

Jerzy JAKUBIEC
Hamid AL RAIMI

NIEDOKŁADNOŚĆ WYNIKÓW POMIARÓW SPOWODOWANA CZASOWĄ NIEPEWNOŚCIĄ PRÓBKOWANIA PRZEBIEGÓW SINUSOIDALNIE ZMIENNYCH

Streszczenie. W artykule opisano wyniki symulacyjnej analizy błędów związanych z czasowymi błędami próbkowania przebiegów sinusoidalnie zmiennych. Przedstawiono przykładowe histogramy błędów dla próbkowania okresowego i losowego zakładając, że błędy czasowe mogą mieć rozkład jednostajny lub normalny. Podane w artykule zależności między niepewnością wyników pomiaru a niepewnością chwil próbkowania wyznaczono definiując niepewność jako graniczną.

MEASURING RESULT UNCERTAINTY CAUSED BY TIME ERRORS OF SAMPLING OF SINUSOIDAL QUANTITIES

Summary. Simulation analysis results of the measuring result uncertainty caused by time errors of sampling of sinusoidal quantities have been presented in the paper. Exemplary histograms of errors for periodic and random ways of sampling have been shown. Both Gaussian and uniform distributions of the time error have been considered. The relationships between uncertainties of measuring results and sampling moments have been determined defining the above uncertainties as the limiting ones.

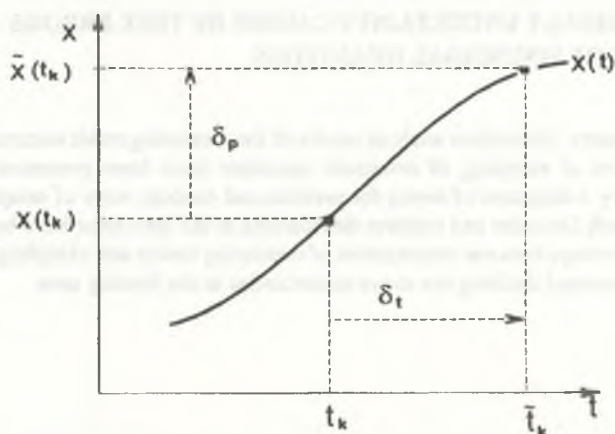
1. WSTĘP

W systemach pomiarowych i automatyzacyjnych często zachodzi sytuacja, gdy mierzone są wartości chwilowe przebiegów zmiennych w czasie. Niedokładność określenia momentu próbkowania przejawia się w takich przypadkach w postaci błędów wyników pomiaru wartości chwilowych. Błędy te mogą powstawać w dwojaki sposób:

- mogą być powodowane przez zjawiska fizyczne związane z wytwarzaniem i przenoszeniem impulsów wyzwających, zjawiskami w układach elektronicznych realizujących próbkowanie itp.,

- mogą być związane z przesyłaniem w systemach cyfrowych wyników pomiaru wartości chwilowych z przetwornika pomiarowego do elementu wykonawczego, zjawiska te uwarunkowane są własnościami sprzętu realizującego transmisję, w dużym jednak stopniu związane są z własnościami oprogramowania nadajników i odbiorników danych, a także systemu operacyjnego zarządzającego systemem.

Można zatem wyróżnić dwa podstawowe mechanizmy powstawania czasowych błędów próbkowania: o charakterze fizycznym (sprzętowym) i programowym. Jednak z punktu widzenia odbiornika wykorzystującego dane pomiarowe na bieżąco obydwa mechanizmy są nierozróżnialne. Stąd w dalszym ciągu artykułu nie wyróżnia się fizycznej strony powstawania tych błędów traktując je łącznie i określając terminem czasowe błędy próbkowania lub w skrócie, błędy próbkowania. Błędy te mogą mieć składową systematyczną i losową. W dalszym ciągu poddawana jest analizie składowa losowa przy założeniu, że mechanizmy opisujące błędy próbkowania są niezmiennie w czasie. Założenie to na ogół jest spełnione w praktyce. W odniesieniu do systemów pomiarowych oznacza ono zachowanie stałej konfiguracji sprzętu współpracującego pod nadzorem określonego systemu operacyjnego czasu rzeczywistego. W opisanej sytuacji błędy próbkowania mogą być modelowane stacjonarną zmienną losową o zerowej wartości oczekiwanej.



Rys. 1. Interpretacja czasowego błędu próbkowania δ_p

Fig. 1. Interpretation of the sampling error δ_p

Graficzną interpretację czasowego błędu próbkowania przedstawia rys. 1. Zakłada się, że wielkość mierzona jest nominalnie próbkowana w chwilach t_k . Rzeczywisty moment próbkowania oznaczany jest symbolem \bar{t}_k , zatem zachodzi

$$\tilde{t}_k = t_k + \delta_k, \quad (1)$$

gdzie δ_k jest losowym błędem chwili próbkowania równym odległości nominalnej i rzeczywistej chwili próbkowania. Błąd chwili próbkowania δ_k przejawia się w wartości wielkości mierzonej jako błąd próbkowania δ_p równy różnicy między nominalną wartością wielkości w chwili t_k , tj. $x(t_k)$ a wartością zmierzoną $\tilde{x}(t_k)$ w rzeczywistej chwili próbkowania \tilde{t}_k przy założeniu, że błąd pomiaru próbki jest potencjalnie mały. Zatem błąd próbkowania w chwili t_k ma postać:

$$\delta_p = x(t_k) - x(\tilde{t}_k) = x(t_k) - \tilde{x}(t_k). \quad (2)$$

W dalszej części artykułu poddano analizie błędy próbkowania powstające przy sinusoidalnym przebiegu wejściowym próbkowanym równomiernie i dla losowo zmiennego momentu próbkowania. Założono, że błędy chwil próbkowania δ_k mają rozkład jednostajny bądź normalny.

2. BŁĘDY PRÓBKOWANIA PRZY POMIARZE WARTOŚCI CHWILOWYCH PRZEBIEGU SINUSOIDALNIE ZMIENNEGO

2.1. Próbkowanie równomierne synchroniczne

Próbkowanie synchroniczne występuje, gdy częstotliwość próbkowania jest krotnością częstotliwości przebiegu przy zerowym przesunięciu fazowym sinusoidy i pierwszego momentu próbkowania. Przyjmijmy, że przebieg o jednostkowej amplitudzie i pulsacji ω opisany zależnością

$$x(t) = \sin \omega t, \quad (3)$$

próbkowany jest w chwilach $t_k = kT_p$, gdzie T_p jest okresem próbkowania, k numerem chwili próbkowania, $k = 0, 1, \dots$. Zatem wartości przebiegu w chwilach nominalnego próbkowania określone są jako:

$$x(t_k) = \sin \omega t_k. \quad (4)$$

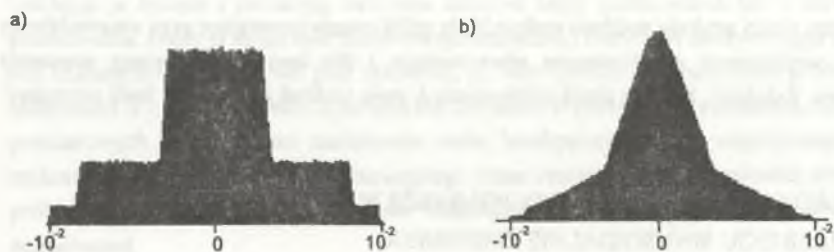
Wyniki pomiaru wartości chwilowych przebiegu przy założeniu, że występują jedynie błędy próbkowania, mają postać:

$$\tilde{x}(t_k) = \sin \omega (T_p + \delta_k), \quad (5)$$

a zatem błąd próbkowania określa wyrażenie:

$$\delta_p = \sin \omega (kT_p + \delta_k) - \sin \omega kT_p. \quad (6)$$

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono przykładowe histogramy błędów próbkowania δ , dla rozkładu jednostajnego i normalnego błędów chwil próbkowania δ , oraz dla różnych wartości liczby próbek przypadającej na okres sinusoidy (względnej częstości próbkowania) określonej stosunkiem $\frac{T}{T_p}$. Histogramy są tworzone przy założeniu liczby próbek równej 10^6 , a wartości błędów są zliczane w 200 przedziałach. Można zatem przyjąć, że tak zbudowane histogramy mogą być wizualnie traktowane jako obraz funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędów próbkowania.



Rys.2. Gęstość prawdopodobieństwa błędów próbkowania dla sinusoidalnie zmiennego przebiegu próbkowanego z częstością 10 próbek na okres, z początkowym przesunięciem $\varphi_0 = 0$, względnej niepewności chwil próbkowania $\frac{\Delta t}{T} = 10^{-2}$, dla rozkładów chwil próbkowania:

a) jednostajnego, b) normalnego

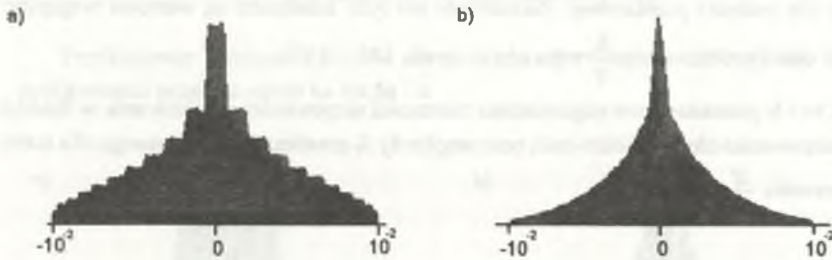
Fig.2. Probability density of the sampling error for sinusoidal quantity sampled with relative frequency 10 samples per period. The beginning phase between the sampling signal and the sampled sinusoid $\varphi_0 = 0$. The relative uncertainty $\frac{\Delta t}{T} = 10^{-2}$ for a) Gaussian,

b) uniform distribution of the time error

Ważnym parametrem procesu badania rozkładów błędów próbkowania jest stosunek niepewności chwil próbkowania oznaczanej jako Δt , do okresu T próbkowanej sinusoidy. Dla przykładowych histogramów przedstawionych na rys.2 i 3 przyjęto $\frac{\Delta t}{T} = 10^{-2}$. Założono przy tym

(założenie to jest aktualne w całym artykule), że granice obszaru niepewności wyznaczane są wg reguł przyjmowanych dla tzw. niepewności granicznej [2]. Jest ona definiowana dla rozkładu normalnego błędów jako $\Delta = 3\sigma$, gdzie σ jest odchyleniem standardowym. Oznacza to, że w przedziale o szerokości 2Δ mieści się 99,7% wszystkich błędów o rozkładzie normalnym. Przenosząc tę definicję na inne rozkłady, niepewność graniczną Δ wyznacza się jako połowę

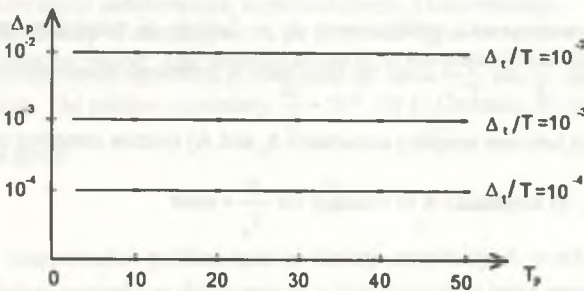
szerokości przedziału, w którym mieści się 99,7% wszystkich realizacji błędów. Zależności przedstawione na rys. 4 i 5 wyznaczane są dla niepewności Δ_t określonej w powyższy sposób.



Rys. 3. Gęstość prawdopodobieństwa błędów próbkowania dla sinusoidalnie zmiennego przebiegu próbkowanego z częstością 50 próbek na okres, z początkowym przesunięciem $\varphi_0 = 0$, względnej niepewności chwil próbkowania $\frac{\Delta_t}{T} = 10^{-2}$, dla rozkładów chwil próbkowania:

a) jednostajnego, b) normalnego

Fig. 3. Probability density of the sampling error for sinusoidal quantity sampled with relative frequency 50 samples per period. The beginning phase between the sampling signal and the sampled sinusoid $\varphi_0 = 0$. The relative uncertainty $\frac{\Delta t}{T} = 10^{-2}$ for a) Gaussian, b) uniform distribution of the time error

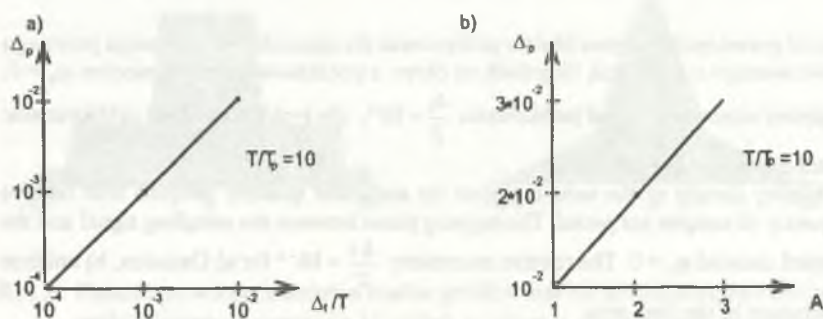


Rys. 4. Zależność granicznej niepewności próbkowania Δ_p w funkcji względnej częstości próbkowania $\frac{T}{T_s}$ dla $\frac{\Delta_t}{T} = const$

Fig. 4. Relation ship between limiting uncertainty of sampling Δ_p and the relative sampling frequency $\frac{T}{T_s}$ for $\frac{\Delta_t}{T} = const$

Na rys.4 przedstawiono zależności niepewności próbkowania Δ_p w funkcji względnej częstotliwości próbkowania $\frac{T}{T_r}$ zmieniającej się w zakresie od 2 do 50, który można uznać za reprezentatywny dla techniki pomiarowej. Parametrem dla tych zależności są wartości względne niepewności chwil próbkowania $\frac{\Delta_t}{T}$ wybrane z zakresu $10^{-4} \dots 10^{-2}$.

Na rys.5a i b przedstawiono odpowiednio zależności niepewności próbkowania w funkcji względnej niepewności chwil próbkowania oraz amplitudy A przebiegu próbkowanego dla stałej wartości stosunku $\frac{T}{T_r}$ równej 10.



Rys.5. Zależność niepewności próbkowania Δ_p w funkcji: a) względnej niepewności chwil próbkowania $\frac{\Delta_t}{T}$ dla $\frac{T}{T_r} = const$, b) amplitudy A przebiegu sinusoidalnego dla $\frac{T}{T_r} = const$

Fig.5. Relationship between sampling uncertainty Δ_p and A) relative sampling uncertainty $\frac{\Delta_t}{T}$ for $\frac{T}{T_r} = const$, b) amplitude A of sinusoid for $\frac{T}{T_r} = const$

2.2. Próbkowanie równomierne z losowym początkowym przesunięciem fazowym

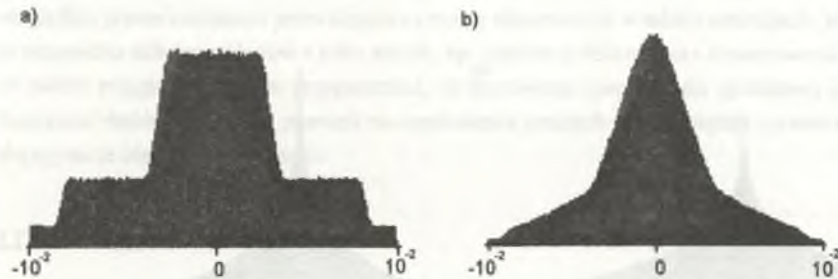
Załóżmy, że przebieg sinusoidalny jest próbkowany równomiernie, jednak początkowe przesunięcie fazowe jest różne od zera i losowo zmienne. Wyniki pomiarów można wówczas zapisać w postaci:

$$\hat{x}(t_k) = \sin \omega (kT_p + t_0 + \delta_r), \quad (7)$$

gdzie: t_0 jest losowym przesunięciem początkowym o rozkładzie jednostajnym w zakresie od $-0.5 T_p$ do $0.5 T_p$. Błąd próbkowania w takim przypadku określa wyrażenie

$$\delta_p = \sin \omega (kT_p + t_0 + \delta_t) - \sin \omega (kT_p + t_0). \quad (8)$$

Przykładowe histogramy błędów dla rozkładu jednostajnego i normalnego błędów chwil próbkowania przedstawiono na rys.6a i b.



Rys.6. Gęstość prawdopodobieństwa błędów próbkowania dla sinusoidalnie zmiennego przebiegu próbkowanego z częstością 10 próbek na okres, z początkowym przesunięciem losowym o rozkładzie jednostajnym, względnej niepewności chwil próbkowania $\frac{\Delta_t}{T} = 10^{-2}$, dla rozkładów chwil próbkowania: a) jednostajnego, b) normalnego

Fig.6. Probability density of sampling errors for sinusoidal signal sampled with relative frequency 10 samples for period. The beginning phase φ_0 is the probabilistic function with uniform distribution. The relative uncertainty $\frac{\Delta_t}{T} = 10^{-2}$, for a) Gaussian, b) uniform distribution of the time error

Zależności niepewności próbkowania w funkcji amplitudy A przebiegu sinusoidalnego i w funkcji względnej częstości próbkowania są w tym przypadku takie same jak to pokazano na rys.4 i 5.

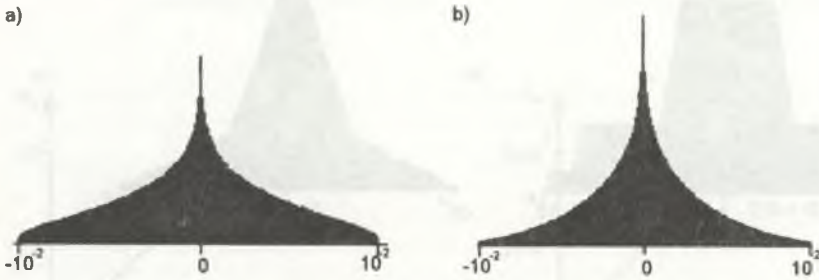
2.3. Próbkowanie losowe przebiegu sinusoidalnego

Zakłada się, że przebieg próbkowany jest sinusoidą, jednak pomiar dokonywany jest w dowolnym momencie w sposób losowy. Odpowiada to sytuacji, gdy odbiornik wymusza pomiar w dowolnym momencie. Błąd próbkowania określa wówczas wyrażenie

$$\delta_p = \sin \omega(t_p + \delta_t) - \sin \omega t_p, \quad (9)$$

gdzie: t_p jest losowym momentem próbkowania o rozkładzie jednostajnym w zakresie $0 \dots T$, T jest okresem sinusoidy, δ_t jest losowym błędem czasu próbkowania o rozkładzie jednostajnym lub normalnym.

Przykładowe histogramy błędów dla próbkowania losowego przedstawiają rys.7a i b. Zależności niepewności próbkowania w funkcji amplitudy A przebiegu sinusoidalnego i w funkcji względnej częstotliwości próbkowania są takie same, jak to pokazano na rys.4 i 5.



Rys.7. Gęstość prawdopodobieństwa dla przebiegu sinusoidalnego próbkowanego losowo w sposób jednostajny. Rozkład błędów chwil próbkowania jest: a) jednostajny,

b) normalny, przy założeniu, że niepewność względna wynosi $\frac{\Delta_t}{T} = 10^{-2}$

Fig.7. Probability density of sampling error for sinusoidal signal sampled in the probabilistic way. Probability distribution of the time errors is a) uniform, b) Gaussian with assumption that relative uncertainty $\frac{\Delta_t}{T} = 10^{-2}$

3. WNIOSKI

Jak to wynika z postaci przedstawionych przykładowych histogramów, różnice w rozkładach błędów próbkowania wynikają przede wszystkim z przyjęcia różnych rozkładów błędów chwil próbkowania. Dla małych wartości względnej częstotliwości próbkowania synchronicznego ujawniają się ponadto różnice w rozkładzie związane z „punktem pracy” na sinusoidzie (patrz rys.2). Uzyskane rozkłady są symetryczne, lecz o specyficznym kształcie. Jednak analiza własności niepewności próbkowania Δ_p , rozpatrywanej jako niepewność graniczna, pokazuje, że jest ona równa względnej niepewności chwil próbkowania $\frac{\Delta_t}{T}$ niezależnie od warunków pomiaru

(w przedstawionym zakresie zmian). Gdyby zależności te wyznaczyć dla innych sposobów definiowania niepewności proponowanych w zaleceniu [3], to okazałoby się, że dla różnych definicji uzyskuje się różne zależności. Wynika to z faktu, że praktycznie jedynie niepewność graniczna jest niezależna od rodzaju rozkładu. Ta istotna własność skłania do ogólnego wniosku, że w przypadku porównywania własności przetworników dla niepewności o różnych rozkładach jako miary błędu losowego powinno się używać niepewności granicznej.

Z prostoty zależności przedstawionych na rys.4 i 5 można również wysnuć wniosek, że w przypadku analizy błędów próbkowania przebiegów odkształconych będzie można uzyskać względnie proste zależności pozwalające na ocenę niepewności w takich sytuacjach, jak również w przypadku składania błędów z kilku źródeł, np. błędów próbkowania i kwantowania. Również w takim przypadku można przypuszczać, że stosowanie niepewności granicznej jako miary rozrzutu błędów losowych pozwoli na uzyskiwanie prostych relacji między zjawiskami powodującymi te błędy a ich efektami.

LITERATURA

1. Kulka Z., Libura A., Nadachowski M.: Przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe. WKiŁ, Warszawa 1987.
2. Marcyniuk A.: Teoria pomiaru. Podstawy metrologicznej interpretacji wyniku pomiaru. Skrypt Uczelniany Pol. Śl.,nr 687, Gliwice 1977.
3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneve 1992.

Recenzent: Dr hab. inż. Leszek Kiełtyka, prof. Pol. Częstochowskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 lutego 1996 r.

Abstract

Errors caused by time indefiniteness of sampling of varying in time measured quantity have been analysed in the paper. The analysis has been carried out in the simulation way for sinusoidal quantities sampled periodically and in a random way. The sampling errors have been defined as the difference between the nominal value of the measured quantity at the sampling moment and the value at moment which differs from nominal one by a time random error. Both Gaussian and uniform distributions of the time error have been considered. Results of the analysis have been presented in the paper, both in the form of histogram and as relationships between parameters of the sampling process and the limiting uncertainty of the sampling errors.