ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968
Seria: ENERGETYKA z. 28 Nr kol. 210

WITOLD OKOŁO-KUŁAK
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

TRÓJCZYNNIKOWY REKUPERATOR O ZRÓWNOWAŻONYCH POJEMNOŚCIACH CIEPLNYCH STRUMIENI CZYNNIKÓW

Streszczenie. Tematem pracy jest trójczynnikowy rekuperator ciepła, w którym suma pojemności cieplnych strumieni czynników jest równa zeru. Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy przepływ ciepła odbywa się pomiędzy czynnikiem będącym w obiegu, przy tym struga ogrzewana rozdziela się na dwa strumienie o zróżnicowanych temperaturach dolotowych. W artykule przytoczono rozwiązanie analityczne tego problemu oraz podano przykład liczbowy rozwiązany przy zastosowaniu kryteriów podobieństwa, sympleksów oraz zespołów mieszanych, tj. wielkości złożonych z kombinacji kryteriów podobieństwa i wymiarowych parametrów.

1. Wprowadzenie

Teoria trójczynnikowych rekuperatorów jest jeszcze stosunkowo mało opracowana. Teoria podobieństwa w odniesieniu do tych urządzeń została wprowadzona dopiero w ostatnich latach [7], [8], [9], [10]. Kryteria podobieństwa trójczynnikowych rekuperatorów łatwo ustalić po zastosowaniu tzw. metody równań ramowych [12] do równań bilansu energetycznego [6](str. 16, 22, 23):

$$(K_{i-j}) = \frac{k_{i-j} \cdot A_{i-j}}{w_i} \qquad i,j = 1,2,3\,, \quad i \neq j \tag{1.1}$$

gdzie:

k_{i-j} - współczynnik przenikania ciepła pomiędzy czynnikami "i" oraz "j",

A_{i-j} - powierzchnia ogrzewalna pomiędzy czynnikami "i" oraz "j",

w_i – pojemność cieplna strumienia i-tego czynnika,

(K_{i-j}) – kryterium podobieństwa określające stosunek ciepła przepływającego przez przenikanie (pomiędzy czynnikami i-j) do energii strumienia czynnika "i"-tego.

W przypadku, gdy rekuperator jest zbudowany z rur o średnicy zewnętrznej d, długości l i współczynniku przenikania $k_{r(i-j)}$, to zachodzi związek

$$k_{i-j}\, A_{i-j} = \frac{k_{r(i-j)}}{d}\, \pi d\, l = k_{r(i-j)}\, \pi\, l\, . \tag{1.2}$$

Równania bilansu dostarczają sześciu kryteriów podobieństwa, z których pięć jest niezależnych [7] . Liczbę kryteriów można ograniczyć do trzech, jeżeli się wprowadzi 2 sympleksy pojemnościowe w_i/w_j; w_i/w_k. Pozostałe kryteria podobieństwa można w razie potrzeby obliczyć z zależności wynikającej z definicyjnego równania (1:1):

$$(K_{i-j}) = (K_{j-i})\, \frac{w_j}{w_i}\, . \tag{1.3}$$

Ponadto do pełnego określenia podobieństwa potrzebne są jeszcze sympleksy temperaturowe, tj. stosunki różnic temperatury. W miejsce tych wielkości dogodniej operować samymi różnicami temperatury θ_{i-j}, θ'_{i-j}, gdzie θ_{i-j} oznacza różnicę temperatur pomiędzy czynnikami "i" oraz "j" w przekroju początkowym (tzn. dla $A = 0$), natomiast θ'_{i-j} oznacza analogiczną różnicę w przekroju końcowym (tj. dla $A = A_o$). Rys. 1 podaje zestawienie tych wielkości dla rekuperatora współprądowego.

W konkretnych obliczeniach dogodnie jest posługiwać się tzw. zespołami mieszanymi $(K\theta)_{i-j}$, które definiuje się jako

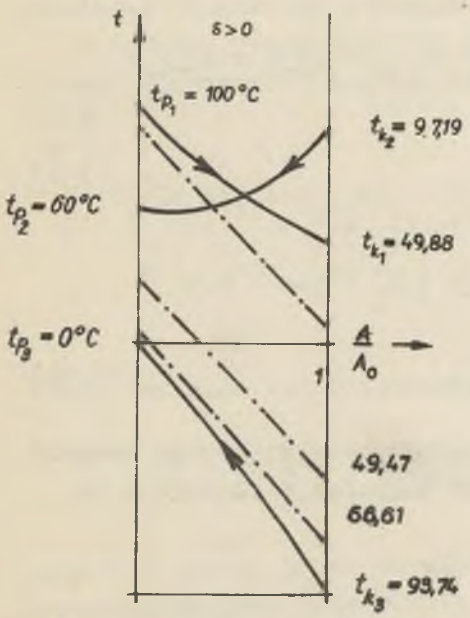
$$(K\theta)_{i-j} = (K_{i-j})\, \theta_{i-j}\, . \tag{1.4}$$

Będzie tu omawiany rekuperator o zrównoważonej pojemności cieplnej strumieni, którego cechę stanowi

$$\sum_{i=1}^{i=3} w_i = 0 \tag{1.5}$$

lub po podzieleniu kolejno przez w_1, w_2, w_3 warunek sympleksów

$$\frac{w_i}{w_j} + \frac{w_k}{w_j} = -1 . \tag{1.6}$$



Rys. 1. Przebieg temperatur oraz oznaczenia dla rekuperatora współprądowego

Należy tu podkreślić, że pojemności cieplne w_i traktujemy algebraicznie (por. [6]). Wielkości te mają znak dodatni, gdy kierunek przepływu czynnika jest zgodny z obranym zwrotem współrzędnej A (lub $\frac{A}{A_0}$), w przeciwnym przypadku mają one wartość ujemną. Dalszą cechą "zrównoważonego" rekuperatora będzie zależność wynikająca z równań (1.1), (1.3) i (1.7)

$$\frac{(K_{i-j})}{(K_{j-i})} + \frac{(K_{i-k})}{(K_{k-i})} = -1 . \tag{1.7}$$

Ogólna zależność, obowiązująca dla wszystkich odmian rekuperatorów trójczynnikowych ma charakter cykliczny [7]

$$(K_{1-2})(K_{2-3})(K_{3-1}) = (K_{1-3})(K_{3-2})(K_{2-1}) . \qquad (1.8)$$

Zależność ta oddaje usługi przy kontroli we wstępnej fazie obliczeń kryteriów (K_{i-j}).

W równaniu różniczkowym określającym przepływ ciepła w rozpatrywanym rekuperatorze występują wartości stałe s oraz d określone wzorami

$$A_o\, s = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} (K_{i-j}) = -\frac{1}{2} (K_{1-2} + K_{2-3} + K_{3-1} +$$

$$+ K_{1-3} + K_{3-2} + K_{2-1}) \qquad (1.9)$$

$$A_o^2\, d = (t_{p1} + \frac{w_2}{w_1} t_{p2} + \frac{w_3}{w_1} t_{p3}) \left[\frac{w_1}{w_3} (K_{1-2})(K_{2-3}) + \right.$$

$$\left. + (K_{2-3})(K_{3-1}) + (K_{3-1})(K_{1-2}) \frac{w_1}{w_2} \right] . \qquad (1.10)$$

Przy tym wielkość $(A_o s)$ ma charakter bezwymiarowego zespołu kryterialnego, natomiast $A_o^2 d$ jest zespołem mieszanym i ma wymiar stopnia (deg).

Wzór (1.9) wynika z zależności

$$s = -\frac{1}{2} \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3} \right) \qquad (1.11)$$

słusznej w ogólnym przypadku trójczynnikowego rekuperatora w dowolnym kierunku przepływu czynników (por. [6], str. 23), natomiast $A_o^2 d$ określone wzorem (1.10) jest granicą wyrażenia

$$A_o^2 \lim_{\sum w_i \to 0} \frac{\sum w_i}{\pi w_i} k_c^2 (t_i - \vartheta) = A_o^2\, d , \qquad (1.12)$$

gdzie:

$$k_c^2 = k_{1-2}\,k_{2-3} + k_{2-3}\,k_{1-3} + k_{1-3}\,k_{1-2} \tag{1.13}$$

$$\vartheta = \frac{\sum t_i\,w_i}{\sum w_i} . \tag{1.14}$$

Wielkość ϑ jest tzw. temperaturą wyrównania. W rozpatrywanym przypadku, tj. gdy ma miejsce zależność (1.5), $\vartheta \to \infty$ i temperatura wyrównania traci sens fizyczny. Jak łatwo stwierdzić wielkość ta zostaje z równań różniczkowych wyeliminowana.

W ogólnym przypadku (tj. gdy $\sum w_i \neq 0$) układ równań różniczkowych ujmujących przebieg temperatury t_i ma następującą postać

$$- w_i\,dt_i = k_{i-j}(t_i - t_j)\,dA + k_{i-k}(t_i - t_k)\,dA \tag{1.15}$$

$$i,j,k = 1,2,3$$
$$i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k .$$

Układ ten może być sprowadzony do formy

$$t_i'' - 2\,s\,t_i' + b\,t_i = 0 \qquad i = 1,2,3 , \tag{1.16}$$

gdzie: s oraz b są to współczynniki stałe, natomiast t_i oznacza nadwyżkę temperatury dowolnego z trzech czynników ponad poziomem odniesienia ϑ.

Należy podkreślić, że wielkość A_o jest to umownie obrana powierzchnia porównawcza całkowita. Może nią być zarówno powierzchnia zewnętrzna lub nawet wewnętrzna dowolnej z rur. Najdogodniej jednak przyjąć za A_o powierzchnię zewnętrzną rury o większej średnicy, ponieważ ta właśnie powierzchnia jest łatwo dostępna. Rzecz prosta wszystkie współczynniki przenikania k_{i-j} są przeliczone w odniesieniu do powierzchni A_o. W równaniach (1.11), (1.12), (1.13) oraz (1.15) i dalszych występują więc zredukowane współczynniki k_{i-j} w odniesieniu do powierzchni porównawczej.

Powierzchnia porównawcza spełnia rolę wspólnej zmiennej niezależnej dla każdej z temperatur t_i, t_j, t_k. Wielkość dA w układzie równań(1.15) są odniesione do powierzchni porównawczej.

2. Układ równań różniczkowych i rozwiązanie

W rozpatrywanym przypadku tzn. dla warunku (1.5), trzeci wyraz równania (1.16) przybiera postać nieoznaczoną. Po usunięciu nieoznaczoności w miejsce równania (1.16) otrzymamy ([6], str. 28)

$$t_i'' - 2\,s\,t_i' - d = 0 \tag{2.1}$$

przy tym wartość d jest określona wzorem (1.10). Równanie (2.1) łatwo rozwiązać wprowadzając oznaczenie

$$t_i' + \frac{d}{2s} = u\,. \tag{2.2}$$

Całką ogólną równania (2.1) jest

$$t_i = C_{1,i}\exp(2\,As) - \frac{d}{2s}A + C_{2,i}\,. \tag{2.3}$$

Stałe całkowania $C_{1,i}$ oraz $C_{2,i}$ można wyznaczyć z warunków brzegowych (dla A = 0)

$$C_{1,i} = \frac{A_o^2 d}{4s^2 A_o^2} - \frac{1}{2A_o s}\sum(K\Theta)_{i-j} \tag{2.4}$$

$$C_{2,i} = t_{pi} + \frac{1}{2A_o s}\sum(K\Theta)_{i-j} - \frac{A_o^2 d}{4s^2\,A_o^2}\,. \tag{2.5}$$

Równania (2.3), (2.4) i (2.5) umożliwiają określenie temperatur końcowych $t_{k,i}$, gdy znane są początkowe $t_{p,i}$ oraz pozostałe potrzebne wielkości.

Przykład 1. Znane są następujące wielkości: $t_{p1} = 100^oC$, $t_{p2} = 60^oC$, $t_{p3} = 0^oC$, $A_o = 1\ m^2$, $(K_{1-2}) = 0,4$; $(K_{1-3}) = 0,6$; $(K_{2-3}) = -0,2$; $(K_{2-1}) = -1,2$; $(K_{3-1}) = -0,9$; $(K_{3-2}) = -0,1$; $\frac{w_1}{w_2} = -3$; $\frac{w_1}{w_3} = -1,5$; $\frac{w_2}{w_3} = 0,5$. Należy obliczyć temperatury t_{ki}.

Rozwiązanie

Rozpoczynamy od weryfikacji danych przy użyciu równań (1.3) i (1.8). W przypadku, gdyby znane były tylko wartości trzech kryteriów, pozostałe można obliczyć z tych samych równań (1.3) i (1.8).

W dalszym ciągu staramy się sklasyfikować typ rekuperatora. W tym celu obliczamy sumę sympleksów

$$\frac{w_1}{w_3} + \frac{w_2}{w_3} = -1,5 + 0,5 = -1. \qquad z(1.6)$$

Jak widzimy warunek sympleksów (1.6) jest spełniony, zatem mamy do czynienia z rekuperatorem o zrównoważonych pojemnościach cieplnych strumieni czynników. Należy zatem stosować równania (2.3), (2.4) i (2.5).

Początkowo obliczamy wielkości pomocnicze A_os, A_o^2d oraz $\frac{A_o^2d}{A_os}$

$$A_os = -\frac{1}{2}(0,4 + 0,6 - 0,2 - 1,2 - 0,9 - 0,1) = +0,7 \qquad z(1.9)$$

$$A_o^2 d = (100 - \frac{1}{3}60) - 1{,}5(-0{,}08) + 0{,}18 - 0{,}36(-3) = 110{,}4$$
z (1.10)

$$\frac{A_o^2 d}{2\ A_{os}} = \frac{110{,}4}{2.0{,}7} = 78{,}857; \qquad \frac{A_o^2 d}{4s^2 A_o^2} = \frac{110{,}4}{4.0{,}7^2} = 56{,}32 \text{ deg}.$$

Dalej liczymy zespoły mieszane $(K\Theta)_{i-j}$

$$(K\Theta)_{1-i} = 0{,}4.40 + 0{,}6.100 = 76 \text{ deg}$$

$$(K\Theta)_{2-i} = (-1{,}2)(-40) - 0{,}2.60 = 36 \text{ deg}$$ z (1.4)

$$(K\Theta)_{3-i} = (-0{,}9)(-100) - 0{,}1(-60) = 96 \text{ deg}$$

oraz stałe całkowania

$$C_{1,1} = 56{,}32 - \frac{76}{1{,}4} = 2{,}03 \text{ deg}$$ z (2.4)

$$C_{2,1} = 100 + \frac{76}{1{,}4} - 56{,}32 = 97{,}97 \text{ deg}$$ z (2.5)

$$C_{1,2} = 56{,}32 - \frac{36}{1{,}4} = 30{,}61 \text{ deg}$$ z (2.4)

$$C_{2,2} = 60 + \frac{36}{1{,}4} - 56{,}32 = 29{,}39 \text{ deg}$$ z (2.5)

$$C_{1,3} = 56{,}32 - \frac{96}{1{,}4} = -12{,}25 \text{ deg}$$ z (2.4)

$$C_{2,3} = 0 + \frac{96}{1{,}4} - 56{,}32 = +12{,}25 \text{ deg}.$$ z (2.5)

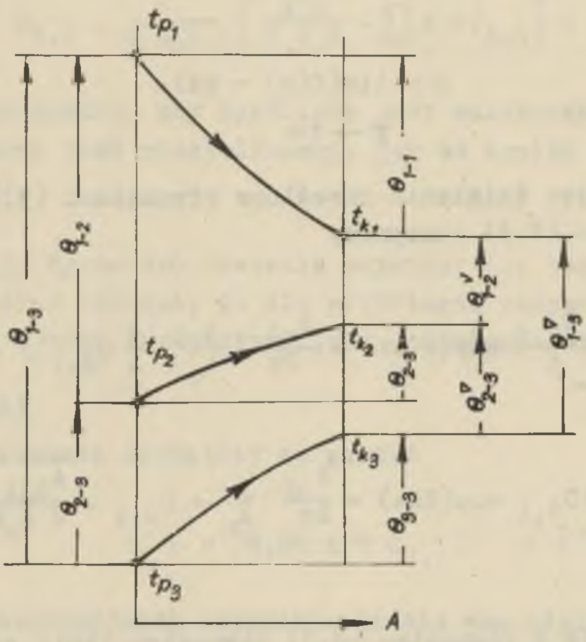
Znając stałe całkowania można obliczyć temperatury końcowe $t_{k,i}$ dla $(A = A_o = 1)$

$$t_{k,1} = 2{,}03 \exp(2.0{,}7.1) - 78{,}86 + 97{,}97 = 27{,}34^oC$$

$$t_{k,2} = 30,61.4,055 - 78,86 + 29,39 = 74,65^{o}C$$

$$t_{k,3} = -12,25.4,055 - 78,86 + 12,25 = 116,28^{o}C. \qquad z\ (2.3)$$

Przebieg temperatur przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Przebieg temperatur oraz wartości temperatur końcowych dla rekuperatora o zrównoważonych pojemnościach cieplnych strumieni czynników

3. Asymptoty przebiegu temperatur

Charakter krzywych przebiegu temperatur określony równaniami (2.3) wskazuje, żw również i rozpatrywana odmiana rekuperatora, podobnie jak to jest dla zwykłego współ- lub przeciwprądu charakteryzuje się asymptotycznym przebiegiem temperatur. Aby wyznaczyć te asymptoty, zastosujemy znaną w matematyce metodę:

Jeżeli równaniem asymptoty jest prosta

$$y = mx + n \tag{3.1}$$

to

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{3.2}$$

oraz

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)\,. \tag{3.3}$$

Przeprowadzając działania określone równaniami (3.2) i (3.3) w stosunku do (2.3) otrzymamy

$$m = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{C_{1,i}}{A} \exp(2\,As) - \frac{A_{od}}{2s} \cdot \frac{1}{A_o} + \frac{1}{A}\, C_{2,i}\right) = - \frac{d}{2\,A_o s} \tag{3.3}$$

$$n = \lim_{A\to\infty} \left(C_{1,i} \exp(2As) - \frac{A_{od}}{2s}\,\frac{A}{A_o} + C_{2,i} + \frac{A_{od}A}{2\,A_o s}\right) = C_{2,i}\,. \tag{3.4}$$

Zatem, zgodnie z równaniem (3.1) równaniem linii asymptotycznej jest

$$t_i = - \frac{A_{od}}{2s}\,\frac{A}{A_o} + C_{2,i}\,. \tag{3.5}$$

Jak widzimy asymptoty są liniami skośnymi równoległymi, przy tym

$$t_{pi} = C_{2,i}\,. \tag{3.6}$$

Na rys. 2 asymptoty oznaczono liniami przerywanymi.

Jeżeli równanie (3.6) skojarzymy z (2.5) otrzymamy zależność

$$\sum (K\Theta)_{i-j} = \frac{A_o^2 d}{2 A_o s} . \qquad (3.7)$$

Równanie (3.7) wstawione do (2.4) daje relację:

$$C_{1,i} = \frac{1}{2 A_o s} \left[\frac{A^2 d}{2 A_o s} - \sum (K\Theta)_{i-j} \right] = 0 . \qquad (3.8)$$

Tak więc w przypadku, gdy spełniona jest zależność (3.7) przebieg temperatur jest prostoliniowy, jak to wynika z równań (2.3) i (3.8).

Przykład 2. Wyznaczyć równania asymptot dla temperatur z przykładu 1 oraz wykazać, że dla przebiegów temperatur pokrywających się z tymi asymptotami jest spełniona zależność (3.7)

Rozwiązanie

Ogólnie równanie asymptoty ma postać

$$t_i = - 78{,}86\ A + C_{2,i} . \qquad z(3{,}5)$$

Zatem dla poszczególnych czynników będzie ono miało formę

$$\left.\begin{array}{ll} t_1 = - 78{,}86\ A + 97{,}97; & t_{p1} = 97{,}97 \\ t_2 = - 78{,}86\ A + 29{,}39; & t_{p2} = 29{,}39 \\ t_3 = - 78{,}86\ A + 12{,}25; & t_{p3} = 12{,}25 \end{array}\right\} \text{dla } A = 0. \qquad z\ (3.5)$$

Aby wykazać, że jest spełniona zależność (3.7) obliczamy różnice temperatur Θ_{i-j}:

$$\Theta_{1-2} = t_{p1} - t_{p2} = 97,97 - 29,39 = 68,58 \text{ deg}$$

$$\Theta_{1-3} = t_{p1} = t_{p3} = 97,97 - 12,25 = 85,72 \text{ deg}$$

$$\Theta_{2-3} = t_{p2} - t_{p3} = 29,39 - 12,25 = 17,14 \text{ deg} .$$

W dalszym ciągu obliczamy zespoły mieszane $\sum(K\Theta)_{i-j}$

$$\sum_{\substack{i=1\\ j=2;3}} (K\Theta)_{i-j} = 0,4.68,48 + 0,6.85,72 = 78,82 \text{ deg}$$

$$\sum_{\substack{i=2\\ j=1;3}} (K\Theta)_{i-j} = - 0,2.17,14 - 1,2(-68,58) = 78,86 \text{ deg}$$

$$\sum_{\substack{i=3\\ j=1;2}} (K\Theta)_{i-j} =-0,9(-85,72) -0,1(-17,14) = 78,85 \text{ deg}.$$

Ponieważ poprzednio obliczone wyrażenie

$$\frac{A_o^2\, d}{2A_o s} = 78,857 \text{ deg}$$

zatem zależność (3.7) jest spełniona z dokładnością 0,03 deg, co odpowiada

$$\frac{0,03.100}{78,86} \, 0,04\%.$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy dla asymptotycznego przebiegu temperatur, wyrażenie $A^2_o d$ nie uległo czasem zmianie. Przekształcając wzór (1.10) przy użyciu warunku sympleksów (1.6) otrzymamy

$$A_o^2 d = \delta\left(\theta_{1-2} - \frac{w_3}{w_1}\theta_{2-3}\right) = \delta\left(\theta_{1-3} + \frac{w_2}{w_1}\theta_{2-3}\right) =$$

$$= -\delta\left(\frac{w_3}{w_1}\theta_{1-3} + \frac{w_2}{w_1}\theta_{1-2}\right), \tag{3.9}$$

gdzie:

$$\delta = \frac{w_1}{w_3}(K_{1-2})(K_{2-3}) + (K_{2-3})(K_{3-1}) + (K_{3-1})(K_{1-2})\frac{w_1}{w_2}. \tag{3.10}$$

Podstawiając wartości θ_{i-j} z przykładu 2 do wzorów (3.9) oraz (3.10) można łatwo stwierdzić, że istotnie wyrażenie $A_o^2 d$ nie uległo zmianie.

4. Przypadek liniowego przebiegu temperatur

Gdy jedna ze stałych $C_{1,i}$ przyjmuje wartość zerową, wówczas temperatura t_i staje się liniową funkcją względem powierzchni A. Wynika to z równania (2.3). W równaniu tym znika bowiem wyrażenie wykładnicze exp(2 As). Zachodzi teraz pytanie czy możliwym jest, aby tylko jedna z temperatur, np. $t_1(i=1)$, miała przebieg liniowy, podczas gdy pozostałe, wykładniczy. Aby tę kwestię rozstrzygnąć załóżmy

$$C_{1,1} = \frac{d}{4s^2} - \frac{1}{2A_{os}} \sum_{j=,2;3} (K\,\theta)_{1-j} = 0 \tag{4.1}$$

lub inaczej

$$\sum_{j=2;3} (K\Theta)_{1-j} = \frac{A_o^2\, d}{2\, A_{os}} \,. \tag{4.2}$$

Po prawej stronie ostatniego równania wyraz $A_o^2 d$ jest funkcją różnic temperatur Θ_{i-j}, jak to łatwo wyprowadzić z zależności (1.10) uwzględniając warunek sympleksów (1.6):

$$A_o^2 d = \delta(\Theta_{1-2} - \frac{w_3}{w_1}\Theta_{2-3}) = \delta(\Theta_{1-3} + \frac{w_2}{w_1}\Theta_{2-3}) =$$

$$= -\delta(\frac{w_3}{w_1}\Theta_{1-3} + \frac{w_2}{w_1}\Theta_{1-2}) \,, \tag{4.3}$$

gdzie:

$$\delta = \frac{w_1}{w_3}(K_{1-2})(K_{2-3}) + (K_{2-3})(K_{3-1}) + (K_{3-1})(K_{1-2})\frac{w_1}{w_2} \,. \tag{4.4}$$

Również i wyraz $2\, A_o s$ w równaniu (4.2) jest zgodnie z równaniem (1.9) funkcją sześciu kryteriów

$$2\, A_o s = -\sum_{i=1}^{i=3} (K_{i-j}) \,. \tag{4.5}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\zeta = \frac{\delta}{2\, A_o s} \tag{4.6}$$

oraz wykorzystując zależność (4.3) można założenie (4.2) sprowadzić do postaci

$$\left[(K_{1-2}) + \zeta\frac{W_2}{W_1}\right]\Theta_{1-2} + \left[(K_{1-3}) + \zeta\frac{W_3}{W_1}\right]\Theta_{1-3} = 0 . \qquad (4.7)$$

Postępując w analogiczny sposób w stosunku do stałej $C_{1,2}$ otrzymamy

$$\left[-(K_{2-1})-(K_{2-3})+\zeta(1+\frac{W_3}{W_1})\right]\Theta_{1-2} + \left[(K_{2-3}) + \zeta\frac{W_3}{W_1}\right]\Theta_{1-3} =$$

$$= 2A_0 s\, C_{1,2} . \qquad (4.8)$$

Jeżeli zatem, wychodząc z równania (4.7) uda się wykazać, że lewa strona równania (4.8) jest równa zeru, to i przebieg temperatury czynnika drugiego będzie też liniowy względem powierzchni ogrzewalnej. Innymi słowy: stosunek współczynników przy Θ_{1-2} w obu ostatnich równaniach musiałby być równy stosunkowi współczynników przy Θ_{1-3}. Należałoby zatem określić wartość wyrażenia

$$\left[(K_{1-2}) + \zeta\frac{W_2}{W_1}\right]\left[(K_{2-3}) + \zeta\frac{W_3}{W_1}\right] + \left[(K_{1-3}) + \zeta\frac{W_3}{W_1}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[(K_{2-1}) + (K_{2-3}) + \zeta(1 + \frac{W_3}{W_1})\right] = x . \qquad (4.8)$$

Jeżeli $x = 0$, to przebieg temperatury drugiego czynnika jest też liniowy. Rozwijając lewą stronę równania (4.8) łatwo zauważyć, że będą tu trzy grupy wyrazów: 1) grupa nie zawierająca wielkości ζ, 2) grupa zawierająca ζ i 3) grupa zawierająca ζ^2. Zaczniemy od tej ostatniej. Wynosi ona:

$$\left[\frac{w_2}{w_1}\,\frac{w_3}{w_1} + \frac{w_3}{w_1}\left(1 + \frac{w_3}{w_1}\right)\right]\zeta^2 = \frac{w_3}{w_1}\left(\frac{w_2}{w_1} + \frac{w_3}{w_1} + 1\right)\zeta^2 = 0 \qquad (4.9)$$

zgodnie z warunkiem sympleksów (1.6). Żadna z pozostałych grup nie zeruje się, należy więc je rozpatrywać łącznie. Aby uniknąć niezwykle żmudnych i długotrwałych przekształceń, zastosujemy w dalszym ciągu skrócony zapis za pomocą tzw. indeksów grupowych drugiego rodzaju $\rfloor|$ które należy rozumieć następująco:

$$K \left\rfloor\begin{matrix} i-j, & j-k \\ i-k, & j-i \\ i-k, & j-k \end{matrix}\right| = (K_{i-j})(K_{j-k}) + (K_{i-k})(K_{j-i}) + (K_{i-k})(K_{j-k}). \qquad (4.10)$$

Jak wynika z równania (4.10) wiersze w indeksie grupowym drugiego rodzaju można dowolnie przestawiać, zarówno jak i w poszczególnym wierszu można zmieniać porządek kolejnych grup np. indeksy w pierwszym wierszu można zmieniać na $j-k$, $i-j$; dzięki bowiem prawu przemienności wartość zespołu $K\rfloor|$ nie ulega zmianie.

Przekształcając w dalszym ciągu lewą stronę równania (4.8), po wykorzystaniu równań (4.4), (4.5), (4,6), (4.9) i stosując skrócony zapis (4.10) dochodzimy do zależności

$$x = K \left\rfloor\begin{matrix} 1-2, & 2-3 \\ 1-3, & 2-1 \\ 1-3, & 2-3 \end{matrix}\right| \sum_{i=1}^{6} K_i + \left[\frac{w_3\, w_3}{w_1\, w_2}(K_{1-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{w_2}{w_1}(K_{1-2}) + (K_{2-3})\right] \frac{w_1}{w_3}\, K \left\rfloor\begin{matrix} 1-2, & 2-3 \\ 2-3, & 1-3 \\ 1-3, & 2-1 \end{matrix}\right| . \qquad (4.11)$$

Łatwo zauważyć, że oba zespoły kryterialne drugiego rodzaju są identyczne. Po dalszym uproszczeniu i trzykrotnym zastosowaniu warunku sympleksów otrzymamy

$$x = K \begin{vmatrix} 1-2, & 2-3 \\ 1-3, & 2-1 \\ 1-3, & 2-3 \end{vmatrix} \left[\sum_{i=1}^{6}(K_i) - \sum_{i=1}^{6}(K_i) \right] = 0 . \qquad (4.12)$$

Oznacza to, że przebieg temperatury czynnika drugiego jest również liniowy. Nie trzeba dalej wyjaśniać, że również i trzeci czynnik ma także przebieg temperatury liniowy.

Pozostaje jeszcze określić warunki konieczne na to, aby przebieg temperatur był prostoliniowy. Wstawiając równania (4.6), (4.4) i (4.3) do równania (4.2) otrzymamy

$$\frac{\theta_{1-2}}{\theta_{1-3}} = - \frac{(K_{1-3}) + \zeta \frac{w_3}{w_1}}{(K_{1-2}) + \zeta \frac{w_2}{w_1}} . \qquad (4.13)$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający, aby przebieg temperatur był liniowy.

<u>Przykład 3</u>

Dobrać tak temperaturę t_{p2} w przykładzie 1, aby przebiegi temperatur były liniowe.

<u>Rozwiązanie</u>

Aby obliczyć bezwymiarową wielkość ζ określamy najpierw δ:

δ= (-1,5.0,4(-0,2) - 0,2(-0,9)- 0,9.0,4(-3) = 1,38

z równ. (4.4)

W przykładzie 1 wielkość $A_o s$ wynosiła + 0,7 zatem

$$\zeta = \frac{1,38}{2.0,7} = \frac{1.4 - 0.02}{1,4} = 1 - \frac{1}{70} . \qquad z\ (4.6)$$

Zatem stosunek

$$\frac{\theta_{1-2}}{\theta_{1-3}} = - \frac{0,6 - \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{70})}{0,4 - \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{70})} = 0,8. \qquad z\ (4.13)$$

Zatem

$$\theta_{1-2} = 0,8.100 = 80\ deg$$

oraz

$$\theta_{2-3} = \theta_{1-3} - \theta_{1-2} = 100 - 80 = 20\ deg$$

natomiast $t_{p2} = t_{p3} + {}_{2-3} = 20\ ^oC$.

Przeprowadzamy kontrolę. Początkowo liczymy

$$A_o^2\ d = 1,38(80 + \frac{2}{3} . 20) = 128,8\ deg \qquad z\ (4.4)$$

i dalej

$$\frac{A_o^2\ d}{2\ A_o s} = \frac{128,8}{1,4} = 92\ deg .$$

Pozostaje już tylko sprawdzić zależność (4.2)

$$\sum_{j=2;3} (K\,\theta)_{i-j} = 0,4.80 + 0,6.100 = 92\ deg \qquad z\ (4.2)$$

$$\sum_{j=1;3} (K\,\theta)_{i-j} = - 1,2(- 80) - 0,2(20) = 92\ deg \qquad z\ (4.2)$$

$$\sum_{j=1;2} (K\,\theta)_{i-j} = - 0,9(-100) - 0,1(- 20) = 92\ deg. \qquad z\ (4.2)$$

Zatem wszystkie czynniki mają przebieg temperatur liniowy. Równania ich są następujące

$$t_1 = -92\frac{A}{A_o} + 100$$

$$t_2 = -92\frac{A}{A_o} = 20$$

$$t_3 = -92\frac{A}{A_o}.$$

Są to oczywiście linie równcległe.

5. Zakończenie

W pracy podano teorię trójczynnikowego rekuperatora o zrównoważonych pojemnościach cieplnych czynników ($\sum_1^3 w_i = 0$). Omawiana odmiana nie posiada tzw. temperatury wyrównania ϑ i dzięki temu równanie różniczkowe opisujące elementarne zależności bilansu energetycznego ma inną postać niż w przypadku ogólnym tj. gdy $\sum_1^3 w_i \neq 0$. Rozwiązanie wskazuje, że przebieg temperatur ma formę funkcji wykładniczej, nałożonej na prostą skośną względem układu (t_i, A).

Krzywe przebiegu temperatur posiadają asymptoty również skośne względem układu.

Rozpatrzono również szczególny przypadek tego rodzaju rekuperatora, gdy jedna z temperatur ma przebieg dokładnie liniowy. Podano dowód, że w tym przypadku wszystkie przebiegi temperatur są liniowe, a linie te są do siebie równoległe.

Na podkreślenie zasługuje stosowanie na szeroką skalę teorii podobieństwa, nawet przy opracowaniu dowodu. Dzięki temu wnioski mają charakter ogólny i mogą być wykorzystane w praktyce. Przykłady liczbowe podane w tekście są wymownym dowodem tego.

Na zakończenie warto nadmienić, że rekuperator omawiany w tekście stanowi odmianę łączącą zwykły typ rekuperatora trójczynnikowego, z tzw. wysokosprawnym, o liniowym przebiegu temperatur.

LITERATURA

[1] OCHĘDUSZKO S.: Teoria maszyn cieplnych, cz. III, PWT,Warszawa, 1955.

[2] HAUSEN H.: Warmeubergang in Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom, Berlin, 1950.

[3] HOBLER T.: Ruch ciepła i wymienniki.Warszawa, 1959.

[4] HURD N.L.: Ind. Eng. Chem. str. 1266, 1946.

[5] KIIJEW G.M., CZYRKIN W.S.: Kratkij kurs tiepłopieredaczi, Moskwa, 1941.

[6] OKOŁO-KUŁAK W.: "Trójczynnikowe wymienniki ciepła, ZNPS, Mechanika, nr 1, 1954.

[7] OKOŁO-KUŁAK W.: Podobieństwo termodynamiczne trójczynnikowych nagrzewnic powietrza, ZNPS, Energetyka, nr 25, 1967.

[8] OKOŁO-KUŁAK W.: Sprawność trójczynnikowego przeciwprądowego rekuperatora (w opracowaniu).

[9] OKOŁO-KUŁAK W.: Cieplna problematyka konstrukcji rekuperatorów Fielda (w opracowaniu).

[10] OKOŁO-KUŁAK W.: Równowartość trójstrumieniowych rekuperatorów ciepła (w druku), ZNPS, Energetyka nr 28.

[11] OKOŁO-KUŁAK W.: Trójczynnikowy rekuperator o prostoliniowym przebiegu temperatur (w opracowaniu).

[12] OKOŁO-KUŁAK W.: Określanie kryteriów podobieństwa za pomocą metody "równań ramowych" (w opracowaniu).

ТРЕХАГЕНТНЫЙ РЕКУПЕРАТОР ИМЕЮЩИЙ РАВНУЮ НУЛЮ (В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ) СУММАРНУЮ ТЕПЛОЕМКОСТЬ ПОТОКОВ ВЕЩЕСТВ

Р е з ю м е

Темой работы является трехагентный рекуператор имеющий равную нулю (в алгебраическом смысле) сумму теплоемкости потоков веществ. В работе представлено аналитические решения проблемы исключительно при помощи критериев подобия и безразмерных симплексов (чисел).

THE THREE FLUIDS HEAT RECUPERATOR WITH THE BALANCED HEAT CAPACITIES OF THE FLOWING FLUIDS

S u m m a r y

The subject of this paper is the three fluids heat recuperator in which the sum of the heat capacities of the fluids is equal zero. The analytical solution and numerical example based on the similarity criterions and dimensionless numbers are given.