ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: ENERGETYKA z. 22 Nr kol. 168

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

STAN USTALONY OSCYLACJI TEMPERATURY W UKŁADZIE LINIOWYM O N STOPNIACH SWOBODY

Streszczenie. Praca niniejsza opiera się na pracy [2], w której sprowadzono zagadnienie stanu ustalonego oscylacji temperatury w układzie liniowym o n stopniach swobody do rozważań geometrycznych w n wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej.

Przedyskutowano w pracy zagadnienie oscylacji bez opóźnienia i z opóźnieniem. Rezultatem dotyczącym pierwszego zagadnienia jest, że oscylacje bez opóźnienia nie mogą istnieć w układzie liniowym.

Jeżeli chodzi o oscylacje z opóźnieniem to przedyskutowano następujące zagadnienia ważne dla opisu stanu ustalonego:

1. Zagadnienie przeregulowania.
2. Wyznaczanie czasu, po którym następuje osiągnięcie stanu ustalonego.
3. Wyznaczenie granic, w których waha się temperatura każdego z n składników układu.
4. Wyznaczenie okresu stanu ustalonego.

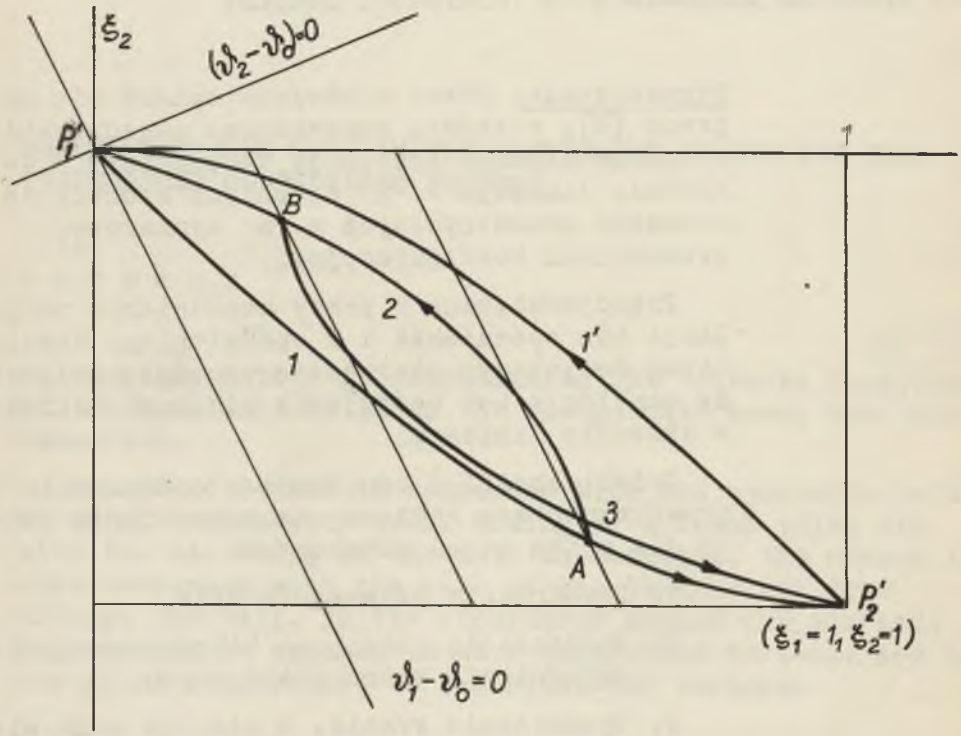
1. Wstęp

W części pierwszej pracy sprowadzono zagadnienie oscylacji do geometrycznego rozpatrywania zagadnienia w n wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej. Rozważania części drugiej

są zasadniczo prowadzone w tej przestrzeni z ewentualnym przejściem (w razie potrzeby) do przestrzeni temperatur.

2. Pole krzywej oscylacji

Rysujemy (rys. 1) pierwszą krzywą ogrzewania i pierwszą krzywą ostygania. Obie krzywe doprowadzamy do stanu usta-



Rys. 1. Krzywe temperaturowe w dwuwymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej

1,3-krzywe ogrzewania, 1′,2-krzywe ostygania

lonego. W płaszczyźnie (ξ_1, ξ_k) rzuty krzywych przechodzą przez punkty P_1' i P_2', rzuty P_1 i P_2. Krzywe te ograniczają pewien obszar o kształcie soczewki.

Twierdzimy, że cały proces oscylacji mieści się w obrębie tego obszaru. I tak pierwsza krzywa ogrzewania i ostygania, doprowadzone do stanu ustalonego stanowią ograniczenie wspomnianego obszaru. Jeżeli stan końcowy nie jest stanem ustalonym, krzywe przebiegają w obrębie pola, obszaru, dochodząc w najniekorzystniejszym przypadku do punktów wymienionych wyżej krzywych.

3. Problem przeregulowania

Jak z dalszego rozważania wynika, stan ustalony oscylacyj leży w pobliżu prostej, łączącej P_1' z P_2'. Ponieważ punkty końcowe pierwszych dwu procesów leżą na jednej z krzywych rysunku 1 i są ograniczone drugą. Kształt tej krzywej (jej odchylenie od prostej $P_1' P_2'$) może być miarą przeregulowania, czyli odchylenia pierwszych oscylacyj od wartości stanu ustalonego. Przeregulowanie powinno być tym większe, im większe jest pole ograniczone wymienionymi na wstępie krzywymi. Pole tego obszaru (zob. praca [1]) dane jest następującym wyrażeniem

$$\xi_{ko}\, \xi_{10}\, \frac{\varkappa_k - 1}{\varkappa_k + 1} \tag{1}$$

W przypadku więc $\xi_{10} = \xi_{ko} = 1$ zależy wyłącznie od $\varkappa_k$. Aby więc pola ograniczone przez poszczególne krzywe w poszczególnych płaszczyznach były najmniejsze, muszą być spełnione warunki $\varkappa_k = 1$, $k = 1 \ldots\ldots n$, co odpowiada stanowi aperiodycznemu granicznemu (pierwiastki równania charakterystycznego układu (9)[2] powinny być równe).

Przeciw temu rozumowaniu przemawia fakt, że w takim przypadku oscylacje są nie możliwe. Drugi zarzut polega na tym, że przy deformowaniu krzywych przez zmianę $\varkappa_k$ może równocześnie następować w ten sposób przesuwanie się punktów po krzywych, że pierwsze wychylenia nie zostaną zredukowane. Z tego powodu problem ten przedyskutowano dalej w dokładniejszym sformułowaniu. Wynik rozpatrywania jest zgodny z powyższym.

4. Stan ustalony oscylacyj

4.1. Definicja stanu ustalonego

Dla osiągnięcia stanu ustalonego krzywa ogrzewania i krzywa ostygania muszą mieć dwa punkty wspólne. Początek jednej krzywej musi być końcem drugiej. To narzuca na współrzędne obu punktów końcowych 2n-2 warunków. Brakujące dwa warunki otrzymujemy, jak podano niżej, przez założenie o wahaniach temperatury urządzenia regulującego np. wskutek niedoskonałości urządzeń regulacyjnych, załączających i wyłączających źródło, otrzymujemy wahania temperatury tego ciała między dwiema wartościami. W dalszym ciągu zakładamy, że wartości te są znane.

4.2. Oscylacje bez opóźnienia

Teoretycznie możliwe są oscylacje temperatur nawet w przypadku, gdy wszystkie urządzenia regulacyjne, włączające i wyłączające źródło, działają bez opóźnienia. Jest to spowodowane faktem, że krzywe zmian temperatur ciał, nie posiadających źródła ciepła, posiadają ekstrema.

W pracy [1] wykazano, że oscylacje takie muszą zakończyć się na prostej

$$\xi_{10}\xi_k^* - \xi_{k0}\,\xi_1^* = 0, \quad k=2,\ldots,n \tag{2}$$

to znaczy prostej, łączącej P_1' z P_2', przy czym amplituda staje się równa zeru. Wobec tego oscylacje nie mogą istnieć w stanie ustalonym.

4.3. Oscylacje z opóźnieniem

Jest to typ oscylacyj, występujący w praktyce. W oscylacjach tych efekt omówiony w poprzednim punkcie, odgrywa też pewną rolę.

Dla wyznaczenia stanu ustalonego mamy następujące równania:

$$\frac{\xi_i^*}{\xi_i^{**}} = \left(\frac{\xi_1^*}{\xi_1^{**}}\right)^{\varkappa_i}$$

$$\frac{\xi_{io} - \xi_i^*}{\xi_{io} - \xi_i^{**}} = \left(\frac{\xi_{10} - \xi_1^*}{\xi_{10} - \xi_1^{**}}\right)^{\varkappa_i} \quad i=2.....n \tag{3}$$

$$\Theta_{n1} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_k^*$$

$$\Theta_{n2} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_k^{**}$$

Dwa pierwsze równania są matematycznym sformułowaniem faktu, że stan oscylacyj jest ustalony. W tym przypadku (ξ_i^*), (ξ_i^{**}), $i=1.....n$ oznaczają wspólny koniec i początek krzywych stanu ustalonego.

4.4. Uwagi, odnoszące się do dwu ostatnich równań (3)

Równania te wyrażają fakt, że temperatura ciała n zmienia się w pewnym zakresie. Punktom końcowym procesu ustalonego (ξ_i^*), (ξ_i^{**}), $i=1...n$ odpowiadają dwie temperatury, które uważamy za dane. W obu równaniach występują te same współczynniki, ponieważ ta sama krzywa ogrzewania lub ostygania przechodzi przez oba punkty końcowe. Nasuwa się jeszcze pytanie, jakie powinny być współczynniki A_{nk}. Powstaje ono z tego powodu, że jak wykazano w rozdziale I wymienionej na początku pracy,[1] współczynniki te są zmienne od procesu do procesu, jako zależne od stanu początkowego danego procesu, przy czym we współczynnikach tych jest zawarta cała historia procesu oscylacyj. Ponieważ pierwsze równania (3) nie dają nam odpowiedzi, od którego

procesu zaczyna się stan ustalony, ani też przez jakie wartości ustala się proces, wydawałoby się, że zagadnienie w ten sposób sformułowane, nie da się rozwiązać. W rzeczywistości tak nie jest. Jako współczynników w równaniach możemy użyć współczynników, odnoszących się do pierwszej krzywej ogrzewania, ponieważ współczynniki w następnych procesach powstają z nich przez pomnożenie przez pewne współczynniki stałe dla danego procesu i w których zawarta jest cała historia procesu oscylacyj. Ponieważ z drugiej strony współrzędne ξ_i czy η_i zawierają stałe, możemy w tych stałych ująć niewygodne dla nas czynniki.

Matematycznie wygląda to następująco: Przypuśćmy, że bierzemy pod uwagę krzywe ogrzewania. W pracy [1] wykazano że są one postaci następującej:

$$\vartheta_{n(s)} - \Theta_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \varepsilon_{k(s)} e^{\lambda_k t} \tag{4}$$

Współczynniki oznaczono tu odmiennie, mianowicie współczynniki A_{nk} odnoszą się do pierwszego ogrzewania, współczynniki $\varepsilon_{k(s)}$ wyrażają wpływ historii procesu oscylacji. Do krzywych ogrzewania odnoszą się współrzędne $\eta_i = \xi_{io} - \xi_i$.

Jeżeli więc podstawimy

$$\varepsilon_{k(s)} e^{\lambda_k t} = \eta_k = 1 - \xi_k \tag{5}$$

otrzymujemy następujące równanie

$$\vartheta_{n(s)} - \Theta_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}(1 - \xi_k) \tag{6}$$

albo wykorzystując warunki początkowe pierwszego procesu ogrzewania

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk} = \vartheta_o - \Theta_n \tag{7}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$-(\vartheta_{n(s)} - \vartheta_o) = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_k \tag{8}$$

W równaniu (3) oznaczono

$$-(\vartheta_{n(s)1} - \vartheta_o) = \Theta_{n1}, \quad -(\vartheta_{n(s)2} - \vartheta_o) = \Theta_{n2} \tag{9}$$

Zagadnienie dlaczego przyjęto przy tym

$$\xi_{io} = 1 \tag{10}$$

zostało omówione szczegółowiej w dalszym ciągu pracy.

4.5. Wyznaczenie okresu oscylacji

Posiadając wartości ξ_i^*, ξ_i^{**} dla stanu ustalonego (metody ich wyznaczenia omówiono w części trzeciej), możemy wyliczyć czasy ogrzewania dla stanu ustalonego z następujących równań

$$\xi_i^{**} = \xi_i^* e^{\lambda_i t_1} \tag{11}$$

$$1 - \xi_i^* = (1 - \xi_i^{**})\, e^{\lambda_i t_2} \tag{11}$$

$$i = 1, \ldots\ldots n$$

jeżeli w wyrażeniach dla ξ_i^*, ξ_i^{**} uwzględnimy tylko pierwsze potęgi δ_i, otrzymujemy na podstawie wyników pierwszej metody

$$t_1 = (2\delta_1/\lambda_1)(\vartheta_o - \Theta_n)/\Theta_{n1}$$

$$t_2 = -(2\delta_1/\lambda_1)(\vartheta_o - \Theta_n)/(\vartheta_o - \Theta_n - \Theta_{n1}) \tag{12}$$

stąd otrzymujemy na sumę czasów czyli okres oscylacji

$$t_1 + t_2 = (2\delta_1/\lambda_1)(\vartheta_o - \Theta_n)\left[1/\Theta_{n1} - 1/(\vartheta_o - \Theta_n - \Theta_{n1})\right] \tag{13}$$

oraz dla stosunku czasów

$$t_1/t_2 = -(\vartheta_o - \Theta_n - \Theta_{n1})/\Theta_{n1} \tag{14}$$

Z ostatniego równania wynika, że oscylacje są niesymetryczne.

Druga metoda rozwiązania problemu pozwala zinterpretować wielkości z_1, y przy pomocy czasów stanu ustalonego

$$\lambda_i t_1 = \ln(\xi_i^{**}/\xi_i^*) = \ln z_i = \ln z_1^{\varkappa_i} \tag{15}$$

$$\lambda_i t_2 = \ln(1 - \xi_i^*)/(1 - \xi_i^{**}) = -\ln y$$

4.6. Jakie stałe C_k, C'_k należy przyjąć w poprzednich rozważaniach

Na podstawie równań (4), (5) możemy napisać następujące zależności

$$\xi^*_k = C_k \varepsilon_{k(s)} e^{\lambda_k t_1}$$

$$\xi^{**}_k = C_k \varepsilon_{k(s)} \tag{16}$$

$$1 - \xi^{**}_k = - C'_k \varepsilon_{k(s+1)} e^{\lambda_k t_2}$$

$$1 - \xi^*_k = - C'_k \varepsilon_{k(s+1)} \tag{17}$$

Stałe C_k, C'_k są tu dowolne. Byłoby wygodne, gdyby były one wspólne wszystkim krzywym, bo inaczej problem nie dałby się przedstawić na wspólnym rysunku. Postać równań, wyznaczających czasy, odnoszące się do stanu ustalonego (15) pokazuje że stałe te nie odgrywają w nich roli ze względu na jednorodność równań (15) ze względu na ξ^*_i i $1 - \xi^*_i$. Podobną własność posiadają równania parabol (3). Z równań wreszcie dla temperatur (8), (9) jest widoczne, że możemy przyjąć $C_k = C'_k = \pm 1$. Na rysunku 1 przyjęto te wartości ujemne, ze względu na własności krzywych ogrzewania i ostygania, wykazane w rozdziale I pracy [1].

4.7. Zagadnienie szybkości ustalania się oscylacji

Z poprzedniego rozumowania wynika, że niezależnie od tego, którą parę sąsiednich krzywych przyjmiemy, z wyjątkiem pierwszej krzywej ogrzewania, otrzymujemy podobnie jak w przypadku jednego ciała, stan ustalony. Wynik opiera się oczywiście, podobnie jak w przypadku jednego ciała, na za-

łożeniu, że opóźnienia spowodowane nienatychmiastowym reagowaniem urządzenia regulacyjnego, są takie same jak w stanie ustalonym.

4.8. Uzupełnienie twierdzenia, dotyczącego przeregulowania

Omówione w jednym z poprzednich paragrafów twierdzenie dotyczące przeregulowania, wymaga uzupełnienia. Przy zmianie $\varkappa_1$ mogą punkty wyznaczające stan oscylacji poruszać się w ten sposób na krzywych, że ich odległość nie będzie malała, choć pole krzywej będzie dążyło do zera.

Z równań problemu (3) wynikają następujące zależności

$$\theta_{n1} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_1^{*\varkappa_k} \tag{18}$$

$$\theta_{n1} + \Delta\vartheta = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_1^{**\varkappa_k}\, \varkappa_1 = 1$$

Główną trudność przedstawia ich rozwiązanie. Wchodzi tu w grę rozwiązanie przybliżone i analityczne, o postaci na tyle prostej, by pozwalało łatwo sprawdzić spełnienie lub niespełnienie warunku (18). Przy obliczeniu jego wykorzystano fakt, że ξ_1^* i ξ_1^{**} są ułamkami. Ponieważ w równaniu występują rosnące potęgi $\varkappa_n$, ze względu na założenie o uporządkowaniu wykładników według wielkości oraz $\xi_1 = e^{\lambda_1 t}$, jako pierwsze przybliżenie (oznaczone indeksem 0) przyjęto rozwiązania równania, których pominięto wszystkie wyższe potęgi ξ_1. Jako drugą skrajną wartość przyjęto pełne równanie, zakładając we wszystkich wyrażeniach poprzednio pominiętych, $\xi_1 = 1$. Jest to wartość, której nie może przekroczyć rozwiązanie, otrzymane drogą iteracji, przez podstawienie przybliżonego rozwiązania do wyrazów poprawkowych. Oznaczono je indeksem 1. Jako trzecią wartość przyjęto średnią arytmetyczną obu powyższych

wartości (oznaczono ją kreską u góry). Dla pierwszego równania otrzymujemy:

$$\xi^{*}_{1(o)} = \Theta_{n1}/A_{n1}$$

$$\xi^{*}_{1(1)} = (\Theta_{n1} - \vartheta_o + \Theta_n)/A_{n1} + 1 \qquad (19)$$

$$\bar{\xi}^{*}_{1} = (2\,\Theta_{n1} - \vartheta_o + \Theta_n)/2\,A_{n1} + 1/2$$

Podobnie dla drugiego równania

$$\xi^{**}_{1(o)} = (\Theta_{n1} + \Delta\vartheta)/A_{n1}$$

$$\xi^{**}_{1(1)} = (\Theta_{n1} - \vartheta_o + \Theta_n + \Delta\vartheta)/A_{n1} + 1 \qquad (20)$$

$$\bar{\xi}^{**}_{1} = (2\,\Theta_{n1} + 2\Delta\vartheta - \vartheta_o + \Theta_n)/2\,A_{n1} + 1/2$$

Przy pomocy powyższych wartości tworzymy wyrażenia dla odległości odnośnych punktów (indeksy u dołu informują o tym które punkty wykorzystano): d_{oo}, d_{11}, $d_{śr}$, d_{o1}, d_{10}. Na podstawie wzoru (19) i (20) otrzymujemy

$$d_{oo} = d_{11} = d_{śr.} = -\Delta\vartheta/A_{n1} \qquad (21)$$

Na podstawie wyników rozdziału I pracy [1] można napisać

$$1/A_{n1} = (1-1/\varkappa_2)(1-1/\varkappa_3)\ldots\ldots(1-1/\varkappa_n)\,.\,D_n \qquad (22)$$

przy czym w współczynniku D_n ujęto wyrażenia, które w rozważaniu nie odgrywają roli.

Wynika stąd, że jeżeli chodzi o przeregulowanie, brak przeregulowania (minimalne przeregulowanie) otrzymujemy w przypadku, gdy spełnione jest co najmniej jedno z równań $\varkappa_i = 1$, $i = 2,\ldots n$ podobnie jak w przypadku równania (1).

Do podobnego wyniku doszlibyśmy, podstawiając w równaniach prostych otrzymane z drugiej krzywej, ograniczającej obszary dyskutowane, zależności między współrzędnymi.

Do nieco innego wyniku dochodzimy, używając punktów obliczonych różnymi metodami, więc dla

$$d_{01}^{2} = ((\theta_n - \vartheta_o + \Delta\vartheta)/A_{n1} + (n - 1)$$
$$d_{10}^{1} = ((\theta_n - \vartheta_o - \Delta\vartheta)/A_{n1} + 1)^2 \ (n-1) \tag{23}$$

Pierwszy wyraz tych wyrażeń otrzymujemy przy pomocy równań (19) i (20), drugi stąd, że jeżeli chodzi o pozostałe współrzędne punktów, to w jednym przypadku są one przyjęte równe zeru, w drugim równe 1. Ponieważ tych wyrazów jest n-1, stąd wartość drugiego wyrazu równań (23).

Wyrażenia (23) mają tę własność, że podstawienie w nich jednego lub kilku warunków typu dyskutowanego wyżej, daje na obie odległości wartość n, więc różną od zera. Nasuwa się pytanie czy takie przypadki dadzą się zrealizować? Jeżeli przyjrzymy się współczynnikom kierunkowym rzutów poszczególnych osi temperaturowych, jak zmieniają się one, gdy zbliżamy się do równości dwu lub więcej wykładników $\varkappa_i$ widzimy, że osie te zmieniają swoje nachylenie i mogą dążyć do położenia równoległego do prostej, łączącej punkty P_1 i P_2. Ponieważ każda taka prosta nie będąc równoległa do prostej P_1P_2 przecina obie krzywe ograniczające pole oscylacji, więc dążąc do połączenia równoległego przy równoczesnym spłaszczaniu się krzywych daje punkty przecięcia coraz bardziej zbliżające się do punktów P_1 i P_2. Oba punkty byłyby więc osiągane, gdyby proste te prze-

chodziły przez początek układu. W tym więc przypadku warunek podany wyżej prowadziłby do maksymalnej odległości punktów przecięcia.

5. Uogólnienia metody

W pracy [1] przedyskutowano również zastosowanie metody wyznaczania stanu ustalonego oscylacji do innych przypadków:

1. Gdy temperatury początkowe ciał układu są różne od temperatury otoczenia.
2. Gdy temperatura otoczenia zmienia się jednostajnie z czasem.
3. Gdy moc źródła zmienia się liniowo z czasem.
4. Gdy układ jest opisany innymi stałymi w przypadku ogrzewania, innymi w przypadku ostygania.
5. Gdy układ opisany jest nieliniowymi równaniami.

LITERATURA

[1] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr. doktorska Wydz. Mech.-En. Pol. Śl. 1959.

[2] Szpilecki J.: Przedstawienie i rozpatrywanie procesów cieplnych w n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka nr 21 (1966).

Wpłynęło do Redakcji 24 kwietnia 1965 r.

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ИМЕЮЩИХ n СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Р е з ю м е

В статье приводится вторая часть работы, которой первая часть была уже печатана [2]. Рассматривается проблема осцилляций с опозданием и без опоздания. Вторые не могут существовать в линейных системах. Для осцилляций с опозданием рассматриваются следующие проблемы, важные для установившегося состояния:

1) проблема перерегулирования,
2) время, потребное для достижения установшегося состояния,
3) пределы, в которых изменяются температуры всех n тел в установившемся состоянии,
4) период установившихся колебаний.

STEADY STATE OF TEMPERATURE OSCILLATIONS IN A LINEAR SYSTEM WITH n DEGREES OF FREEDOM

S u m m a r y

This reprint is the second and most important part of the paper, the first part of which was previously published [2]. Here is the problem of oscillations with and without retardation discussed. The first ones can only persist in a steady state in a linear system. For the oscillations with retardation there were discussed the following problems, important for the steady state:

1) the problem of overcontrol,
2) the time necessary for achieving steady state,
3) the limits of temperature variation of each of n system components,
4) the period of steady state oscillations.