ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: ENERGETYKA z. 25 Nr kol. 181

ANDRZEJ WITKOWSKI
Katedra Cieplnych Maszyn Wirnikowych

METODA ANALIZY PRZEPŁYWU W OSIOWYM WIEŃCU SPRĘŻAJĄCYM Z MERYDIONALNYM PRZYSPIESZENIEM STRUMIENIA

Streszczenie. Podano metodę analizy izentropowego przepływu ustalonego czynnika nielepkiego w wirnikowym wieńcu sprężającym z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia z łopatkami o przestrzennej krzywiźnie. Rozpatrując pierwsze przybliżenie dwuwymiarowe przepływu trójwymiarowego założono osiową symetrię przepływu uwzględniając przy tym siły w przekroju merydionalnym wynikające z istnienia gradientu ciśnień w kierunku obwodowym. W oparciu o równanie różniczkowe ruchu płynu doskonałego w postaci Gromeki-Lamba wyprowadzono równanie przepływu względnego, które rozwiązane na drodze kolejnych przybliżeń umożliwi określenie rozkładu prędkości i ciśnień oraz wyciągnięcie wniosków odnośnie najkorzystniejszego kształtu łopatek i przekroju merydionalnego wirnika.

1. WSTĘP

Dwuwymiarowa teoria przepływu w osiowych maszynach wirnikowych opiera się na założeniu przepływu płynów wzdłuż współosiowych powierzchni cylindrycznych, na których winny się odbywać wszelkie procesy sprężania i rozprężania. Tak przedstawiony przepływ charakteryzuje się zerową składową promieniową prędkości ($c_r=0$) i spełnia w każdym przekroju cylindrycznym warunek równowagi promieniowej. Uzyskane w rezultacie zagadnienie dwuwymiarowe pozwala na określenie prędkości i ciśnień w kanale międzyłopatkowym w kierunku obwodowym na wybranych osiowosymetrycznych powierzchniach prądu.

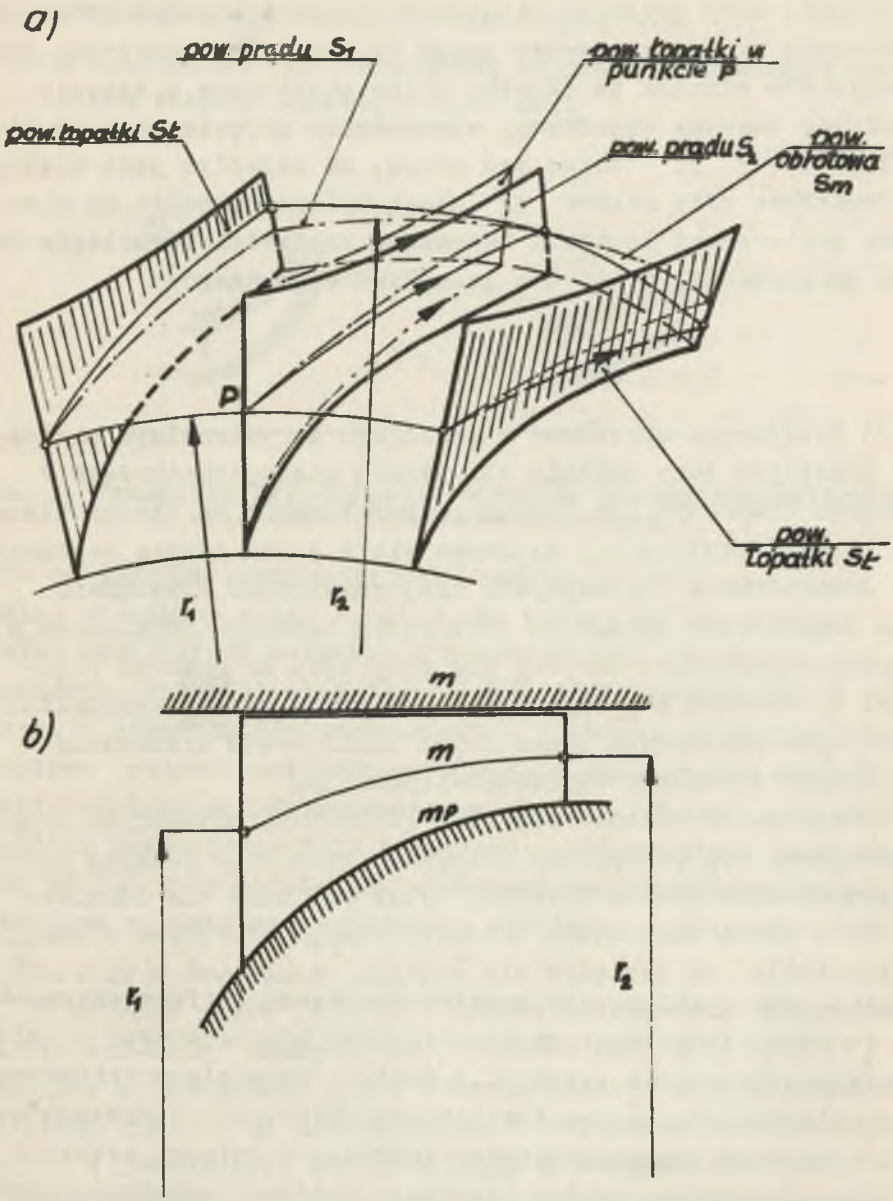
W wielu konstrukcjach maszyn wirnikowych warunki spełniające przepływ na współosiowych powierzchniach cylindrycznych nie są zachowane nawet przy założeniach upraszczających, ponieważ część przepływowa wirnika posiada znaczne zwężenie lub

rozszerzenie kanału w przekroju merydionalnym, co warunkuje istnienie składowych promieniowych prędkości. W tych wypadkach zachodzi konieczność uwzględnienia trójwymiarowego charakteru przepływu i analizy aerodynamicznych własności kanału przepływowego wirnika w przekroju merydionalnym. W szczególności przepływ przestrzenny ma miejsce w kanale przepływowym wieńca wirnikowego z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia.

Analiza trójwymiarowego przepływu w maszynach wirnikowych stanowi przedmiot prac wielu autorów [3], [4], [8], [9], [10], [13]. Ogólną analizę matematyczną przepływu trójwymiarowego, lepkiego i ściśliwego czynnika przez wirnik dowolnego kształtu ze skończoną liczbą cienkich łopatek podał Wu [13]. Rozwiązanie trójwymiarowego zagadnienia otrzymał dzięki analizie dwu dwuwymiarowych przepływów wzdłuż powierzchni prądu S_1 i S_2 (rys. 1) nie będących powierzchniami obrotowymi. Powierzchnie S_1 i S_2 nazwano powierzchniami pierwszego i drugiego rodzaju i określenie ich jest szczególnie trudne. Praca Wu z uwagi na konieczność przeprowadzania bardzo złożonych operacji matematycznych znalazła małe zastosowanie praktyczne.

W niniejszej pracy posłużono się uproszczonym obrazem przepływu trójwymiarowego bardziej dogodnym w praktycznych zastosowaniach i przyjmowanym z powodzeniem przez wielu autorów [3], [5], [10]. Zagadnienie trójwymiarowe rozpatrzono podobnie jak Wu jako kombinację dwu dwuwymiarowych zagadnień:

1) Pierwsze zagadnienie otrzymuje się przez przyjęcie do rozważań przepływu płynu nielepkiego przez wirnik o nieskończenie dużej liczbie nieskończenie cienkich łopatek. W efekcie powierzchnie przepływu S_1 i S_2 stają się powierzchniami obrotowymi S_m i odpowiednio S_z (rys. 1). Wprowadza się ponadto dalsze założenie upraszczające, że osiowej symetrii powierzchni prądu odpowiada osiowa symetria parametrów płynu wzdłuż tych powierzchni. Rzeczywisty trójwymiarowy przepływ sprowadza się w ten sposób do przepływu dwuwymiarowego zachodzącego w przekroju merydionalnym.



Rys. 1. Powierzchnie prądu w trójwymiarowym przepływie przez wieniec wirnikowy

a – powierzchnie prądu S_1, S_2 i powierzchnie obrotowe S_t, S_m;
b – przekrój merydionalny

Wirnik z nieskończenie wielką liczbą łopatek wytwarza nieskończenie mały gradient ciśnienia w kanale międzyłopatkowym w kierunku obwodowym, wobec czego by uwzględnić wzajemne oddziaływanie wirnika na cząstki płynu stanowiące o istocie działania maszyny wirnikowej wprowadzono pojęcie masowej siły łopatkowej F. Biorąc pod uwagę, że przepływ jest nielepki łopatkowe siły masowe dF muszą być prostopadłe do elementu powierzchni łopatki, natomiast prędkości równoległe do tych powierzchni. Z tąd dla przepływu względnego:

$$d\bar{F}\,\bar{w} = 0$$

2) Przyjmując określone w przekroju merydionalnym parametry przepływu jako średnie dla kanału międzyłopatkowego w kierunku obwodowym (od strony ssącej łopatki do strony tłocznej łopatki sąsiedniej) wyznacza się z kolei drugie zagadnienie dwuwymiarowe w przepływie trójwymiarowym. Rozwiązanie tego zagadnienia polega na określeniu rozkładu parametrów w kierunku obwodowym. Zakłada się przy tym, że rozkład prędkości i ciśnień zachodzi w dalszym ciągu na powierzchniach obrotowych uzyskanych przez obrót linii prądu wyznaczonych z obliczeń przepływu osiowosymetrycznego.

Nałożenie na siebie rozkładów parametrów uzyskanych przez rozwiązanie obu przepływów dwuwymiarowych daje rozkład parametrów w całym kanale wirnika. Wynik obliczeń nie odzwierciedla w pełni charakteru trójwymiarowego przepływu z uwagi na założenie, że przepływ nie posiada składowych w kierunku normalnym do powierzchni obrotu. Niemniej wielu autorów [3], [4], [5] [8], [9], [10] wskazuje, że powyższa quasi-trójwymiarowa analiza jest wystarczająca w wielu praktycznych przypadkach. W szczególności jest ona odpowiednia do badania przepływu w wirnikach maszyn z długimi kanałami łopatkowymi i znaczną zmianą kierunku przepływu w płaszczyźnie merydionalnej,a więc w stopniach maszyn odśrodkowych i o mieszanym (osiowo promieniowym) kierunku przepływu. Zgodnie z pracą Wu [13] można rozróżnić dwa rodzaje stopni sprężających o mieszanym kierunku przepływu:

1) z promieniowym kierunkiem wypływu czynnika stanowiącym odmianę stopnia odśrodkowego (Rys. 2a),

2) z osiowym kierunkiem wypływu czynnika stanowiącym odmianę stopnia osiowego (rys. 2b).

Rys. 2. Przekroje merydionalne wirników stopni sprężających z mieszanym kierunkiem przepływu

Żadna ze znanych publikacji nie rozpatruje przepływu przez wieniec wirnikowy grupy drugiej, do której należy również wieniec wentylatora osiowego z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia. Zadaniem niniejszej pracy jest opracowanie w oparciu o równania różniczkowe płynu doskonałego analizy przepływu osiowosymetrycznego w kanale sprężającym wirnika z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia. Niezależnie od założenia osiowej symetrii przepływu w obliczeniach uwzględniono za [3] siły działające w płaszczyźnie merydionalnej wynikające z istnienia gradientu ciśnienia w kierunku obwodowym.

W wyniku analizy określone zostaną dla ogólnego przypadku wirnika o przestrzennie ukształtowanych łopatkach rozkłady prędkości względnych i ciśnień, których znajomość umożliwi skonstruowanie korzystniejszego pod względem aerodyamicznym kształtu łopatki i przekroju merydionalnego wirnika.

Przeprowadzona analiza stanowić będzie podstawę do rozwiązania drugiego zagadnienia dwuwymiarowego określającego rozkład parametrów przepływu na powierzchniach prądu w kierunku obwodowym.

2. RÓWNANIA WYJŚCIOWE

2.1. Równania różniczkowe ruchu płynu doskonałego

Wychodząc z równań różniczkowych ruchu płynu doskonałego w postaci Gromeki-Lamba,

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\nabla}\,\frac{c^2}{2} - \bar{c} \times \mathrm{rot}\,\bar{c} = \bar{F} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p, \tag{1}$$

otrzymamy w układzie współrzędnych wirujących wraz z łopatkami następującą zależność:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{w}\bar{\nabla})\,w + 2\omega \times \bar{w} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{F} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p \tag{2}$$

dla przepływu ustalonego

$$(\bar{w}\bar{\nabla})\,\bar{w} + 2\bar{\omega} \times \bar{w} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{F} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p \tag{3}$$

Równanie wektorowe (3) można zastąpić układem równań różniczkowych w układzie współrzędnych cylindrycznych r, ϑ, z:

$$w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{w_u}{r}\frac{\partial w_z}{\partial \vartheta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{4}$$

$$w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_u}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \vartheta} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{w_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega w_u = F_r - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{5}$$

$$w_r \frac{\partial w_u}{\partial r} + \frac{w_u}{r}\frac{\partial w_u}{\partial \vartheta} + w_z \frac{\partial w_u}{\partial z} + \frac{w_r w_u}{r} + 2\omega w_r = F_u - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{r\partial \vartheta} \tag{6}$$

Pomijając zmiany parametrów przepływu w kierunku obwodowym otrzymujemy ruch osiowo-symetryczny. Równania (4), (5), (6) przyjmują wówczas uproszczoną postać:

$$w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\partial}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{7}$$

$$w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{w_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega w_u = F_r - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (8)$$

$$w_r \frac{\partial w_u}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_u}{\partial z} + \frac{w_r w_u}{r} + 2\omega w_r = F_u \qquad (9)$$

2.2. Równanie energii przepływu

Entalpia całkowita izentropowego przepływu względnego w kanale wirnikowym maszyny przepływowej dla danej linii prądu:

$$h_w = i + \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = h_o - \omega(c_u r) \qquad (10)$$

gdzie: $h_o = i + \frac{1}{2} c^2$ - entalpia całkowita przepływu bezwzględnego.

Bilans energetyczny przepływu dla danej linii prądu:

$$h_{w_1} = i_1 + \frac{1}{2} c_1^2 - u_1 c_{u_1} = i + \frac{1}{2} c^2 - u c_u$$

$$i + \frac{1}{2} c^2 = h_{o_1} + u c_u - u_1 c_{u_1} \qquad (11)$$

Z trójkąta prędkości (rys.3c) otrzymujemy zależności:

$$c_u^2 + c_m^2 = c^2$$

$$c_m = w \cos\beta \qquad (12)$$

$$c_u = u - w \sin\beta = \omega r - w \sin\beta$$

Wstawiając zależności (12) do równania (11) otrzymujemy równanie bilansu energii przepływu względnego w układzie wirującym:

$$i = h_{o_1} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{w^2}{2} - \lambda_1 \tag{13}$$

gdzie: $\lambda_1 = u_1 c_{u_1} = \omega(rc_u)_1$ - zawirowanie wstępne.

Jeśli przepływ w przekroju wlotowym 1-1 jest niewirowy, wówczas entalpia i posiada wartość stałą dla wszystkich linii prądu. W wielu wypadkach szczególnie w wentylatorach zawirowanie wstępne jest pomijane.

2.3. Równanie ciągłości

Równanie ciągłości przepływu w kanale ograniczonym powierzchnią piasty i osłony:

$$m = 2\pi \int_0^n \varrho\, w \cos\beta\, \tau\, r\, dn; \tag{14}$$

gdzie: τ jest współczynnikiem przewężenia przekroju przepływowego wynikającego ze skończonej grubości łopatek.

Gęstość czynnika dla przepływu ściśliwego określa się z równania energii (13) oraz z zależności:

$$i = c_p \cdot T$$

$$h_o = c_p \cdot T_o$$

$$a_o = \sqrt{\varkappa R . T_o} \tag{15}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$$

gdzie: ϱ_o i T_o stanowią gęstość i temperaturę spoczynkową.

Ostatecznie otrzymujemy równanie:

$$\frac{\varrho}{\varrho_o} = \left[1 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{\omega^2 r^2}{a_o^2} - \frac{w^2}{a_o^2} - \frac{2\lambda}{a_o^2}\right)\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}} \tag{16}$$

Podobnie wyznaczamy ciśnienie statyczne w wirniku wychodząc z zależności:

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \tag{17}$$

W wypadku przepływu izentropowego nieściśliwego korzystamy z równania (13) podstawiając

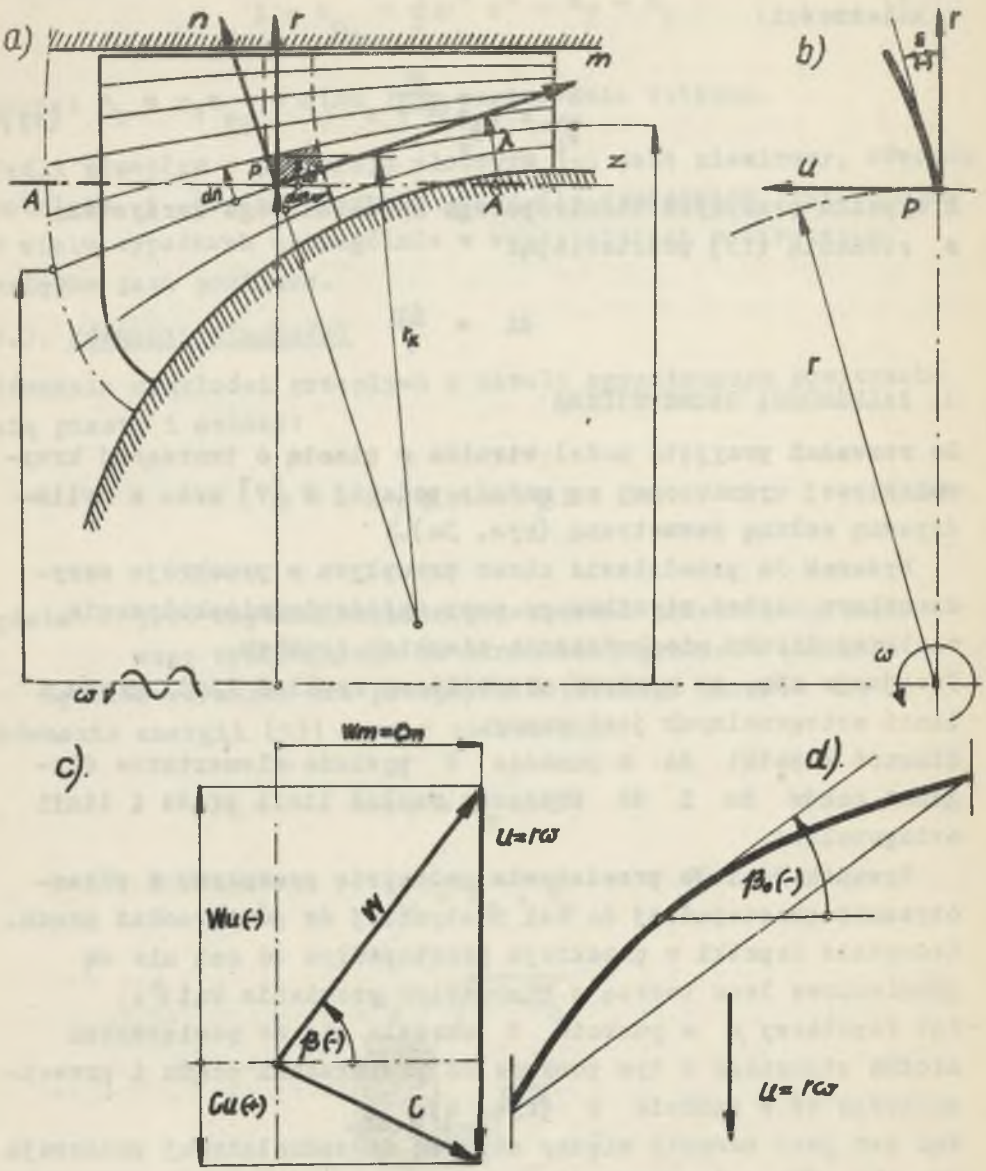
$$di = \frac{dp}{\varrho}$$

3. ZALEŻNOŚCI GEOMETRYCZNE

Do rozważań przyjęto model wirnika z piastą o tworzącej krzywoliniowej wyznaczonej wg metody podanej w [7] oraz z cylindryczną osłoną zewnętrzną (rys. 3a).

Rysunek 3a przedstawia obraz przepływu w przekroju merydionalnym wieńca wirnikowego przy założeniu nieskończenie wielkiej liczby nieskończenie cienkich łopatek.
Przyjmuje się, że wstępny przybliżony rozkład linii prądu i linii ortogonalnych jest znany.
Element łopatki dA w punkcie P posiada elementarne długości boków dm i dn mierzone wzdłuż linii prądu i linii ortogonalnej.

Rysunek 3a i 3b przedstawia geometrię przepływu w płaszczyznach prostopadłej do osi i stycznej do powierzchni prądu.
Krawędzie łopatki w przekroju prostopadłym do osi nie są promieniowe lecz tworzą z kierunkiem promienia kąt ε.
Kąt łopatkowy β w punkcie P określa się na powierzchni stożka stycznego w tym punkcie do powierzchni prądu i przecinającego oś w punkcie O (rys. 4).
Kąt ten jest zawarty między styczną do szkieletowej przekroju łopatki PC a tworzącą stożka OPA.
Element łopatki ze stałym kątem odchylenia ε od kierunku promieniowego daje w przecięciu cylindrycznym na promieniu r kąt β_o. Z rysunku 4 daje się łatwo określić związek po-

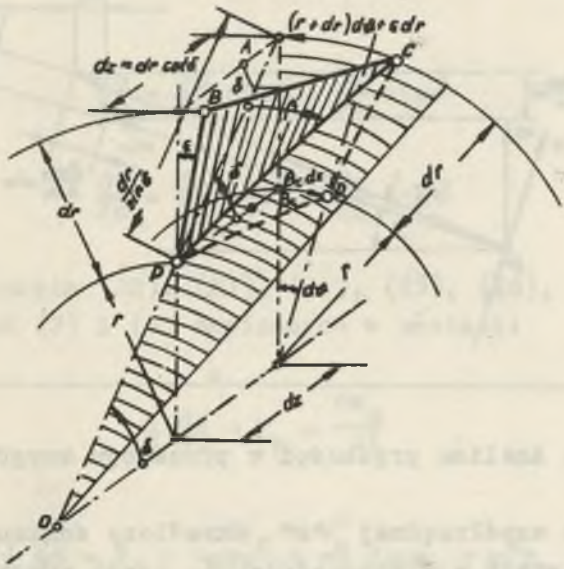


Rys. 3. Analiza przepływu w punkcie P wirnika
a – w przekroju merydionalnym; b – w płaszczyźnie prostopadłej do osi, c – w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu; d – przekrój łopatki powierzchnią cylindryczną

między tym kątem a kątem łopatkowym β :

$$tg\beta = tg\beta_c \cos\delta + tg\varepsilon \sin\delta \tag{18}$$

Kąt β_c określony jest ponadto w przekroju AA na rys. 3d.



Rys. 4. Geometria elementu łopatki

4. WARUNKI RÓWNOWAGI PRZEPŁYWU WZDŁUŻ OSIOWOSYMETRYCZNYCH POWIERZCHNI PRĄDU

Składowe prędkości w płaszczyźnie ϑ = const mogą być zastąpione przez składowe w_m i w_n w kierunku osi m i n leżące w tej samej płaszczyźnie.

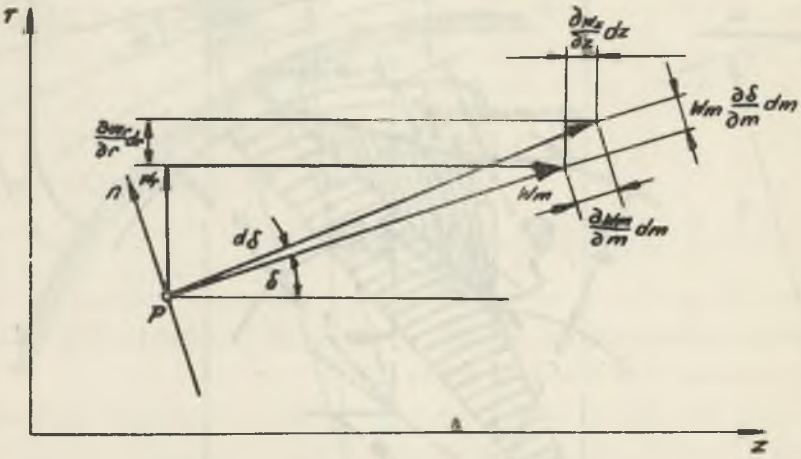
Składowa w_n jest prostopadła do składowej w_m nachylonej pod kątem δ do składowej w_z (rys. 5).

Zgodnie z tym otrzymujemy ogólne zależności:

$$w_m = w_r \sin\delta + w_z \cos\delta \tag{19}$$

oraz

$$w_n = w_r \cos\delta - w_z \sin\delta \tag{20}$$



Rys. 5. Analiza prędkości w przekroju merydionalnym

Jeżeli zwrot współrzędnej "m" określony zostanie jako styczny do linii prądu w płaszczyźnie ϑ = const wówczas składowa w_n przyjmie wartość równą zeru.

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{w_r}{w_z} \tag{21}$$

$$w_r = w_m \sin\delta \tag{22}$$

oraz

$$w_z = w_m \cos\delta \tag{23}$$

Pochodna zupełna z w_r i w_z względem czasu dla ustalonego przepływu:

$$\frac{dw_r}{dt} = \frac{dw_m}{dt} \sin\delta + w_m \cos \frac{d\delta}{d_t} \tag{24}$$

oraz

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{dw_m}{dt} \cos\delta - w_m \sin\delta \frac{d\delta}{dt} \tag{25}$$

Gradient ciśnień w kierunkach m i n określamy w zależności:

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \frac{\partial p}{\partial r} \sin\delta + \frac{\partial p}{\partial z} \cos\delta \tag{26}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial r} \cos\delta - \frac{\partial p}{\partial z} \sin\delta \tag{27}$$

Wstawiając równania (22), (23), (24), (25), (26), (27) do równań wyjściowych (7) i (8) zapisanych w postaci:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} - F_z = \frac{dw_z}{dt}$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} - F_r = - \frac{dw_r}{dt} + \frac{w_u^2}{r} 2\omega w_u + \omega^2 r$$

oraz uwzględniając zależność:

$$F_n = F_r \cos\delta - F_z \sin\delta$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial n} - F_n = - w_m \frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{r} (\omega r + w_u)^2 \cos\delta \tag{28}$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial m} - F_m = - \frac{dw_m}{dt} + \frac{1}{r} (\omega r + w_u)^2 \sin\delta \tag{29}$$

Wykorzystując w odniesieniu do w_m, w_u, regułę różniczkowania funkcji złożonej względem czasu t otrzymujemy dla

przepływu ustalonego i osiowosymetrycznego:

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{\partial w_m}{\partial m}\frac{dm}{dt} + \frac{\partial w_m}{\partial n}\frac{dn}{dt}$$

$$\frac{dw_u}{dt} = \frac{\partial w_u}{\partial m}\frac{dm}{dt} + \frac{\partial w_u}{\partial n}\frac{dn}{dt} \tag{30}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial \delta}{\partial m}\frac{dm}{dt} + \frac{\partial \delta}{\partial n}\frac{dn}{dt}$$

Z zależności:

$$\frac{dm}{dt} = w_m, \quad \frac{dn}{dt} = w_n = 0$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} - F_n = - w_m^2 \frac{\partial \delta}{\partial m} + \frac{1}{r}(\omega r + w_u)^2 \cos\delta \tag{31}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial m} - F_m = - W_m \frac{\partial w_m}{\partial m} + \frac{1}{r}(\omega r + w_u)^2 \sin\delta \tag{32}$$

Podobnie korzystając z zależności (30) otrzymujemy z równania (6):

$$F_u = w_m \frac{\partial w_u}{\partial m} + \frac{1}{r} w_m (2\omega r + w_u) \sin\delta \tag{33}$$

Równanie (31) stanowi warunek równowagi przepływu względnego w kierunku normalnym do powierzchni prądu dla wybranego elementu w kanale sprężającym wirnika. Wyrażenie $\frac{\partial \delta}{\partial m}$ równa się odwrotności promienia krzywizny linii prądu wzdłuż linii n = const.:

$$\frac{\partial \delta}{\partial m} = - \frac{1}{r_k} \tag{34}$$

Równanie (28) przyjmie więc postać

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} - F_n = w_m^2 \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r}(\omega r + w_u)^2 \cos\delta \tag{35}$$

5. RÓWNANIE PRZEPŁYWU WZGLĘDNEGO W KANAŁACH SPRĘŻAJĄCYCH WIRNIKA

Biorąc pod uwagę trójkąt prędkości w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu (rys. 3a) otrzymujemy zależności:

$$w_m = w \cos\beta$$
$$wu = - w \sin\beta \tag{36}$$

Wstawiając zależności (36) do równania (35) otrzymamy równanie równowagi przepływu uwzględniające geometrię kanału przepływowego:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} - F_n = w^2\left(\frac{\cos^2\beta}{r_k} + \frac{\sin^2\beta \cos\delta}{r}\right) + r\omega^2 \cos\delta - 2\, w\omega \sin\beta \cos\delta \tag{37}$$

W celu wyeliminowaniu wyrażenia $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}$ korzystamy z równania energii (13) które różniczkujemy względem n:

$$\frac{\partial i}{\partial n} = \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial n} - w \frac{\partial w}{\partial n} = \omega^2 r \cos\delta - \frac{\partial w}{\partial n} w \tag{38}$$

Dla przemiany izentropowej

$$\partial i = \frac{\partial p}{\varrho}$$
$$\frac{\partial i}{\partial n} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{39}$$

Podstawiając równania (38) i (39) do (37) otrzymujemy zależność:

$$\frac{\partial w}{\partial n} + w\left(\frac{\cos^2\beta}{r_k} + \frac{\sin^2\beta\cos\delta}{r}\right) - 2\omega\sin\beta\cos\delta + \frac{F_n}{w} = 0 \qquad (40)$$

W dalszym ciągu w celu wyeliminowania siły F_n korzystamy z równania ruchu dla kierunku obwodowego (33) oraz zależności wynikających z rysunku 3:

$$F_r = F_u \operatorname{tg}\varepsilon \qquad (41)$$

$$F_z = F_u \operatorname{tg}\beta_c \qquad (42)$$

$$F_n = F_r\cos\delta - F_z\sin\delta \qquad (42)$$

$$F_n = F_u\left(\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta - \operatorname{tg}\beta_c\sin\delta\right) \qquad (43)$$

Z równania (33) po uwzględnieniu zależności (36) otrzymujemy:

$$F_u = w\cos\beta\left[\left(2\omega - \frac{w\sin\beta}{r}\right)\sin\delta - \frac{\partial}{\partial n}(w\sin\beta)\right] \qquad (44)$$

Wstawiając równanie (40) i (44) do równania (43) otrzymamy:

$$\frac{\partial w}{\partial n} + w\left(\frac{\cos^2\beta}{r_k} + \frac{\sin^2\beta\cos\delta}{r}\right) - 2\omega\sin\beta\cos\delta +$$

$$+ \left(2\omega - \frac{w\sin\beta}{r}\right)\sin\delta\cos\beta\left(\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta - \operatorname{tg}\beta_c\sin\delta\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial w}{\partial m}\sin\beta + w\frac{\partial}{\partial m}\sin\beta\right)\cos\beta\left(\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta - \operatorname{tg}\beta_c\sin\delta\right)$$

$$(45)$$

Zmienne zależne od kształtu geometrycznego kanału wirnikowego zgrupowane przy w i jako wyraz wolny oznaczymy dwoma pa-

rametrami:

$$P = \frac{\cos^2\beta}{r_k} + \frac{\sin^2\beta \cos\delta}{r} -$$

$$- (\mathrm{tg}\varepsilon \cos\delta - \mathrm{tg}\beta_0 \sin\delta) \cos\beta \cdot \left(\frac{\sin\beta \cos\delta}{r} + \frac{\partial}{m} \sin\beta\right)$$

$$Q = -2\omega\left[\sin\beta \cos\delta - \cos\beta \sin\delta\,(\mathrm{tg}\varepsilon \cos\delta - \mathrm{tg}\beta_0 \sin\delta)\right] -$$

$$- (\mathrm{tg}\varepsilon \cos\delta - \mathrm{tg}\beta_0 \sin\delta)\cos\beta \sin\beta \frac{\partial w}{\partial m} \tag{46}$$

Ostatecznie równanie różniczkowe przepływu względnego w kanale sprężającym wirnika z przyspieszeniem merydionalnym, z łopatkami o przestrzennej krzywiźnie przyjmuje postać:

$$\frac{\partial w}{\partial n} + Pw + Q = 0 \tag{47}$$

6. METODA ROZWIĄZANIA

W przyjętym modelu wirnika o danych parametrach geometrycznych i kinematycznych (φ,ψ) wyznacza się wstępnie w przekroju medyrionalnym rozkład linii prądu i linii ortogonalnych [12]. Zakłada się przy tym, że piasta i osłona stanowią skrajne powierzchnie prądu ograniczające rozpatrywany kanał wirnikowy.

6.1. Promień krzywizny linii prądu

Promień krzywizny linii prądu w punkcie przecięcia się z ortogonalną wyznacza się z zależności:

$$r_k = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2r}{dz^2}} \tag{48}$$

Uprzednio określa się równanie krzywej aproksymującej kształt linii prądu w otoczeniu rozpatrywanego punktu.

6.2. Rozwiązanie równania przepływu względnego

Równanie (47) będące równaniem różniczkowym liniowym 1 rzędu posiada rozwiązanie ogólne o postaci:

$$w = \exp\left(-\int P\,dn\right)\left[-\int Q \exp\left(\int P\,dn\right) dn + C\right] \quad (49)$$

Dla n rosnącego od piasty do osłony otrzymujemy dla $w = w_p$ i $n = 0$:

$$w = \exp\left(-\int_0^n P\,dn\right)\left[w_p - \int_0^n Q \exp \int_0^n (P\,dn)dn\right], \quad (50)$$

gdzie: w_p stanowi prędkość wzdłuż piasty traktowanej, jako powierzchnia prądu.

Rozwiązanie równania (50) pozwala na wyznaczenie rozkładu prędkości względnych leżących na powierzchniach prądu, wzdłuż kolejnych ortogonalnych. Wyrażenie $\partial w/\partial m$ występujące w parametrze Q oblicza się numerycznie niezależnie od równania (50). W pierwszym przybliżeniu rozwiązania równania przepływu względnego, wyznacza się przybliżoną wartość wyrażenia $\partial w/\partial m$ wykorzystując wstępnie obliczony, zgodnie z pracą [12], rozkład prędkości względnych wzdłuż linii prądu. W następnym przybliżeniu i dalszych, przy obliczaniu wyrażenia $\partial w/\partial m$ wykorzystuje się stablicowane rozkłady prędkości względnych ($w = f(s)$), uzyskane w przybliżeniu poprzednim.

W pracy [3] zastosowano ścisłą metodę rozwiązania równania (50) poprzez całkowanie graficzne. Szybszą metodę, dogodną do numerycznych obliczeń przy pomocy maszyny matematycznej podano w pracy [5]. W metodzie tej przyjmuje się założenie, że sąsiednie powierzchnie prądu oddalone są od siebie o skończoną, małą wartość Δn mierzoną wzdłuż ortogonalnych. Założenie to umożliwia przyjęcie stałości parametrów P i Q w

równaniu (50) w rozpatrywanym przedziale Δn. Wartości liczbowe parametrów P i Q uwzględniających geometrię wirnika określa się z równań (46) dla środkowego punktu przedziału Δn.

Przy tych założeniach w prosty sposób rozwiązuje się równanie (49) dla kolejnego przedziału Δn.

Dla stałej wartości P i Q można napisać:

$$\frac{dw}{Pw + Q} = dn$$

Całkując zmienne rozdzielone otrzymujemy

$$\frac{1}{P} \ln (P w + Q) = n + C,$$

dla $n = 0$, $w = w_p$,

$$P n = \ln \left(\frac{P w + Q}{P w_p + Q}\right),$$

oraz dla $n = \Delta n$,

$$\exp P \Delta n = \frac{P w + Q}{P w_p + Q}$$

skąd

$$w = w_p \exp P \Delta n + \frac{Q}{P} \left[\exp (P \Delta n) - 1\right], \qquad (51)$$

gdzie: w i w_p stanowią prędkości względne na sąsiednich liniach prądu odległych od siebie o Δn. Rozwiązanie równania (51) dla szeregu punktów podziału ortogonalnych umożliwia określenie rozkładu prędkości względnych w całym kanale wirnikowym. W tym celu wykorzystuje się w dalszym ciągu równanie ciągłości (14). Zakłada się przy tym, że pomiędzy sąsiednimi obrotowymi powierzchniami prądu przepływają równe ilości czynnika

$$\dot{m} = \varrho 2 \pi \cdot \bar{r} (\Delta n) \bar{w}_m \tau, \qquad (52)$$

gdzie: $\bar{r}$ i $\bar{w}_m$ stanowią średnie wielkości promienia i prędkości dla odcinka między sąsiednimi liniami prądu.
Jeśli przepływ jest izentropowy i ściśliwy gęstość czynnika obliczamy ze wzoru (16).

Biorąc pod uwagę równania (51) i (52) i jeśli to konieczne równanie (16) znajdujemy prędkość względną w każdym punkcie przecięcia linii prądu i ortogonalnej.

Punkt początkowy obliczeń obiera się na linii ortogonalnej na przecięciu z tworzącą piasty traktowaną jako pierwsza linia prądu. Punkt przecięcia następnej linii prądu określa się z równań (51) i (52). W ten sposób postępując od odcinka do odcinka wzdłuż ortogonalnej otrzymuje się wszystkie punkty określające położenie kolejnych linii prądu. Podobnie wyznacza się położenie linii prądu oraz rozkład prędkości względnych i ciśnień na każdej linii ortogonalnej, uzyskując w efekcie rozkład linii prądu i parametrów przepływu w całym kanale wieńca wirnikowego.

Rozkład ciśnień statycznych wyznacza się z zależności

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa} \tag{53}$$

względnie jeżeli przepływ jest nieściśliwy

$$p = p_0 + \varrho\left(\frac{u^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) \tag{54}$$

przy założeniu, że zawirowanie wstępne na wlocie jest równe zeru ($\lambda = 0$).

7. UWAGI KOŃCOWE

Podana w niniejszej pracy metoda określa zależności umożliwiające analizę przepływu w wieńcu wirnikowym osiowego stopnia sprężającego z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia o określonej uprzednio geometrii.

Metoda opracowna została w oparciu o prace wcześniejszych autorów [3], [5], którzy rozwiązali podobne zagadnienie w stopniu promieniowym i osiowopromieniowym kierunku przepływu czynnika. W odróżnieniu jednakże od cytowanych autorów uzyskane zależności umożliwiają analizę przepływu dla zupełnie różnego i bardziej ogólnego przypadku wieńca wirnikowego z łopatkami ukształtowanymi przestrzennie. W szczególności odmienność kształtu rozpatrywanego wieńca wirnikowego uwzględniona została w parametrach P i Q występujących w równania (47). Uzyskane zależności wyprowadzono, przyjmując podobnie jak w pracach [3], [5], [6], [8], [10] założenie osiowosymetrycznego, izentropowego i ustalonego przepływu czynnika nielepkiego i ściśliwego, rozpatrując siły działające na cząstkę poruszającą się wzdłuż linii prądu, równanie energii przepływu względnego oraz równanie ciągłości. Założenie izentropowości przemian zachodzących w przepływie, przyjmowane jest przez wielu autorów i otrzymane przy tym założeniu wyniki stanowią dobre przybliżenie rzeczywistego przepływu pod warunkiem, że w kanałach sprężających nie występuje zjawisko odrywania się strug [2], [9], [10]. Rozwiązanie równania (47), stanowiącego ostateczny efekt rozważań, na drodze kolejnych przybliżeń, umożliwi w dalszym ciągu określenie rozkładu prędkości względnych i ciśnień w przekroju merydionalnym przyjętego modelu wirnika. Analiza uzyskanych rozkładów parametrów przepływu pozwoli ustalić szczególnie niekorzystnie pracujące, z punktu widzenia strat zachodzących w przepływie rzeczywistym, przekroje kanału przepływowego, co z kolei umożliwi skonstruowanie sprawniejszego, pod względem aerodynamicznym, kształtu łopatki i przekroju merydionalnego wirnika. Podana w punkcie 6.2. pracy w ogólnym zarysie metoda rozwiązania równania (47) oparta na pracy Hodskinsona [5] jest szczególnie korzystna z uwagi na możliwość zastosowania do obliczeń maszyny cyfrowej, co pozwoli znacznie skrócić czas żmudnych obliczeń i zwiększyć ich dokładność przez uzyskanie większej liczby przybliżeń. W skrócie proces obliczeń polega na wielokrotnym stosowaniu równania prędkości w postaci (51)

oraz równania ciągłości (52). Pierwszy etap analizy wymaga określenia danych opisujących geometrię wirnika w przekroju merydionalnym, kształt łopatki oraz geometrię linii prądu. Szczególnie pracochłonne jest ustalenie krzywizny linii prądu w punktach przecięcia z ortogonalnymi oraz zależności $\partial w/\partial m$ w równaniu (46), do której dochodzi się po wstępnym ustaleniu rozkładu prędkości względnych. Pomocne będą tu metody numeryczne, w szczególności metoda interpelacyjna Lagrange'a. Biorąc pod uwagę znaczną liczbę zagadnień związanych z doborem najdokładniejszych metod obliczeniowych do rozwiązywanego problemu, nie mieszczących się w ramach niniejszej pracy oraz przewidywane opracowanie programu obliczeń na maszynę cyfrową, przykład liczbowy stanowić będzie przedmiot dalszego opracowania.

Należy nadmienić, że dalszy program prac nad analizą przepływu w wieńcu sprężającym wirnika z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia, przewiduje rozwiązanie drugiego przybliżenia dwuwymiarowego w przepływie trójwymiarowym, uwzględniającego wpływ skończonej liczby łopatek na rozkład parametrów przepływu w kierunku obwodowym, na osiowosymetrycznych powierzchniach prądu wyznaczonych w pierwszym przybliżeniu.

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

a - prędkość dźwięku w punkcie spiętrzenia,
c - prędkość bezwzględna przepływu,
F - siła łopatkowa na jednostkę masy płynu,
h_o - entalpia całkowita (spoczynkowa),
h_w - entalpia całkowita przepływu względnego,
i - entalpia statyczna na jednostkę masy płynu,
m - odległość mierzona wzdłuż linii prądu od krawędzi wlotowej łopatki w przekroju merydionalnym wirnika,
$\dot{m}$ - masa przepływającego czynnika w jednostce czasu,
n - odległość mierzona wzdłuż ortogonalnej w przekroju merydionalnym,

p - ciśnienie statyczne,
P, Q - parametry uwzględniające geometrię łopatki,
r - promień mierzony od osi obrotu,
r_k - promień krzywizny linii prądu,
R - stała gazowa,
t - czas,
T - temperatura bezwzględna,
u - prędkość obwodowa,
w - prędkość względna przepływu,
z - odległość mierzona w kierunku osiowym,
α - kąt między kierunkiem strugi a płaszczyzną przechodzącą przez oś maszyny,
β - kąt między prędkością względną, a rzutem osi maszyny w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu,
β_c - kąt między styczną do linii szkieletowej przekroju łopatki a osią maszyny w przekroju cylindrycznym,
Δ - różnica skończona,
δ - kąt między styczną do linii prądu w przekroju merydionalnym a osią obrotu,
ε - kąt odchylenia krawędzi łopatki od kierunku promienia w płaszczyźnie prostopadłej do osi,
ϑ - składowa obwodowa,
$\varkappa$ - wykładnik adiatermy,
λ - zawirowanie wstępne,
ϱ - gęstość czynnika,
ϱ_o - gęstość spoczynkowa,
φ - wskaźnik wydajności,
ψ - wskaźnik sprężu,
ω - prędkość kątowa,
τ - stopień przewężenia przekroju przepływowego wirnika.

Wskaźniki

m - składowa merydionalna (w kierunku osi m),
n - składowa w kierunku osi n,
o - parametry całkowite lub spoczynkowe,
r - składowa promieniowa,

s - strona ssąca łopatki,
t - strona tłoczna łopatki,
u - składowa obwodowa.

LITERATURA

[1] Borisienko A.J.: Gazowaja dinamika dwigatieliej. Oborongiz, Moskwa 1962.

[2] Eckert B.: Sprężarki osiowe i promieniowe, PWT, Warszawa 1959.

[3] Hamrick I.T., Ginsburg A., Osborn W.M.: Method of Analysis for Compressible flow through Mixed-Flow Centrifugal Impellers of Arbitrary Design. NACA Report No. 1082, 1952.

[4] Hawthorne W.R.: Aerodynamic of Turbines and Compressors. Rozdz.H. Princeton University Press 1964.

[5] Hodskinson M.G.: A Procedure for Calculating the Axisymmetric Velocity and Pressure Distribution in Centrifugal and Mixed Flow Impeller Channels.Report ULME/B10 University of Liverpool. 1965.

[6] Kramer J.J., Osborn W.M., Hamrick I.T.: Design and test of Mixed-Flow and Centrifugal Impeller.Trans.ASME, Series A.J. of Eginnering for Power, 1960.

[7] Nowakowski J.: Badanie przepływu w kanałach wentylatorów osiowo akcyjnych. Prace I.T.C. zeszyt 16, Łódź 1961.

[8] Smith L.H., Traugott S.G., Wislicenus G.F.: A Pracitcal Solution of three Dimensional Flow Problem of Axial-Flow Turbomachinery. Trans. ASME vo.75, 1953.

[9] Traupel W.: Die Theorie der Strömung durch Radialmaschinen. Verlag G. Braun. Karlsruhe 1962.

[10] Vavra M.A.: Aero Thermodynamic and Flow in Turbomachines. John Wiley, New York 1960.

[11] Witkowski A.: Wentylatory z merydionalnym przyspieszeniem strumienia w wirniku, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka nr 17 Gliwice 1964.

[12] Witkowski A.: Metoda projektowania wirnika wentylatora z merydionalnym przyspieszeniem strumienia. Prace Katedry CMW Gliwice 1966 (praca nieopublikowana).

[13] Wu Hung-Hua: A General Theory of Three - Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial, and Mixed-Flow types. Transactions ASME vol.74, No 8. 1952.

МЕТОД АНАЛИЗА ТЕЧЕНИЯ В ОСЕВОМ КОМПРЕССОРНОМ РАБОЧЕМ КОЛЕСЕ С МЕРИДИОНАЛЬНО УСКОРЕННЫМ ПОТОКОМ

Р е з ю м е

Приводится метод теоретического анализа стационарного течения невязкого газа через компрессорное рабочее колесо с меридионально ускоренным потоком с пространственно построенными лопатками. Рассматривая первую двухмерную задачу в трехразмерном течении, предполагается что поток является осесимметричным. Изменение же давлении в окружном направлении учитывается введением лопаточной силы. Использовав уравнение движения для идеального газа в форме Громеко-Лэмба получено уравнение относительного течения которое даёт возможность расчёта распределения скоростей и давлений методом последовательных приближений. Результаты расчета позволит улучшит аэродинамическую характеристику рабочего колеса.

METHOD OF ANALYSIS FOR FLOW THROUGH AXIAL-FLOW COMPRESSOR IMPELLER WITH MERIDIAL ACCELERATION

S u m m a r y

A theoretical method for analysis of the nonviscous steady flow through axial-discharge mixed flow impeller with blades of arbitrary spatial shapes has been presented. In the paper a method of calculation of the first two-dimensional solution in three dimensional flows has been presented in detail. Axial symmetry was assumed,but forces in the meridional plane that were derived from tangential pressure gradient were taken into account. By the use Gromeko-Lamb's form of the equation of motion, the isentropic flow in meridional plane may by obtained and shown in terms of the flow streamlines and the velocity and pressure distributions. The results of the analysis indicate the whereabouts in the impeller of unfavourable flow distributions from the point of view of losses arising in a real fluid. With the above the modified meridional and blade shapes can then be chosen for the impeller.