ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: ENERGETYKA z. 25 Nr kol. 181

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

METODY ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ STANU USTALONEGO OSCYLACJI RELAKSACYJNYCH

Streszczenie. Praca nawiązuje do dwu poprzednio publikowanych prac autora [5, 6]. W pierwszej sprowadzono rozpatrywanie cieplnych procesów takich jak ogrzewanie i ostyganie do rozpatrywań geometrycznych w przestrzeni konfiguracyjnej. W drugiej pracy sfermułowano zagadnienie stanu ustalonego oscylacji. W pracy niniejszej stosowane dwie metody.

Metoda pierwsza jest przybliżeną metodą analityczną stosującą się do oscylacji o ostatecznie małej amplitudzie. Metoda druga jest metodą graficzną, słuszną bez ograniczeń. Ogólne rozważania obu metod stosujących się do przypadku układów, złożonych z n ciał, zilustrowano w pracy [2] na przykładach szczegółowych odnoszących się do dwu i trzech ciał. Przykład dwu ciał został już omówiony w pracy [3]. W pracy niniejszej omówiono przykład, odnoszący się do trzech ciał. Inne rozwiązanie ogólnego zagadnienia podano w pracy [4].

1. WSTĘP

W drugiej części pracy [5, 6] sformułowane warunki, pozwalające wyznaczyć stan ustalony oscylacji temperatury z opóźnieniem w układzie, złożonym z n ciał, wymieniających ciepło między sobą i z otoczeniem i wywołanych załączeniem i wyłączeniem w określonych chwilach źródła ciepła. połączonego z jednym ze składników układu. Rozważania prowadzone są w n wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej.

Równania te są następujące: [6, (3)].

$$\xi_1^{*} / \xi_1^{**} = (\xi_1^{*} / \xi_1^{**})^{\varkappa_1}$$

$$(\xi_{1o} - \xi_1^*)/(\xi_{1o} - \xi_1^{**}) = \left[(\xi_{10} - \xi_1^*)/(\xi_{10} - \xi_1^{**})\right]^{\varkappa_1}$$

$$i = 2, \ldots\ldots n \tag{1}$$

$$\Theta_{n1} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_k^*$$

$$\Theta_{n2} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, \xi_k^{**}$$

przy czym Θ_{n1}, Θ_{n2} są to wartości skrajne temperatury jednego ze składników układu (czujnika). Szukane są wartości ξ_1^* ξ_1^{**}.

2. METODA PIERWSZA ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ (1)

Metoda jest przybliżona. Mianowicie opiera się na następujących założeniach upraszczających:

1) Oznaczone

$$\Delta\xi_1 = \xi_1^{**} - \xi_1^* \tag{2}$$

oraz uwzględnione w obliczeniach

$$\frac{\Delta\xi_1}{\xi_1^*} \, ; \, \frac{\Delta\xi_1}{\xi_{1o} - \xi_1^*}$$

do drugich potęg włącznie, jako wielkości małe,

2) Wprowadzone niżej wielkości δ_1 (8) zakładamy małe wobec ξ_1^* oraz $\xi_{1o} - \xi_1^*$.

3) Zakładamy, że $\xi_{1o} = 1$, co jest równoważne zastąpieniu wielkości $\frac{\xi_1}{\xi_{1o}}$ przez ξ_1.

Przy spełnieniu warunku 1) otrzymujemy z równania (1)

$$\frac{\Delta\xi_i}{\xi_{io}-\xi_i^*} = \frac{\varkappa_i\,\Delta\xi_i}{\xi_{i0}-\xi_i^*}\left[1 - \frac{\varkappa_i-1}{2}\,\frac{\Delta\xi_i}{\xi_{i0}-\xi_i^*}\right] i = 2\ldots n \quad (3)$$

$$\frac{\Delta\xi_i}{\xi_i^*} = \frac{\varkappa_i\Delta\xi_i}{\xi_i^*}\left[1 + \frac{\varkappa_i - 1}{2}\,\frac{\Delta\xi_i}{\xi_i^*}\right]$$

$$\Theta_{n1} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\,\xi_k^*$$

$$\Theta_{n2} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\,\xi_k^{**}$$

Z dwu pierwszych równań przez eliminację $\Delta\xi_i$ oraz odrzucenie wartości $\Delta\xi_i = 0$, otrzymamy

$$\Delta\xi_i = -\frac{2(\xi_i^*-\xi_i^*)(1-\xi_i^*)\,\xi_i^*}{(\varkappa_i-1)\left[(\xi^*)^2 + \xi_i^*(1-2\xi_i^*)\right]},\ i=2\ldots n \quad (4)$$

$\Delta\xi_i$ wyznaczane są z jednego z następujących układów równań

$$\Delta\xi_i = \varkappa_i\Delta\xi_i\,\frac{1-\xi_i^*}{1-\xi_i^*}\left[1 - \frac{1}{2}(\varkappa_i - 1)\,\frac{\Delta\xi_i}{1-\xi_i^*}\right],i=2\ldots n \quad (5)$$

$$\Delta\xi_i = \varkappa_i\,\Delta\xi_i\,\frac{\xi_i^*}{\xi_i^*}\left[1 + \frac{1}{2}(\varkappa_i - 1)\,\frac{\Delta\xi_i}{\xi_i^*}\right],i=2\ldots n \quad (6)$$

Dwa ostatnie równania (1) przepisujemy bez zmian.

Z obserwacji $\Delta\xi_i$ wynika, że ze względu na występujący w nich czynnik $\Delta\xi_i$, zerują się one przy uczynionych założeniach tylko dla $\xi_i^* = \xi_i^*$. Oznacza to, że w przypadku małych oscylacyj, co odpowiada naszym założeniom, powinien być spełniony warunek przybliżonej równości $\xi_1^* \approx \xi_1^*$. Równość $\xi_i^* = \xi_1^*$, podstawiona do pierwszego równania (1) daje

$$\xi_i^* = \frac{\Theta_{n1}}{\vartheta_o - \Theta_n}, \quad i=1\ldots n \tag{7}$$

W tych warunkach oscylacje nie są możliwe, bo drugie równanie (1) nie daje się spełnić. Dlatego przyjmujemy rozwiązanie w postaci

$$\xi_i^* = \frac{\Theta_{n1}}{\vartheta_o - \Theta_n} + \delta_i \quad i = 1\ldots n \tag{8}$$

Do δ_i odnosi się założenie 2), wymienione na początku.

Rozwiązanie problemu wymaga przede wszystkim wyznaczenia δ_i. Z równania (1) dla Θ_{n1} i (8), otrzymujemy:

$$A_{n1}\,\delta_1 + \ldots\ldots + A_{nn}\,\delta_n = 0 \tag{9}$$

Z równania na $\Delta\xi_1$ przy założeniu δ_i małych i pominięciu δ_i w innych składnikach wyrażenia (założenie 2)), otrzymujemy z (4) przy pomocy (8)

$$\delta_i = \varkappa_i\,\delta_1 \quad i=2\ldots\ldots n \tag{10}$$

Wtedy równanie (9) jest również spełnione dla n=2....n.

Podstawienie δ_i do równania na $\Delta\vartheta = \Theta_{n2} - \Theta_{n1}$ i obliczenie z tym samym przybliżeniem, jak wyżej, daje [2]

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\frac{-\Delta\mathcal{X}(\vartheta_o - \Theta_m - \Theta_{n1})_{n1}}{\mu}}$$

$$\begin{aligned}\mu = 2(\vartheta_o-\Theta_n)^2 \{&(1-\varkappa_2)A_{n1} + A_{n2}\varkappa_2^2 + \ldots + A_{nn}\varkappa_n^2) + \\ &+ A_{n3}\varkappa_3(\varkappa_3-1)(\varkappa_2-\varkappa_3) + \ldots A_{nn}\varkappa_n(\varkappa_n-1)(\varkappa_2-\varkappa_n)\}\end{aligned} \tag{11}$$

Znając δ_1, wyznaczymy δ_i z (10), następnie z (8) ξ_i^*. Te podstawione do (4) i (6) dają $\Delta\xi_i$, więc ξ_i^{**}, i=1.....n. W ten sposób zagadnienie jest, przy założeniu dostatecznie małych oscylacyj, rozwiązane.

Wyrażenia występujące w mianowniku (11) dadzą się przedstawić nieco prościej (zob. praca [2]).

3. INTERPRETACJA FIZYKALNA ROZWIĄZANIA

Metoda pierwsza posiada tę zaletę, że wyniki jej dadzą się proste zainterpretować fizykalnie.

Rozwiązanie (11) opiera się na wielkości δ_1, która przedstawia się w sposób dość skomplikowany nawet przy wprowadzeniu wymienionych wyżej przekształceń.

Podobnie rozwiązania ξ_i^* mają dość złożoną postać. Podstawienie jednak wyników do wyrażeń na temperatury, daje w stanie ustalonym

$$\Theta_{i1} = \frac{(\vartheta_0 - \Theta_i)}{\vartheta_0 - \Theta_n}\,\Theta_{n1},\ i=2....n-1 \tag{12}$$

indeks n odnosi się do temperatury ciała regulującego, która jest z założenia znana.

Temperatura ϑ_1 źródła ciepła przedstawiona jest bardziej złożonym wyrażeniem

$$\Theta_{11} = \frac{(\vartheta_0 - \Theta_i)}{\vartheta_0 - \Theta_n}\,\Theta_{n1} + (\vartheta_1 - \Theta_1)_0^{(1)}\,\delta_1 \tag{13}$$

$(\vartheta_1 - \Theta_1)_0^{(1)}$ oznacza pierwszą pochodną w początku pierwszej krzywej ogrzewania.

4. DRUGA METODA ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ (1)

Metoda druga polega na graficznym rozwiązaniu układu równań. Szczegółowe przeliczenia, odnoszące się do przypadku 2 i 3 ciał znajdujemy w pracy [2]. W ogólnym przypadku zagadnienie

możemy sformułować następująco:
Wprowadzamy oznaczenia

$$z_i = \frac{\xi_i^{**}}{\xi_i^*}, i=1,\ldots,n \tag{14}$$

wtedy układ równań (1) możemy napisać następująco

$$z_j = z_1^{\varkappa_j}, \quad j=2\ldots n, \quad \varkappa_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1}$$

$$y = \frac{1-z_1\,\xi_1^*}{1-\xi_1^*} = \left(\frac{1-\xi_i^*\,z_i}{1-\xi_i^*}\right)^{1/\varkappa_i}, \quad i=2\ldots n$$

$$\Theta_{n1} = A_{n1}\,\xi_1^* + \ldots\ldots + A_{nn}\,\xi_n^* \tag{15}$$

$$\Theta_{n2} = A_{n1}\,\xi_1^*\,z_1 + \ldots\ldots + A_{nn}\,\xi_n^*\,z_n$$

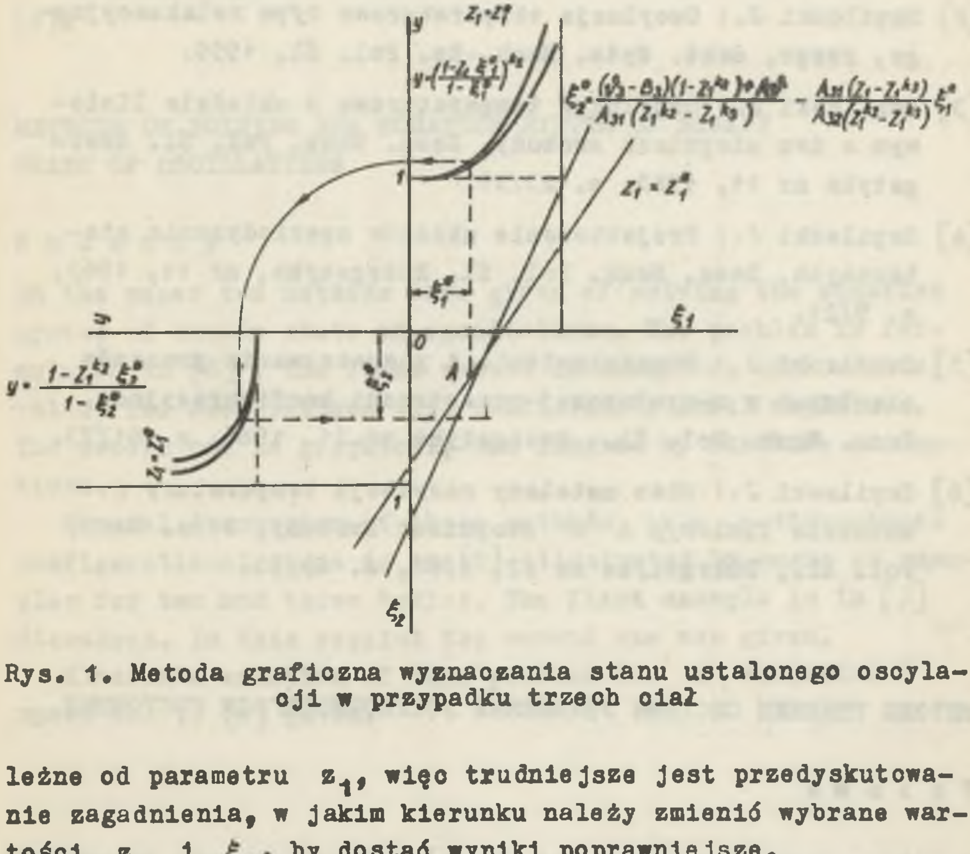
Metoda ta jest metodą kolejnych przybliżeń. Dla różnych wartości parametru z_1 rysujemy szereg krzywych (y, ξ_i). W celu otrzymania rozwiązania przyjmujemy pewne wartości z_1, ξ_1, znajdujemy y na odpowiedniej krzywej (y, ξ_1^*), następnie na podstawie pozostałych krzywych wyznaczamy pozostałe wartości ξ_i. Do sprawdzania wyniku używamy równań temperatur z (15). Pozwalają one ocenić w jakim kierunku należy zmienić wybrane wartości z_1, ξ_1^*, by otrzymać lepszą zgodność.

5. PRZYKŁAD. PRZYPADEK TRZECH CIAŁ

Zagadnienie możemy rozwiązać na płaszczyźnie przy pomocy krzywych w płaszczyznach (y, ξ_i), i=1, 2, 3 oraz prostych (ξ_1, ξ_2), (ξ_1, ξ_3), powstałych przez wyeliminowanie z równań temperatur ξ_3 lub ξ_2 (Rys. 1).

Rozwiązanie otrzymujemy następująco: wybieramy dowolne wartości początkowe z_1 i ξ_1. Dla nich znajdujemy z krzywej

$(y;\ \xi_1)$ wartość y, następnie zaś z pozostałych krzywych wartości ξ_2 i ξ_3. Poprawność otrzymanych wartości sprawdzamy przy pomocy prostych. Ponieważ wszystkie krzywe są za-



Rys. 1. Metoda graficzna wyznaczania stanu ustalonego oscylacji w przypadku trzech ciał

leżne od parametru z_1, więc trudniejsze jest przedyskutowanie zagadnienia, w jakim kierunku należy zmienić wybrane wartości z_1 i ξ_1, by dostać wyniki poprawniejsze.

Główną zaletą rozwiązania w przypadku dwu i trzech ciał jest, że wszystkie operacje dadzą się przeprowadzić w płaszczyźnie. Można więc bezpośrednio sprawdzić, czy rozwiązanie istnieje i dlaczego posiada właściwości, podane w metodzie I. Poza tym możemy przedyskutować wpływ różnych parametrów. Zaleta ta jednakże znika, gdy chodzi o układ, złożony z więcej ciał, gdyż sprawdzenie poprawności jest możliwe jedynie na drodze rachunkowej.

LITERATURA

[1] Fadiejew D.Z., Somińskij J.S.: Sbornik zadacz po wysszej ałgebrie, Gos.Izd.T.T.Lit. 1949, s.153, nr 949, s. 150, nr 279-281.

[2] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr. dokt. Wydz. Mech.-En. Pol. Śl. 1959.

[3] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe w układzie liniowym o dwu stopniach swobody, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Energetyka nr 11, 1963, s. 23/39.

[4] Szpilecki J.: Projektowanie układów aperiodycznie statecznych, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Energetyka, nr 11, 1963, s. 9/21.

[5] Szpilecki J.: Przedstawienie i rozpatrywanie procesów cieplnych w n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka nr 21, 1966, s. 61/73.

[6] Szpilecki J.: Stan ustalony oscylacji temperatury w układzie liniowym o n stopniach swobody, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka nr 22, 1966, s. 83/96.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ СОСТОЯНИЯ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются два метода решения системы уравнений установившегося состояния осцилляций. Проблема сформулирована в [6]. Первый метод - аналитический, приближенный, который может быть использован для осцилляций с достаточно малой амплитудой. Другой - графический, без добавочных предпосылок.

Общее рассматривание этих методов в n мерном конфигурационном пространстве силлюстрировано в [2] примерами для 2 и 3 тел. Первый пример рассмотрен в [3]. Здесь рассматривается второй пример.

Несколько другое решение n мерной проблемы приведено в [4].

METHODS OF SOLVING THE EQUATION SYSTEM OF STEADY STATE OF OSCILLATIONS

S u m m a r y

In the paper two methods were given of solving the equation system of steady state of oscillations. The problem is formulated in [6] . The first method is analytic, approximate, valent for oscillations with sufficiently small amplitude. The second one is graphical, non limited by additive assumptions.

General discussion of these methods in a n-dimensional configurational space is in [2] illustrated by means of examples for two and three bodies. The first example is in [3] discussed. In this reprint the second one was given.

Alternate solution of this problem for n dimensional space was in [4] given.