ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997

Seria: ELEKTRYKA z. 157 Nr kol. 1357

Adam ŻUCHOWSKI
Politechnika Szczecińska

UPROSZCZONE MODELE ZACHOWAŃ NIELINIOWYCH TORÓW POMIAROWYCH W WARUNKACH WOLNOZMIENNYCH SYGNAŁÓW WEJŚCIOWYCH

Streszczenie. Odpowiedź liniowego układu dynamicznego na pobudzający sygnał może być przedstawiona w postaci splotu. Po rozwinięciu funkcji podcałkowej splotu na szereg Taylora dla wolnozmiennych i gładkich pobudzeń otrzymuje się uproszczony model dynamiki możliwy do wykorzystania w przypadku niektórych typów nieliniowych torów pomiarowych.

SIMPLIFIED MODELS DESCRIBING NON-LINEAR MEASURING SYSTEMS FOR SLOW VARIABLE INPUT SIGNALS

Summary. The response of linear, dynamic system caused by input excitation can be expressed in form of convolution. For slow variable, smooth input signal, after expanding integrand in Taylor's series the simplified model of dynamics has been obtained. The obtained model can be applied for description of certain classes of non-linear, measuring systems.

1. WPROWADZENIE

Dla liniowych, stacjonarnych układów dynamicznych o charakterystyce impulsowej $\mathbf{k(t)}$ odpowiedź na pobudzający sygnał $\mathbf{x(t)}$ może być przedstawiona w postaci splotu:

$$\mathbf{y(t) = y_0(t) + \int_0^t k(v)x(t-v)dv} \qquad (1)$$

przy tym $y_0(t)$ stanowi składową wywołaną niezerowymi warunkami początkowymi. Rozwijając funkcję $x(t-v)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu t oraz wprowadzając pojęcie momentów charakterystyki impulsowej:

$$m_i(t) = \int_0^t v^i k(v)dv \tag{2}$$

uzyskuje się zależności:

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} m_i(t) x^{(i)}(t) = y_0(t) + m_0(t) x\{t - t_0(t)\} + R(t) \tag{3}$$

gdzie:

$$t_0(t) = m_1(t) m_0(t)^{-1} \text{ oraz } R(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left\{ m_i(t) - m_0(t) t_0(t)^i \right\} x^{(i)}(t) \tag{4}$$

obowiązujące pod warunkiem zbieżności szeregu, a więc dla $x(t)$ wolnozmiennych i gładkich z wyjątkiem chwili $t=0$, lub dla krótkiego horyzontu czasowego (niewielkie wartości t), przy opóźnieniu spełniającym warunek $t_0(t) \leq t$.

Jeśli rozpatrywany układ dynamiczny jest torem pomiarowym, to zazwyczaj wolno przyjąć $y_0(t) = 0$, natomiast należy uwzględnić, że pomiar wykonywany jest z użyciem równania „skalowania" (podziałki), tj. związku:

$$x_{odczytane} = x_{od} = m_0(\infty)^{-1} y \tag{5}$$

obowiązującego dla każdej chwili czasu t. W warunkach, gdy możliwe jest pominięcie reszty $R(t)$, otrzymuje się więc:

$$\begin{gathered} x(t)_{od} = m_0(t) m_0(\infty)^{-1} x\{t - t_0(t)\} \text{ lub} \\ x\{t - t_0(t)\} = x\{t - t_0(t)\}_{od} + \frac{y(t) - m_0(t) m_0(\infty)^{-1} y\{t - t_0(t)\}}{m_0(t)}, \end{gathered} \tag{6}$$

co dowodzi, że w warunkach ustalonych $m_0(t) = m_0(\infty)$ dla wolnozmiennych i gładkich $x(t)$, błąd dynamiczny $D(t) = x(t) - x(t)_{od}$ jest spowodowany przede wszystkim opóźnieniem $t_0(t)$ wnoszonym przez tor.

Rozpatrzmy teraz zachowanie się torów pomiarowych o nieliniowości statycznej, a w szczególności trzy klasy modeli ich dynamiki.

2. TORY POMIAROWE O MODELU KLASY F, Φ

Załóżmy, że dynamikę toru opisuje równanie różniczkowe:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + F(y) = x(t)\Phi(y) \tag{7}$$

gdzie $F(y)$ i $\Phi(y)$ są ciągłymi i jednoznacznymi funkcjami argumentu y, a równanie skalowania posiada postać:

$$x(t)_{od} = F\{y(t)\}\Phi\{y(t)\}^{-1}. \tag{8}$$

Po prostym przekształceniu:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + y = y - F(y) + x(t)\Phi(y)$$

i uwzględnieniu związku (3) z pominięciem $y_0(t)$ oraz $R(t)$ otrzymuje się:

$$y(t) = m_0(t)\Big\{y[t - t_0(t)] - F\{y[t - t_0(t)]\} + x[t - t_0(t)]\Phi\{y[t - t_0(t)]\}\Big\}. \tag{9}$$

Ponieważ równanie skalowania (8) obowiązuje dla dowolnej chwili czasu, zatem:

$$x[t - t_0(t)]_{od} = F\{y[t - t_0(t)]\}\Phi\{y[t - t_0(t)]\}^{-1},$$

a wzór (9) daje się sprowadzić do postaci:

$$x[t - t_0(t)] = x[t - t_0(t)]_{od} + \frac{y(t) - m_0(t)y[t - t_0(t)]}{m_0(t)\Phi\{y[t - t_0(t)]\}} \tag{10}$$

lub

$$x[t - t_0(t)] = x[t - t_0(t)]_{od}\left\{1 + \frac{y(t) - m_0(t)y[t - t_0(t)]}{m_0(t)F\{y[t - t_0(t)]\}}\right\}. \tag{11}$$

Jeśli $\Phi(y)=1$ lub $F(y)=y$, związki (10) i (11) przechodzą we wzór (6), gdyż $m_0(\infty) = 1$, a model klasy **F** lub model klasy **Φ** nie różnią się pod względem postaci związku (6) od modelu liniowego i przyczyną główną błędu dynamicznego w warunkach ustalonych jest opóźnienie wnoszone przez tor.

Warto zwrócić uwagę na następujący fakt: Równanie (9) jest zwykle niestabilne i jako model wiążący wejście z wyjściem toru nie może być wykorzystywane. Mimo to równania (10) i (11) dzięki uwzględnieniu równania skalowania pozwalają w poprawny - choć przybliżony sposób oceniać błąd dynamiczny popełniany w czasie pomiaru, a ponieważ dla obserwatora dostępne są zarówno wartości $x[t-t_0(t)]_{od}$, jak i wartości $y(t)$ - istnieje dodatkowa możliwość odtwarzania stanu wejścia $x(t)$ dla sygnałów wolnozmiennych i gładkich (możliwość pominięcia $R(t)$), lub dla krótkiego horyzontu czasowego (krótkie czasy t).

Dodatkowe, proste przekształcenie pozwala zapisać związek (10) w równoważnej postaci:

$$D[t-t_0(t)] = \frac{1-m_0(t)}{m_0(t)} \frac{y(t)}{\Phi\{y[t-t_0(t)]\}} + \frac{y(t)-y[t-t_0(t)]}{\Phi\{y[t-t_0(t)]\}}, \tag{12}$$

z której wynika, że błąd $D(t) = x(t) - x(t)_{od}$ posiada dwie składowe: krótkotrwałą pochodzącą od procesu przejściowego, zależną od przebiegu $m_0(t)$, oraz długotrwałą, pochodzącą od opóźnienia sygnału wnoszonego przez tor.

3. TORY POMIAROWE O MODELU HAMMERSTEINA [1], [2]

Przyjmiemy, że dynamikę toru pomiarowego opisuje model Hammersteina:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + y = H\{x(t)\} \tag{13}$$

gdzie H jest funkcją ciągłą i jednoznaczną. W tym przypadku równanie skalowania posiada postać:

$$x(t)_{od} = H^{-1}\{y(t)\} \tag{14}$$

gdzie H^{-1} jest funkcją odwrotną względem funkcji H. Wykorzystując związek (3) z pominięciem $y_0(t)$ oraz $R(t)$ otrzyma się:

$$y(t) = m_0(t) H\{x[t-t_0(t)]\} \tag{15}$$

oraz

$$x(t)_{od} = H^{-1}\{m_0(t) H\{x[t-t_0(t)]\}\}. \tag{16}$$

Jeśli $H(.)$ jest funkcją spełniającą warunek $H(ab)=H(a)H(b)$, a więc np. funkcją potęgową, to wzór (16) daje się przekształcić do postaci:

$$x(t)_{od} = H^{-1}\{m_0(t)\}x[t - t_0(t)] = \frac{H^{-1}\{m_0(t)\}}{m_0(t)} m_0(t)x[t - t_0(t)]. \tag{17}$$

Ponieważ $m_0(t)x[t - t_0(t)]$ zgodnie ze wzorem (3) jest odpowiedzią liniowego układu na pobudzenie $x(t)$, więc:

$$\begin{gathered} A_n y^{(n)} + A_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + y = x(t), \text{ przy tym:} \\ x(t)_{od} = H^{-1}\{m_0(t)\}m_0(t)^{-1}y(t). \end{gathered} \tag{18}$$

Wynikają stąd dwa wnioski:

- Błąd dynamiczny jest spowodowany opóźnieniem wnoszonym przez tor pomiarowy.
- Model Hammersteina dla potęgowej funkcji $H(x)$ daje się przy wolnozmiennym i gładkim $x(t)$ zastąpić układem liniowym, parametrycznym (18) [4].

Przypuśćmy, że $H\{m_0(t)\} = m_0(t)^n$, oraz że dla dostatecznie długich t można przyjąć:

$$m_0(t) \cong 1 + E\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

gdzie E jest pewnym stałym współczynnikiem, a T - stałą czasową. Przyjmując ograniczenie $|m_0(t) - 1| \le d$ otrzymuje się tak zwany czas uspokojenia:

$$t_u \cong T\ln\frac{E}{d} \tag{19}$$

w sytuacji $n=1$, a więc dla liniowego modelu dynamiki toru. Ze wzoru (17) wynika jednak, że dla dowolnego n:

$$\begin{gathered} H^{-1}\{m_0(t)\} = \left\{1 + E\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} \cong 1 + \frac{E}{n}\exp\left(-\frac{t}{T}\right), \text{ skąd:} \\ t_{u,n} \cong T\ln\frac{E}{dn} = t_u - T\ln n. \end{gathered} \tag{20}$$

Dla $n>1$ proces przejściowy w torze pomiarowym ulega skróceniu, przy $n<1$ odpowiednio wydłużeniu proporcjonalnemu do stałej czasowej **T** decydującej o przebiegu charakterystyki $m_0(t)$ w fazie bliskiej ustalenia się jej wartości.

4. TORY POMIAROWE O MODELU ŁĄCZNYM

Załóżmy, że dynamikę toru opisuje równanie różniczkowe o postaci:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + F(y) = \Phi(y) H\{x(t)\}, \tag{21}$$

z której wynika równanie skalowania:

$$x(t)_{od} = H^{-1}\left\{\frac{F[y(t)]}{\Phi[y(t)]}\right\} \quad \text{lub} \quad \frac{F[y(t)]}{\Phi[y(t)]} = H\{x(t)_{od}\}. \tag{22}$$

Postępując identycznie jak w przypadku toru modelu klasy **F**, Φ i wykorzystując wzór (22), po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$H\{x[t - t_0(t)]\} - H\{x[t - t_0(t)]_{od}\} = \frac{y(t) - m_0(t) y[t - t_0(t)]}{m_0(t) \Phi[t - t_0(t)]}. \tag{23}$$

Wprawdzie także i w tym przypadku przyczyną błędu dynamicznego jest opóźnienie wnoszone przez tor, ale bezpośrednie wyznaczenie **D(t)** nie jest możliwe poza przypadkiem liniowej funkcji lub operacji **H(.)**. Podobne trudności pojawiają się przy rozpatrywaniu struktur złożonych z równoległych, a zwłaszcza szeregowych lub mieszanych połączeń składników reprezentujących omówione klasy dynamiki, co zdaje się zawężać zakres zastosowań do przedstawionych tu sytuacji najprostszych. Brakiem czytelnych, prostych rezultatów kończą się też próby uwzględnienia jakichkolwiek dalszych członów szeregu (3) zmniejszających resztę **R(t)**, a więc próby złagodzenia warunku wolnozmiennego i gładkiego **x(t)** poza chwilą $t \approx 0$.

LITERATURA

1. Billings S.A., Fakhouri S.Y.: Nonlinear System Identification Using the Hammerstein Model. Int. Systems Sci. 10 (5) 1979.

2. Leontaritis I.J., Billings S.A.: Input-Output Parametric Models for Non-linear Systems. Part I. J. Control 41 (2) 1985.
3. Żuchowski A.: O przechodzeniu wolnozmiennych sygnałów przez układy liniowe. PAK 2/1982.
4. Żuchowski A.: O pewnej własności modelu Hammersteina. Artykuł zapowiedziany w PAK 10/1996.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Jakubiec, prof. Pol. Śl.

Wpłynęło do Redakcji dnia 20 października 1996 r.

Abstract

The expression describing the response of dynamic, linear system caused by slow variable, smooth input signal can be expanded in Taylor's series of following form:

$$y(t) = \int_0^t k(v)x(t-v)dv = m_0(t)x\{t - t_0(t)\} + R(t),$$

where $m_i(t) = \int_0^t v^i k(v)dv$, $t_0(t) = m_1(t)m_0(t)^{-1}$, $k(t)$ is pulse response of system and $R(t)$ is the rest of series which can be usually neglected. The simplified model $y(t) = m_0(t)x[t - t_0(t)]$ can be easily applied for describing certain measuring systems with non-linear dynamics.

For systems „containing" static non-linearity whose dynamic properties can be described by the following differential equation:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + F(y) = x(t)\Phi(y)$$

after introducing so-called scale equation: $x_{od} = F(y)\Phi(y)^{-1}$, one obtains relation:

$$x[t - t_0(t)] = x[t - t_0(t)]_{od} + \frac{y(t) - m_0(t)y[t - t_0(t)]}{m_0(t)\Phi\{y[t - t_0(t)]\}}$$

The above relation does not depend on **F(y)**. Thus, the dynamic error can be treated as a result of the system delay.

If measuring system dynamics is described by Hammerstein's model:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + y = H\{x(t)\}, \quad y(t) = H^{-1}\{y_1(t)\}$$

then approximate, „substitutional" relations can be obtained:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{(1)} + y = x(t), \quad y(t) = H^{-1}\{m_0(t)\} m_0(t)^{-1} Y(t), \quad x(t)_{od} = y$$

The above relations prove that the dynamic error of the system under consideration is „generated by the system delay. For either slow variable **x(t)** or any **x(t)** considered for short time horizont there are possibilities of correction of measurement results by using the models presented in the paper.