\xi_1^* \quad \xi_{ko}}{\xi_k^* \quad \xi_{10}} \leqslant 1$$

$$\frac{\xi_{10} - \xi_1^{**}}{\xi_{ko} - \xi_k^{**}} \cdot \frac{\xi_{ko}}{\xi_{10}} \leqslant 1 \tag{24}$$

Oznacza to położenie odnośnych punktów krzywych po jednej stronie prostej, łączącej P_1 i P_2, przy czym prosta ta przedstawia graniczne położenie dla punktów (ξ_i^*), (ξ_i^{**}), $i=1,\ldots,n$. Ostatnio wymieniona prosta odgrywa ważną rolę w teorii oscylacji.

Praca wpłynęła do Redakcji w dniu 24 kwietnia 1965 r.

LITERATURA

[1] Aleksiejew A.S.: Dwuchpozycionnyj regulator temperatura s conoj opereżdienia, A.N. SSSR Pamiati A.A. Andronowa 1955.

[2] Appleton, Greave: On the solution of the representative differential equation of the triode oscillator, Phil. Mag. ser. 6, t. 45, 401, 1923.

[3] Asejew B.P.: Osnowy radioteohniki, Gos. Izd. po woprosam swiazi i radio, Moskwa 1947.

[4] Bieberbach L.: Differentialgleichungen, Springer Berlin 1926.

[5] Chawkin G.: Aktywnyje i pasywnyje w smysle synchronizacii parametry relaksatora, Uczonyje zapiski, Wyp. 134, Fizyka, Kniga V, Moskwa Uniw. 1949.

[6] Cypkin Ja Z.: K tieorii relejnych sistiem awtom. regulirowania, Trudy II Wsesojuz. Sowieszcz. po tieorii awtom. regulirowania, T.I.A.N. Moskwa 1955.

[7] Duff J.N., Mc Curreri J.R.: Drgania w teohnice P.W.T. W-wa 1960.

[8] Fajgin M.J.: K tieorii triggera, A.N. SSSR Pamiati A.A. Andronowa 1955.

[9] Fufajew N.A.: Tieoria elektromagnitnowo preriwatiela, s. 334, Tieoria wibracionnowo zwiena rabotajuszczewo na principie elektromagn. preriwatiela, s. 410, Trudy II Wsesojuz Sowieszcz. po tieorii awtom. regul., A.N. SSSR Moskwa 1955.

[10] Groszkowski J.: Wytwarzanie drgań elektryoznych,,PWT W-wa 1958.

[11] Groszkowski J.: Częstotliwość układów relaksacyjnych, Kwart. Telekom. 1947, Nr 3-4, 33.
Generatory wysokiej stałości częstości z ujem. sprzężeniem zwrot. Arch. Elt. I, nr 1, 3, 1952.
Rozszerzenie zasady równowagi mocy uroj. harmon. na układy o widmach ciągłych, Arch. Elt. III, no 4, 499, 1945.
Indukcyjność i oporność ujem. pobudz. o zaskoku napięcia, Arch. Elt. II, no 3-4, 305, 1953.
Cykl gran. układów drgań o jednym wyraźnym elem. magazynującym energię. Arch. Elt. IV, 509, 1955.

[12] Iochoki Ju. S.: Nieliniejnaja radiotechnika, Sow. Radio 1955.

[13] Kauderer H.: Niohlineare Mechanik, Springer Berlin 1958.

[14] Kokuryn: Relaksacionnyje kolebania, 1938.

[15] Krejer J.: Zbirnik wpraw s dyfferencialnych riwnań, Radiańska Szkoła Kiiw 1960

[16] Kryłow N.M. Bogolubow N.N.: Wwiedienie w nieliniejnuju mechaniku, Izd. A.N. SSSR Kijew 1937.

[17] Magnus K.: Uber ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- u.Reglungs-systeme, V.D.I. Forschungsheft 451, Düsseldorf 1955.

[18] Nejmark Ju. S.: O periodiczeskich dwiżeniach relejnych sistiem, A.N. SSSR Pamiati A.A. Andronowa, 242, 1955.

[19] Niemycki W.W., Stiepanow W.W.: Kaczestwiennaja tieoria differencialnych urawnienij, O.G.I.Z. Moskwa 1947.

[20] Nijenhuis W.: A note on a generalised van der Pol equation, Philips Research Reports. R. 122, T. 4, 401-406, 1949.

[21] Nonlinear circuit analysis, Proc. od the symposium on N.Y. 1956, Polytechnic Press Brooklyn 1953.

[22] Pietrow W.W. - Dynamika adno i dwoch kaskadnych serwomechanizmow s nieskolkimi nieliniejnymi charakt., Trudy II Wsesojuz. Sowieszcz. po tieorii awtom. regul., AN Moskwa 1955, 410.

[23] Pogodin Ł.W.: - K tieorii swiazanych relaksacionnych generatorow, A.N. SSSR Pamiati A.A. Andronowa, 1955, 274.

[24] Pol van der B.: Wymuszone oscylacje w obwodach z nieliniowymi oporami (ang.), Phil. Mag. ser. 7, t. 3, 65, 1927.

[25] Sołodownikow W.K.: Zasady autom. regulacji (ros.) Gos. Izd. N.T. Lit Maszynostroj. Moskwa 1954.

[26] Stiepanow W.W.: Kurs differencialnych urawnienij, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1950.

[27] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, praca doktorska, Wydz. Mech. En. Pol. Śląskiej 1959.

[28] Szpilecki J.: Projektowanie układów aperiodycznie statecznych, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Energetyka nr 11, 9, 1963.

[29] Zelezcow N.A.: K tieorii kiprele, A.N. SSSR Pamiati A.A. Andronowa 1955, 225.

[30] Ziemba S.: Analiza drgań, I, PWN W-wa 1957, II PWN W-wa 1959.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РАССМАТРИВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ
И n МЕРНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВА

Р е з ю м е

В работе сформулирована и решена проблема установившегося состояния температурных колебаний в n димензиональном конфигурационном пространстве в системе состоящей из тел, обменяющих теплоту между собой и с окружающем телом по линейному закону и возбужденных изменениями температуры одной компоненты системы, которая в определенных моментах времени включает или выключает источник теплоты.

Ввиду большого объема, работа разделена на три части:

В первой работе сведено проблему к геометрическим рассуждениям в n мерном конфигурационном пространстве, во второй рассматривается проблема установившегося состояния колебаний, в третьей даны методы решения уравнений установившегося состояния.

Проблема рассматривается тоже в работе [28], где дано короткое изложение теорий колебаний и другой метод решения уравнений установившегося состояния.

PRESENTATION AND CONSIDERATION OF HEAT PROCESSES
IN A N-DIMENSIONAL CONFIGURATION SPACE

S u m m a r y

In the paper [27] is formulated and solved in a n-dimensional configuration space the steady state problem of temperature oscillations for a system, composed of n bodies, exchanging heat between them and with surrounding medium following the linear law, and excited by temperature variations of one component of the system, which in some determined moments of time sets on and off the heat source.

In connection with this problem are the three folowing papers:

1. Representation and consideration of heat processes in a n-dimensional configuration space,

2. Steady state of temperature oscillations in a linear system with n degrees of freedom.

3. Solving methods of the steady state equation system of relaxation oscillations.

In the first paper, the problem of heat processes such as for example a heating or cooling in the linear systems exchanging the heat and composed of n bodies, has been reduced to geometrical consideration in a n-dimensional configuration space.. The processes are presented by n dimensional curves whose projections into arbitrary coordinate planes are parabolas.

It is also n-dimensional temperature space introduced and geometrical connections between the two spaces are discussed.

The problem is also in the paper [28] considered, where the formulae have been given, permitting to solve the steady state equations of oscillations but the solving method of the problem differs from the methods discussed in present paper.