

Edward LAYER
Politechnika Krakowska

SYNTEZA UPROSZCZONYCH MATEMATYCZNYCH MODELI SYSTEMÓW POMIAROWYCH W OPARCIU O KRYTERIUM MIN MAX NA PRZYKŁADZIE MIN MAX CAŁKI Z KWADRATU BŁĘDU

Streszczenie. Artykuł przedstawia pewną metodę syntezy uproszczonych matematycznych modeli oraz wyznaczania błędów, z jakim odwzorowują one modele nieuproszczone. Metoda bazuje na zastosowaniu sygnałów wejściowych typu bang-bang, maksymalizujących całkę z kwadratu odpowiedzi modelu nieuproszczonego. Momenty przełączeń sygnałów bang-bang wynikają z rozwiązania wyprowadzonych równań całkowych. Równania te są szczegółowo analizowane przykładowo dla jednego oraz trzech przełączeń i mogą być łatwo uogólnione na ich dowolną liczbę. Uzyskany w oparciu o przedstawioną metodę uproszczony matematyczny model jest optymalny ze względu na przyjęte kryterium błędów. Wyznaczona wartość tego kryterium obowiązuje niezależnie od kształtu sygnału dynamicznego.

SYNTHESIS OF SIMPLIFIED MATHEMATICAL MODELS OF MEASURING SYSTEMS BASING ON MIN MAX CRITERION ON EXAMPLE OF MIN MAX OF THE INTEGRAL SQUARE ERROR

Summary. The article presents a certain method of synthesising simplified mathematical models. It also shows the method of determining the errors which occur when simplified models map non-simplified ones. This method is based on the input signals of the bang-bang type which maximise the integral-square-error-output of a non-simplified model. The moments of signal switch-overs result from the solution of the derived integral equations. These equations are analyzed in detail for one and three switches by way of example and can be easily generalised for any number of switches. The simplified mathematical model obtained on the basis of the presented method is an optimal one with respect to value of the assumed error criterion. This value of error criterion is valid independently of the dynamic signal shape.

1. WSTĘP

Problematyka syntezy matematycznych modeli różnych systemów dynamicznych jest sprawą szczególnie ważną w sytuacji, gdy coraz więcej eksperymentów fizycznych zastępowanych jest eksperymentami symulacyjnymi. W dziedzinie metrologii elektrycznej matematyczne modele opisują, najczęściej za pomocą równań różniczkowych, właściwości dynamiczne systemów pomiarowych lub ich wybranych podzespołów. W praktyce matematyczny model opisuje tylko z większym lub mniejszym błędem modelowany system, a wartość tego błędu można minimalizować poprzez syntezę coraz dokładniejszych modeli, o zazwyczaj wyższych rzędach równania. Wydawać by się zatem mogło, że najlepiej tworzyć modele wysokich rzędów o dużej dokładności. W praktyce korzyści ze stosowania modeli o wysokich lub bardzo wysokich rzędach są jednak często iluzoryczne, bowiem późniejsza analiza właściwości takich modeli jest znacznie bardziej skomplikowana, pracochłonna i kosztowna. Z tego między innymi powodu często jesteśmy zmuszeni do upraszczania modeli wysokich rzędów, stosunkowo łatwo uzyskiwanych np. w wyniku przeprowadzenia analizy strukturalnej modelowanego systemu. Zasadniczym problemem syntezy modelu uproszczonego jest ustalenie odpowiedniego rzędu i współczynników opisującego go równania różniczkowego oraz wyznaczenie błędu, z jakim odwzorowuje on model nieuproszczony. W sytuacji gdy model uproszczony ma służyć do analizy właściwości dynamicznych systemu, wyznaczanie jego błędu odwzorowania za pomocą standardowych sygnałów wejściowych oraz typowych kryteriów błędów jest niewystarczające. Wartości błędów zależą bowiem w sposób zasadniczy od postaci zastosowanych sygnałów wejściowych, co przy dużej różnorodności i dowolności ich wyboru uniemożliwia przeprowadzenie jednoznacznej oceny uzyskanych modeli. W przypadku pomiarów dynamicznych musimy założyć zupełną dowolność kształtu sygnałów mierzonych, a więc różniących się w sposób istotny od sygnałów standardowych i właśnie dla takich sygnałów błąd odwzorowania winien obowiązywać. Artykuł, na przykładzie kryterium całki z kwadratu błędu, przedstawia metodę określania maksymalnego błędu odwzorowania modeli uproszczonych względem modeli nieuproszczonych. Wartość tego błędu obowiązuje niezależnie od kształtu sygnału dynamicznego, natomiast jest funkcją czasu jego trwania. Metoda składa się z dwóch etapów. W pierwszym wyznacza się sygnał wejściowy modelu nieuproszczonego, który w zadanym przedziale czasu generuje maksymalną wartość całki z kwadratu jego odpowiedzi rys.1. W etapie drugim optymalizuje się parametry modelu uproszczonego na minimum wartości całki z kwadratu różnicy odpowiedzi modeli uproszczonego i nieuproszczonego, dla uprzednio wyznaczonego sygnału wejściowego.

2. WARTOŚĆ MAKSYMALNA CAŁKI Z KWADRATU ODPOWIEDZI MODELU NIEUPROSZCZONEGO

Zapiszmy matematyczną postać modelu nieuproszczonego za pomocą funkcji przejścia dla $n = m$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum a_n s^n}{\sum b_m s^m}, \quad (1)$$

lub w postaci równoważnej dla $n < m$ poprzez wydzielenie stałej $c \neq 0$ i $c \in \mathcal{R}^+$, będącej stosunkiem współczynników a i b przy najwyższych potęgach operatora s

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c + \frac{\sum a_n s^n}{\sum b_m s^m}. \quad (2)$$

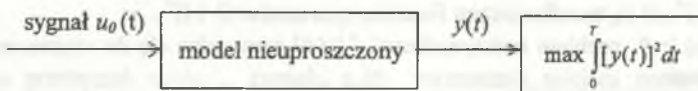
Przedstawmy całkę z kwadratu odpowiedzi $I[y(t)]$ modelu (2) w postaci

$$I[y(t)] = \int_0^{\tau} [cu(t) + y(t)]^2 dt, \quad (3)$$

w której

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (4)$$

a $k(t)$ przedstawia odpowiedź impulsową transmitancji występującej w prawej części równania (2) dla $n < m$.



Rys.1. Schemat blokowy układu do wyznaczenia sygnału $u_0(t)$ maksymalizującego całkę z kwadratu wyjścia modelu nieuproszczonego

Fig. 1. Block diagram of the system for determination a signal $u_0(t)$ which maximises the integral-square-output of non-simplified model

Przedstawmy zależność (3) za pomocą iloczynów skalarnych w przestrzeni Hilberta:

$$I[y(t)] = c^2 \langle u, u \rangle + F(u) \quad (5)$$

gdzie

$$F(u) = \langle H u, u \rangle, \quad (6)$$

$$H = c \cdot G + c \cdot G^* + G G^*, \quad (7)$$

a operatory $(G u)(t)$, $(G^* u)(t)$ oraz $(G G^* u)(t)$ wynoszą:

$$(G u)(t) = y(t) = \int_0^t k(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$(G^* u)(t) = \int_t^T k(\tau-t) u(\tau) d\tau, \quad (9)$$

$$(G G^* u)(t) = \int_t^T k(\tau-t) \left[\int_0^\tau k(\tau-\nu) u(\nu) d\nu \right] d\tau. \quad (10)$$

Wyrażenie $I[y(t)]$ (wzór (5)) osiąga maksimum, jeżeli jego obie składowe $c^2 \langle u, u \rangle$ i $F(u)$ są dodatnio określone. Składowa $c^2 \langle u, u \rangle$ jest zawsze dodatnio określona:

$$c^2 \langle u, u \rangle > 0 \quad \forall u, \quad u \neq 0, \quad (11)$$

natomiast operator $F(u) > 0$ dla $c = 0$ oraz $F(u) > 0 \quad \forall u, \quad u \neq 0, \quad c \neq 0, \quad c \in \mathcal{H}^+$, gdy

$$\text{real} [G(\omega) + G^*(\omega)] > 0, \quad (12)$$

gdzie $G(\omega)$ i $G^*(\omega)$ są transformacjami Fouriera operatorów G i G^* .

Dla $F(u) > 0$ problem maksymalizacji $I[y(t)]$ sprowadza się do wyznaczenia takiego $u_0(t)$, dla którego:

$$\max F(u) = F(u_0), \quad (13)$$

czyli spełniony jest warunek optymalności $u_0(t)$:

$$\left\langle \frac{\partial F(u)}{\partial u} \Big|_{u_0}, (u - u_0) \right\rangle \leq 0. \quad (14)$$

Rozwiązanie warunku (14) daje:

$$\langle (H + H^*) u_0, (u - u_0) \rangle \leq 0, \quad (15)$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\langle H u_0, u \rangle \leq \langle H u_0, u_0 \rangle. \quad (16)$$

oraz wynikający stąd szukany warunek na $u(t) = u_0(t)$ dający równość we wzorze (16):

$$u(t) = u_0(t) = \operatorname{sgn} [H u_0(t)]. \quad (17)$$

Odpowiadającą sygnałowi $u_0(t)$ wartość funkcjonału $I[y(t)]$ przedstawia zatem równanie:

$$\max I[y(t)] = c^2 \langle u_0, u_0 \rangle + \langle H u_0, u_0 \rangle. \quad (18)$$

Uwzględniając we wzorach (17) i (18) zależności (7) - (10) otrzymujemy ostatecznie

$$u_0(t) = \operatorname{sgn} \left[c \int_0^t k(t-\tau) u_0(\tau) d\tau + c \int_t^T k(\tau-t) u_0(\tau) d\tau + \int_t^T k(\tau-t) \left[\int_0^\tau k(\tau-v) u_0(v) dv \right] d\tau \right] \quad (19)$$

oraz

$$\begin{aligned} \max I[y(t)] = c^2 T + \int_0^T |c \int_0^t k(t-\tau) u_0(\tau) d\tau + c \int_t^T k(\tau-t) u_0(\tau) d\tau + \\ + \int_t^T k(\tau-t) \left[\int_0^\tau k(\tau-v) u_0(v) dv \right] d\tau| dt. \end{aligned} \quad (20)$$

3. CZASY PRZEŁĄCZEŃ SYGNAŁU WEJŚCIOWEGO

Czasy przełączeń t_1, t_2, \dots sygnału $u_0(t)$ wyznaczają miejsca zerowe funkcji $f(t)$ występującej pod znakiem sgn we wzorze (19). Przyjmuje się przy tym oczywiste założenie, że amplituda sygnału $u_0(t)$ maksymalizująca kryterium $I[y(t)]$ wynosi +1 lub -1. Załóżmy, że pierwsze przełączenie $u_0(t)$ zachodzi z +1 na -1, co oznacza, że dla $0 < t < t_1$ sygnał $u_0(t) = +1$.

W przypadku jednego przełączenia w $t = t_1$ mamy zatem:

$$f(t) = 0 = c \int_0^{t_1} k(t_1-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^T k(\tau-t_1) d\tau + \int_{t_1}^T k(\tau-t_1) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau, \quad (21)$$

a funkcja $f(t)$ występująca pod znakiem sgn (19) ma postać:
dla $t < t_1$:

$$f(t) = c \int_0^t k(t-\tau) d\tau + c \int_t^{t_1} k(\tau-t) d\tau - c \int_{t_1}^T k(\tau-t) d\tau + \int_t^{t_1} k(\tau-t) \left[\int_0^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\ + \int_{t_1}^T k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau$$

oraz dla $t \geq t_1$:

$$f(t) = c \int_0^{t_1} k(t-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^t k(t-\tau) d\tau - c \int_t^T k(\tau-t) d\tau + \int_t^{t_1} k(\tau-t) \left[\int_0^\tau k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau. \quad (22)$$

W bardziej skomplikowanym przypadku trzech przełączeń w t_1 , t_2 i t_3 otrzymuje się zależności:

$$f(t_1) = 0 = c \int_0^{t_1} k(t_1-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-t_1) d\tau + c \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t_1) d\tau - c \int_{t_3}^T k(\tau-t_1) d\tau + \\ + \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-t_1) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t_1) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau +$$

$$+ \int_{t_3}^T k(\tau-t_1) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau$$

$$f(t_2) = 0 = c \int_0^{t_1} k(t_2-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^{t_2} k(t_2-\tau) d\tau + c \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t_2) d\tau - c \int_{t_3}^T k(\tau-t_2) d\tau +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t_2) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau +$$

$$+ \int_{t_3}^T k(\tau-t_2) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau$$

$$f(t_3) = 0 = c \int_0^{t_1} k(t_3-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^{t_2} k(t_3-\tau) d\tau + c \int_{t_2}^{t_3} k(t_3-\tau) d\tau - c \int_{t_3}^T k(t_3-\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_3}^T k(t_3-\tau) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau. \quad (23)$$

Odpowiadająca przełączeniom w t_1 , t_2 i t_3 funkcja $f(t)$ ma w odnośnych przedziałach następującą postać:

dla $t < t_1$:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & c \int_0^t k(t-\tau) d\tau + c \int_t^{t_1} k(\tau-t) d\tau - c \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-t) d\tau + c \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t) d\tau - c \int_{t_3}^T k(\tau-t) d\tau + \\
 & + \int_t^{t_1} k(\tau-t) \left[\int_0^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\
 & + \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\
 & + \int_{t_3}^T k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau,
 \end{aligned}$$

dla $t_1 \leq t < t_2$:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & c \int_0^{t_1} k(t-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^t k(t-\tau) d\tau + c \int_t^{t_2} k(\tau-t) d\tau - c \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t) d\tau + c \int_{t_3}^T k(\tau-t) d\tau + \\
 & + \int_t^{t_2} k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\
 & + \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\
 & + \int_{t_3}^T k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau,
 \end{aligned}$$

dla $t_2 \leq t < t_3$:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & c \int_0^{t_1} k(t-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^{t_2} k(t-\tau) d\tau + c \int_{t_2}^t k(t-\tau) d\tau + c \int_t^{t_3} k(\tau-t) d\tau - c \int_{t_3}^T k(\tau-t) d\tau + \\
 & + \int_t^{t_3} k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau + \\
 & + \int_{t_3}^T k(\tau-t) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^\tau k(\tau-v) dv \right] d\tau
 \end{aligned}$$

dla $t \geq t_3$:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & c \int_0^{t_1} k(t-\tau) d\tau - c \int_{t_1}^{t_2} k(t-\tau) d\tau + c \int_{t_2}^{t_3} k(t-\tau) d\tau - c \int_{t_3}^t k(t-\tau) d\tau - c \int_t^T k(t-\tau) d\tau + \\
 & + \int_t^T k(t-\tau) \left[\int_0^{t_1} k(\tau-v) dv - \int_{t_1}^{t_2} k(\tau-v) dv + \int_{t_2}^{t_3} k(\tau-v) dv - \int_{t_3}^{\tau} k(\tau-v) dv \right] d\tau. \quad (24)
 \end{aligned}$$

W sposób analogiczny możemy ułożyć $f(t_k)$ równań dla założonej liczby k przełączeń oraz odpowiadających im $k+1$ równań $f(t)$. Ponieważ rozwiązanie układu równań:

$$f(t_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (25)$$

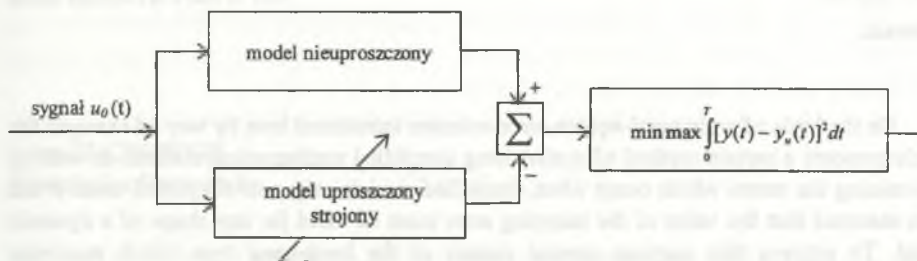
może mieć kilka miejsc zerowych, każde rozwiązanie winno być sprawdzone poprzez obliczenie odpowiadającej mu wartości $\max I[y(t)]$ jako sumy modułów funkcji $f(t)$ określanych dla $t < t_1$, $t_1 \leq t < t_2$, $t_2 \leq t < t_3$, ..., $t \geq t_k$. Proces poszukiwania optymalnej liczby k przełączeń sygnału $u_0(t)$ zostaje zakończony, jeżeli wartość $\max I[y(t)]$ dla $k+1$ jest mniejsza niż wartość $\max I[y(t)]$ dla k przełączeń.

4. STROJENIE MODELU UPROSZCZONEGO

Założmy podobną jak w przypadku modelu nieuproszczonego (2) matematyczną postać modelu uproszczonego:

$$\frac{Y_k(s)}{U(s)} = C + \frac{\sum A_k s^k}{\sum B_l s^l} \quad \text{dla } k \leq l; \quad l < m \quad (26)$$

oraz oznaczmy przez $k_u(t)$ jego impulsową funkcję przejścia. Strojenie modelu uproszczonego (rys.2) polega na znalezieniu takich współczynników A_k i B_l modelu (26), które na sygnał $u_0(t)$ (19) dają $\min \max I[y(t) - y_u(t)]$. Minimalizację można przeprowadzić za pomocą typowych procedur służących do wyznaczania ekstremum funkcji wielu zmiennych, natomiast wyznaczenie wartości $\min \max I[y(t) - y_u(t)]$ sprowadza się do wstawienia w miejsce $k(t)$ w zależnościach opisujących funkcję $f(t)$ różnicy $[k(t) - k_u(t)]$ i obliczenia sumy modułów tej funkcji w odnośnych przedziałach czasu.



Rys.2. Schemat blokowy układu do strojenia modelu uproszczonego

Fig. 2. Block diagram for the adjustment of the simplified model

4. WNIOSKI

Przedstawione podstawy teoretyczne umożliwiają wyznaczanie optymalnego uproszczonego modelu matematycznego oraz maksymalnego błędu, z jakim odwzorowuje on model nieuproszczony. Wyznaczony błąd odwzorowania obowiązuje dla dowolnych kształtów sygnałów wejściowych. Przedstawione rozważania dotyczą wybranego kryterium w postaci całki z kwadratu błędu. W zależności od potrzeb, w podobny do przedstawionego sposobu można analizować przypadki syntezy modeli uproszczonych w oparciu o inne kryteria błędów dynamicznych. Ograniczenia przedstawionej teorii wynikają z założenia liniowej postaci modeli i w konsekwencji ich zapisu za pomocą transmitancji operatorowych. Pomimo prostoty modeli, praktyczna aplikacja opracowanej teorii wymaga rozwiązywania skomplikowanych równań całkowych. Wygodnie jest w tym celu stosować gotowe programy matematyczne, np. MATHCAD 5+.

LITERATURA

1. Layer E., Gawędzki W.: Dynamika aparatury pomiarowej. Badania i ocena. PWN, Warszawa 1991.
2. Layer E.: Błędy dynamiczne aparatury pomiarowej. Metody ich wyznaczania dla celów wzorcowania. ZN PK. Wydanie jubileuszowe. Zeszyt nr 4. Wybrane problemy elektrotechniki i automatyki. Kraków 1995.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Zakrzewski

Abstract

On the basis of an integral-square-error criterion introduced here by way of example the article presents a certain method of synthesising simplified mathematical models, as well as, determining the errors which occur when simplified models map non-simplified ones. It has been assumed that the value of the mapping error must be valid for any shape of a dynamic signal. To achieve this purpose, special signals of the bang-bang type which maximise integral-square-output of a non-simplified model, have been applied. Switch-over moments of the bang-bang signals result from the solution of the integral equations derived in the article. The algorithm, which makes possible the solution of the above equations by means of numerical calculations, is analysed in details for one and three switches by way of example and can be easily generalised for any number of switches. The optimisation of the coefficients of a simplified model, with an arbitrarily chosen order of equation, is realised by computing the minimum of the integral-square-mapping-error affected by the previously determined bang-bang signal. The algorithm of such an optimisation is also presented in the article. The simplified mathematical model obtained on the basis of the presented method is an optimal one with respect to value of the assumed error criterion. This value of error criterion is valid independently of the dynamic signal shape.