ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: ENERGETYKA z. 25 Nr kol. 181

JÓZEF ROZEWICZ
Katedra Cieplnych Maszyn Wirnikowych

UOGÓLNIENIE WYNIKÓW ROZWIĄZAŃ NUMERYCZNYCH I POMIARÓW EKSPERYMENTALNYCH ZAGADNIEŃ USTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie. Wskazano metodę umożliwiającą wyznaczenie podstawowego rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego stacjonarnego przewodzenia ciepła w oparciu o wyniki rozwiązań numerycznych.

Podany sposób w wielu przypadkach może być wykorzystany w zagadnieniach z trzecim warunkiem brzegowym.

Podstawą wyznaczenia rozwiązań fundamentalnych mogą być również wyniki pomiarów pola temperatur, przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym lub modelu.

WSTĘP

W wyniku przybliżonego rozwiązania równania Laplace'a metodą różnic skończonych, otrzymuje się wartości liczbowe temperatur w badanym obszarze, odpowiadające konkretnie określonym liczbowo warunkom brzegowym. Jeżeli wartości liczbowe określające warunki brzegowe zadania ulegają zmianie, to proces rozwiązywania numerycznego należy powtórzyć.

Podobnie, pomiary pola temperatur obiektu rzeczywistego lub pola modelu - w przypadku badań metodami analogii eksperymentalnej, winny być wykonane ponownie, przy zmianie warunków brzegowych.

W pracy niniejszej podano metodę umożliwiającą dla pewnych przypadków uogólnienie wyników rozwiązań szczególnych. Określenie rozwiązania podstawowego dla badanego obszaru, pozwala na wyznaczenie pola temperatur przy różnych liczbowo warunkach brzegowych.

1. UOGÓLNIENIE ROZWIĄZAŃ PIERWSZEGO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Niech w ograniczonym obszarze płaskim G poszukiwane będzie rozwiązanie równania różniczkowego Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

spełniające na brzegu Γ warunki określone na n częściach brzegu równaniami

$$\vartheta_{\Gamma_k} = t_k; \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

przy czym $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n = \Gamma$.

Założmy, że obszar G można aproksymować obszarem siatkowym G_h, a brzeg Γ brzegiem Γ_h, [1]. Zastępując równanie (1) równaniami różnicowymi otrzymujemy dla wewnętrznych węzłów $P_{i,j}$ obszaru siatkowego równania różnicowe:

$$\vartheta_{i,j} = \frac{1}{4}(\vartheta_{i+1,j} + \vartheta_{i,j+1} + \vartheta_{i-1,j} + \vartheta_{i,j-1}), \tag{3}$$

a dla węzłów położonych na brzegu Γ_h warunki:

$$\vartheta_{i,j;k} = t_k \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{4}$$

Zakładamy przy tym, że przynajmniej dla jednej pary wskaźników k' i k'':

$$t'_k \neq t''_k \tag{5}$$

Ilość równań (3) jest równa liczbie węzłów wewnętrznych. Podstawiając do równań (3) wartości określone równaniami (4) otrzymujemy układ równań o ilości niewiadomych równej liczbie równań w układzie. Rozwiązując ten układ metodą eliminacji

niewiadomych można otrzymać dla dowolnego węzła $P_{i,j}$ wartość $\vartheta_{i,j}$ w postaci:

$$\vartheta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_k t_k , \tag{6}$$

gdzie:

a_k - współczynniki liczbowe zależne tylko od obszaru G_h i jego podziału, przy czym

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \tag{7}$$

Przy dużej ilości węzłów siatki, bezpośrednie rozwiązanie układu (3) i sprowadzenie do postaci (5) jest trudne rachunkowo, dlatego przy rozwiązywaniu równań różnicowych stosowane są metody pośrednie, np. iteracji Libmana lub relaksacji [1].

W pracy niniejszej wykażemy, że jeżeli znane są rozwiązania uzyskane dowolną metodą numeryczną, albo metodą analogii eksperymentalnej lub z pomiarów n-1 zadań określonych w niezmiennym obszarze G_h, przy różnych n-1 zespołach warunków brzegowych (4), to znaleźć można rozwiązanie podstawowe, umożliwiające wyznaczenie wartości $\vartheta_{i,j}$ dla dowolnego zespołu warunków brzegowych (4).

Niech znane będą rozwiązania n-1 zadań przy różnych warunkach brzegowych:

$$\vartheta_{i,j;k} = t_k^s = \text{var} \quad \text{dla } s = 1,2,\ldots,n-1 \quad \text{przy } k = 1,2,\ldots,n \tag{8}$$

Zakładamy ponadto:

$$\begin{vmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

Ze wzoru (6) otrzymujemy dla każdego zespołu warunków brzegowych, dla dowolnego punktu węzłowego wewnętrznego $P_{i,j}$:

$$\vartheta_{i,j}^s = \sum_{k=1}^{n} a_k t_k^s \tag{10}$$

$$s = 1,2,\dots,n-1$$

Przekształcając równania (10) otrzymujemy wraz z równaniem (7) układ n równań liniowych niejednorodnych o n niewiadomych $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} t_k^s a_k = \vartheta_{i,j}^s ; \; s = 1,2,\dots,n-1 \\ &\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Odpowiadający układowi (11) - układ jednorodny:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k^s a_k = 0 ; \; s = 1,2,\dots,n-1 \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0, \tag{12}$$

posiada przy spełnieniu warunku (5) i ze względu na (9), tylko rozwiązania zerowe. Zatem układ (11) jest niesprzeczny i posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Określone z rozwiązania układu (11) wartości $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stanowią współczynniki liczbowe, które podstawione do wzoru (6) dają podstawowe rozwiązanie problemu dla dowolnego zespołu warunków brzegowych typu (4).

Praktyczne znaczenie może mieć również analiza rozwiązań zespołu zagadnień, w których występuje częściowa zmiana warunków brzegowych (4). Zakładamy, że spośród n warunków zmianie ulega m warunkom ($m<n$), a pozostałe są ustalone. Mamy więc:

$$\vartheta_{i,j;k} = t_k^s = \text{var} \quad \text{przy } s = 1,2,\ldots,s \quad \text{dla } k = 1,2,\ldots,m \tag{13}$$

$$\vartheta_{i,j;k} = t_k^s = \text{idem} \quad \text{przy } s = 1,2,\ldots,s \quad \text{dla } k = m+1,m+2,\ldots,n \tag{14}$$

Dalej rozpatrzymy osobno przypadki: $m \leqslant n-2$ oraz $m = n-1$.

Jeżeli przy $m \leqslant n-2$ znane są rozwiązania numeryczne $m+1$ zadań, odpowiadających warunkom (13) i (14) przy $s=1,2,\ldots,m+1$, dla których

$$\begin{vmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \ldots & t_m^1 & 1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_m^2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{m+1} & t_2^{m+1} & \ldots & t_m^{m+1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{15}$$

to otrzymać można rozwiązanie podstawowe odpowiadające dowolnemu liczbowo zespołowi warunków (13) i (14).

Z przekształcenia wzoru (6) otrzymujemy dla każdego zespołu warunków (13), dla dowolnego punktu węzłowego wewnętrznego:

$$\vartheta^s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_k t^s_k \tag{16}$$

$$s = 1,2, \ldots , m+1$$

Wzór powyższy można zapisać w postaci:

$$\vartheta^s_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_k t^s_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k t^s_k \tag{17}$$

$$s = 1,2, \ldots , m+1$$

Z warunku (14) wynika:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k t^s_k = \text{idem, przy } s = 1,2,\ldots,m + 1, \tag{18}$$

co pozwala na wprowadzenie oznaczenia:

$$\bar{a}_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{n} a_k t^s_k \tag{19}$$

Z układu (17) uwzględniając (19) otrzymujemy układ algebraicznych równań liniowych:

$$\sum_{k=1}^{m} t^s_k a_k + \bar{a}_{m+1} = \vartheta^s_{i,j} \tag{20}$$

$$s = 1,2,\ldots,m + 1.$$

Wielkościami niewiadomymi w powyższym układzie są $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_m, \bar{a}_{m+1}$. Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (15) układ (20) posiada jednoznaczne rozwiązania.

Rozwiązanie podstawowe dla punktu $P_{i,j}$ z badanego obszaru, przy dowolnym zespole warunków (13) i ustalonych warunkach (14), określa wzór:

$$\vartheta_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_k t_k + \bar{a}_{m+1}, \tag{21}$$

gdzie:

$a_k, \bar{a}_{m+1}$ - pierwiastki układu równań (20).

W omawianym przypadku istotne uproszczenie obliczeń, w porównaniu z problemem z całkowicie zmiennymi warunkami brzegowymi (8), uzyskuje się dla $m \leq n - 3$. Przy $m = n - 2$ mamy bowiem: $m + 1 = n - 1$, a więc ilość równań identyczną jak przy $m = n$.

W przypadku $m = n - 1$ konieczna jest również znajomość rozwiązań $n - 1$ zadań odpowiadających warunkom (13) i (14) przy $s = 1,2,\ldots,m$. Zagadnienie to można więc sprowadzić do problemu z całkowicie zmiennymi warunkami brzegowymi (8), mimo że

$$t_k^s = \text{idem} \quad \text{dla } s = 1,2,\ldots,n-1 \tag{22}$$

Warunek (9) musi oczywiście być spełniony z uwzględnieniem (22). Podstawowe rozwiązanie zagadnienia otrzymujemy w postaci wzoru (6).

2. UOGÓLNIENIE ROZWIĄZANIA TRZECIEGO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Niech w ograniczonym obszarze płaskim G poszukiwane będzie rozwiązanie równania (1), spełniające na brzegu Γ warunki określone na n częściach brzegu równaniami:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha_k (\vartheta_{\Gamma_k} - t_k), \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{23}$$

Aproksymując obszar rzeczywisty obszarem siatkowym G_h i zastępując równanie (1) - równaniami różnicowymi, a warunki (23) - warunkami różnicowymi, otrzymujemy dla punktów węzłowych wewnętrznych $P_{i,j}$ - równania (3), a dla punktów brzegowych $P_{m,n}$ - równania:

$$\vartheta_{m,n} = \sum_{i,j} b_{i,j}\, \vartheta_{i,j} + b_{m,n}\, t_{m,n}, \tag{24}$$

gdzie:

$b_{i,j}$, $b_{m,n}$ - współczynniki liczbowe.

Współczynniki $b_{i,j}$, $b_{m,n}$ zależą od obszaru G_h oraz liczb Biota (por.np. [3]):

$$Bi_k^h + \frac{\alpha_k h}{\lambda}, \tag{25}$$

przy czym

$$\sum_{i,j} b_{i,j} + b_{m,n} = 1. \tag{26}$$

Z układu równań (3) i (24) można otrzymać drogą eliminacji dla dowolnego punktu węzłowego $P_{\xi,\eta}$ z badanego obszaru, wzór określający wartość funkcji w postaci:

$$\vartheta_{\xi,\eta} = \sum_{k=1}^{n} a_k\, t_k, \tag{27}$$

gdzie:

a_k - współczynniki liczbowe.

Współczynniki a_k zależą od G_h i od liczby Bi_k^h, przy czym

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1. \tag{28}$$

Jeżeli znane są rozwiązania n-1 zadań w określonym obszarze G_h, przy różnych n-1 zespołach warunków brzegowych (23) przy czym zmiana tych warunków ogranicza się tylko do zmienności t_k, to znaleźć można rozwiązanie podstawowe umożliwiające wyznaczenie funkcji $\vartheta_{\xi,\eta}$ - dla dowolnego zespołu warunków brzegowych (23), przy ustalonych α_k i λ.

Przy warunkach

$$\alpha_k^s = \text{idem} \quad \text{dla} \quad s = 1,2,\ldots,n-1 \quad \text{przy } k = 1,2,\ldots,n, \tag{29}$$

$$\lambda = \text{idem}$$

mamy oczywiście

$$Bi_k^h = \text{idem}. \tag{30}$$

Współczynniki a_k zależą więc w tym przypadku wyłącznie od obszaru G_h.

Przeprowadzając rozważania analogiczne do przytoczonych w par. 1 można otrzymać równania analogiczne do (11), pozwalające wyznaczyć wartości liczbowe współczynników a_k występujących we wzorze (27).

Podobnie, przy częściowej zmienności wartości t_k - występującej w warunkach (23) - analogicznej do (13), (14), otrzymujemy układ równań odpowiadający (20) przy $m \leqslant n-2$ lub (11) przy $m = n-1$. W tym ostatnim przypadku obowiązuje wzór (27), a dla $m \leqslant n-2$:

$$\vartheta_{\xi,\eta} = \sum_{k=1}^{m} a_k t_k + \bar{a}_{m+1} \tag{31}$$

Można wykazać również, że wzory (27) i (31) będą ważne przy analogicznych ograniczeniach dla zadań z mieszanymi warunkami brzegowymi pierwszego i trzeciego rodzaju.

3. PRZYKŁAD WYZNACZANIA ROZWIĄZANIA PODSTAWOWEGO

W pracy [2] przytoczono przykłady wyznaczenia metodami analogii elektrycznej pola temperatur w przekroju poprzecznym łopatki turbiny gazowej chłodzonej wodą. Jedno z uzyskanych tam rozwiązań pokazano na rys. 1a.

Rozwiązanie to odpowiada warunkom brzegowym (23), na brzegach wewnętrznych przy $t_1^1 = 45...75^oC$ i na brzegu zewnętrznym przy $t_2^1 = 954^oC$.

W oparciu o powyższe dane znajdziemy rozwiązanie podstawowe, dla dowolnych wartości t_1 i t_2 przyjmując, że współczynniki wnikania ciepła α_1 i α_2 na brzegach wewnętrznych i zewnętrznych nie ulegają zmianie oraz zakładając stały współczynnik przewodzenia ciepła λ.

Dla dowolnego punktu $P_{\xi,\eta}$ mamy z równań (11):

$$t_1^1 a_1 + t_2^1 a_2 = \vartheta_{\xi,\eta}^1$$

$$a_1 + a_2 = 1 \tag{32}$$

Przyjmując zgodnie z warunkami zadania

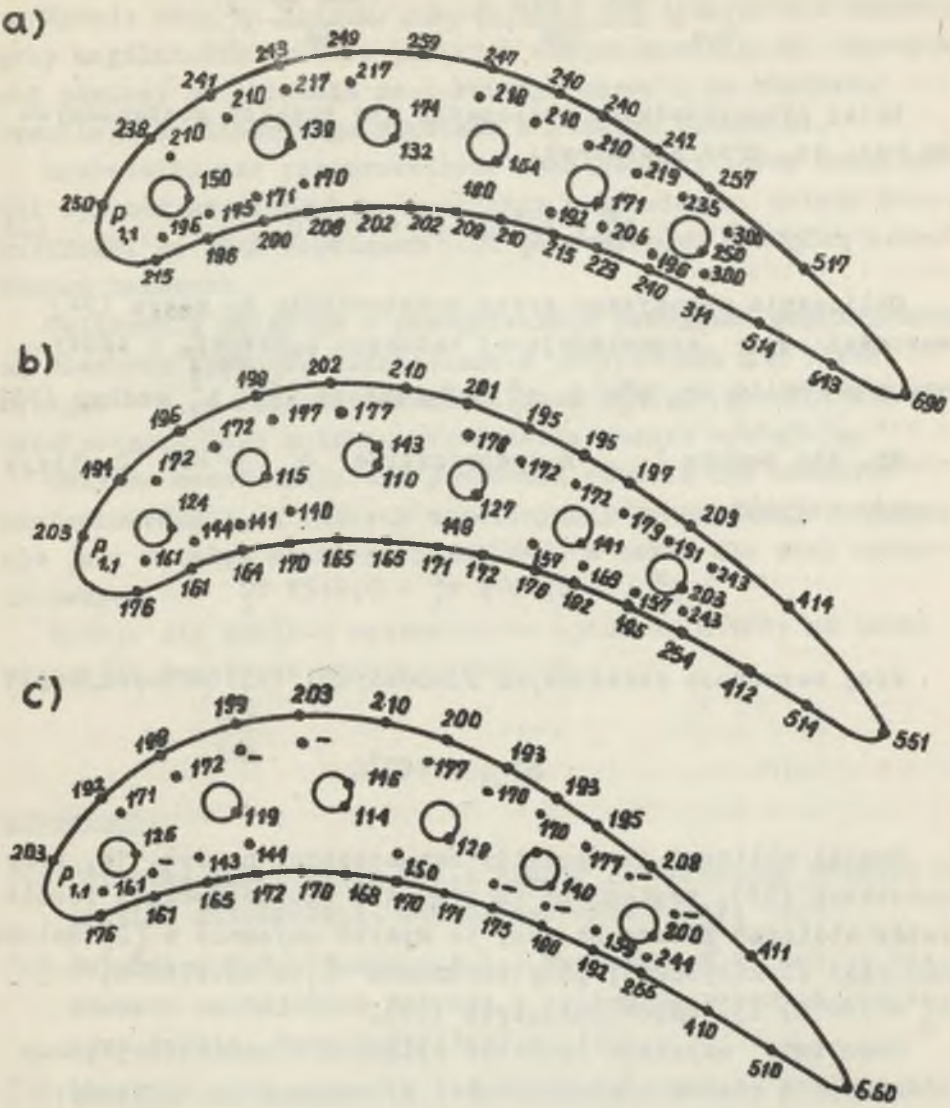
$$t_1^1 = 60^oC, \quad t_2^1 = 954^oC \tag{33}$$

otrzymujemy z układu (32):

$$a_1 = \frac{954 - \vartheta_{\xi,\eta}^1}{894}$$

$$a_2 = \frac{\vartheta_{\xi,\eta}^1 - 60}{894}$$

Zatem dla dowolnego punktu $P_{\xi,\eta}$ przy warunkach charakteryzujących się wartościami t_1^x, t_2^x otrzymujemy z (27):



Rys. 1. Rozkład temperatur w przekroju poprzecznym łopatki turbiny gazowej chłodzonej wodą

a – wyniki z pomiarów metodami analogii elektrycznej przy $t_1 = 45...75^oC$ i $t_2 = 954^oC$; b – wyniki obliczeń przy $t_1 = 53^oC$, $t_2 = 760^oC$; c – wyniki pomiarów metodami analogii elektrycznej przy $t_1 = 40...65^oC$, $t_2 = 760^oC$.

Uwaga: dla punktów oznaczonych znakiem "–" brak wyników w materiałach źródłowych [2]).

$$\vartheta^{x}_{\xi,\eta} = \frac{954 - \vartheta^{1}_{\xi,\eta}}{894}\, t^{x}_{1} + \frac{\vartheta^{1}_{\xi,\eta} - 60}{894}\, t^{x}_{2}. \tag{34}$$

Dalej przeprowadzono obliczenia dla punktów zaznaczonych na rys. 1a, przy warunkach:

$$t^{2}_{1} = 53^{\circ}C; \quad t^{2}_{2} = 760^{\circ}C. \tag{35}$$

Obliczenia wykonywano przez podstawianie do wzoru (34) wartości $\vartheta^{1}_{\xi,\eta}$ odpowiadającej badanemu punktowi, a odczytanej z rys. 1a. Za t^{x}_{1} i t^{x}_{2} podstawiono t^{2}_{1}, t^{2}_{2} według (35).

Np. dla punktu $P_{1,1}$ o temperaturze $\vartheta^{1}_{1,1} = 250\ ^{\circ}C$ otrzymujemy z (34):

$$\vartheta^{x}_{1,1} = 0{,}7875\ t^{x}_{1} + 0{,}2125\ t^{x}_{2}$$

Przy warunkach określonych równościami (35) otrzymujemy:

$$\vartheta^{2}_{1,1} = 203^{\circ}C$$

Wyniki obliczeń dla punktów zaznaczonych na rys. 1a, przy warunkach (35), zestawiono na rys. 1b. Dla porównania rezultatów obliczeń podano na rys. 1c wyniki uzyskane w [2] metodą analogii elektrycznej, przy warunkach $t^{2}_{1} = 40...65^{\circ}C$, $t^{2}_{2} = 760^{\circ}C$, tj. odpowiadających (35).

Rezultaty uzyskane sposobem opisanym w niniejszej pracy oraz metodą analogii elektrycznej wykazują dużą zgodność.

4. Uwagi końcowe

Opisana metoda umożliwia uogólnianie rozwiązań szczególnych, zadań związanych z wyznaczaniem pola temperatur. Uzasadnienie metody oparto na rozwiązaniach uzyskanych metodami różnic skończonych, jednak droga na której uzyskano rozwiązania bazowe jest nieistotna dla procesu uogólnienia.

Wydaje się, że opisany sposób może być szczególnie dogodny przy uogólnianiu wyników pomiarów eksperymentalnych. Pojedyncze pomiary na obiekcie rzeczywistym pozwolą na zbadanie przebiegu analizowanego zjawiska w różnych warunkach.

Aczkolwiek nie przeprowadzono szczegółowej oceny dokładności wyników uzyskanych na podstawie uogólnienia, należy przypuszczać, że błąd rozwiązań jest porównywalny z błędem rozwiązań bazowych.

Obliczenia związane z poszukiwaniem rozwiązań uogólnionych są nieskomplikowane, szczególnie w przypadkach gdy ilość brzegów - n, z różnymi warunkami jest mała. W zastosowaniach praktycznych tego rodzaju zagadnienia często występują.

Opisana metoda może być stosowana również dla obszarów niejednorodnych, w których współczynnik przewodzenia ciepła nie jest w całym obszarze jednakowy, a także dla ciał anizotropowych.

Wydaje się możliwe rozszerzenie opisanej metody na pewne przypadki zagadnień niestacjonarnych.

LITERATURA

[1] Forsythe G.E., Wasow W.R.: Finite , difference methods for partial differential equations. John Wiley, 1959.

[2] Seleznicw K.P., Taranin A.I., Tyryszkin W.G.(red.): Tiepłowoje sostojanije rotorow i cylindrow parowych i gazowych turbin. Maszinostrojenije, 1964.

[3] Szargut J., Rozewicz J.: Zastosowanie metody Monte Carlo do trzeciego zagadnienia brzegowego ustalonego przewodzenia ciepła. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka Nr 22, 1966.

Wpłynęło do redakcji 14 grudnia 1966.

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИЛИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Р е з ю м е

Предлагается методика определения фундаментального решения первой краевой задачи стационарной теплопроводности, на основе известных частных решений задачи. Предложенный метод во многих случаях может быть использован для вопросов связанных с краевыми условиями третьего рода.

В качестве основных данных для определения фундаментального решения можно использовать частные решения полученные произвольным численным методом, или методом электромоделирования а также результаты опытных исследований.

Приведен численный пример определения температурных полей в охлаждаемой водой лопатке газовой турбины.

GENERALIZATION OF RESULTS OF THE NUMERICAL SOLUTION OR EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF STEADY HEAT-CONDUCTION PROBLEMS

S u m m a r y

A method is presented for determination of fundamental solution of first boundary-value problem based at the particular solution of the problem. The method can be used in many cases which consider the third boundary-value problems.

As the background for determination of the fundamental solution can be taken particular results obtained by the arbitrary numerical method, or by electrical analogy technique, or by experimental measurings.

The numerical example of computing temperature distribution through cross-section of water-cooled turbine blade is presented.