ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968
Seria: ENERGETYKA z. 28 Nr kol. 210

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

PRZEBIEGI TEMPERATUROWE W PRZEWODZĄCYM CIEPŁO UKŁADZIE PŁASKIM DWUWARSTWOWYM WYMIENIAJĄCYM CIEPŁO Z CIAŁEM TRZECIM

Streszczenie. Praca niniejsza jest drugą częścią obszerniejszej pracy. Rozpatrzono w niej problem przewodzenia ciepła w układzie złożonym z dwu przylegających do siebie ciał, ograniczonym równoległymi do siebie płaszczyznami z uwzględnieniem skończonej i nieskończonej prędkości rozchodzenia się ciepła oraz w przypadku równania falowego. Z jednej strony przyjęto adiabatyczny warunek wymiany ciepła. Z drugiej wymiana ciepła z otoczeniem odbywa się według prawa Newtona.

Zagadnienie podobnie jak w poprzednich pracach [4, 6] rozwiązano w dwu etapach. W pierwszym rozpatrzono rozwiązanie prostsze, powstałe przez pominięcie pewnych wyrażeń w transformacie Laplace'a rozwiązania. W etapie drugim wprowadzono pełne rozwiązanie jako pewną modyfikację rozwiązania przypadku pierwszego. Modyfikacja ta nie zmienia zasadniczego charakteru rozwiązania.

1. Wstęp

Praca niniejsza nawiązuje do pracy autora [4], w której omawiano analogiczne zagadnienie w przypadku układu jednowarstwowego. Dla celów porównawczych z przypadkiem układu o symetrii kulistej, przyjęto dla $x = 0$ warunek adiabatyczności. Wymianę z ciałem trzecim, zwanym otoczeniem przyjęto według prawa

$$t(\tau) = \sum_{k=1}^{n} B_k e^{\alpha_k \tau} + \Theta, \tag{1}$$

gdzie:

t - temperatura otoczenia,

B_k, $\alpha_k < 0, \theta$ - stałe rzeczywiste,

τ - czas.

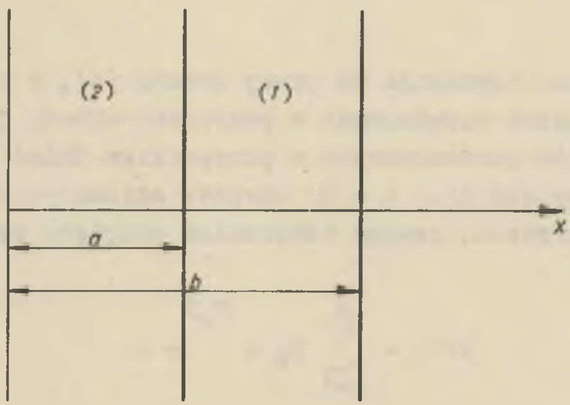
Podobnie jak w pracy [5] rozpatrzono dla celów porównawczych przypadek nieskończenie dużej prędkości rozchodzenia się ciepła oraz przypadek współczynnika przewodzenia temperatury dążącego do nieskończoności.

2. Sformułowanie zagadnienia

Układ (rys. 1) składa się z dwu przylegających do siebie przewodników ciepła ograniczonych płaskimi powierzchniami prostopadłymi do osi współrzędnych x prostokątnego układu współrzędnych. Pierwszy rozciąga się od $x = a$ do $x = b$, drugi do $x = 0$ do $x = a$. Charakteryzują je stałe c_i, a_i, $i = 1,2$, przy czym

a_i - współczynnik przewodzenia temperatury ciała i-tego,

c_i - prędkość rozchodzenia się ciepła w ciele i-tym.



Rys. 1. Układ rozpatrywany

Równania różniczkowe problemu można napisać w następującej postaci

$$\frac{\partial^2 t_i(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i}\,\frac{\partial t_i(x,\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{c_i^2}\,\frac{\partial^2 t_i(x,\tau)}{\partial \tau^2} \tag{2}$$

$$i = 1,\ 2$$

$$\bar{a}_i \leqslant x \leqslant b_i\ ,$$

gdzie:

$\bar{a}_1 = 0,\quad b_1 = a,\quad \bar{a}_2 = a,\quad b_2 = b\ .$

Warunki brzegowe przyjmujemy w następującej postaci

$$\left.\begin{aligned}
& t_1'(x,0) = t_{i,o} = \mathrm{const}, \quad i = 1,2 \\
& \frac{\partial t_i(x,\ 0)}{\partial \tau} = t_{i,o}' = \mathrm{const} \\
& \frac{\partial t_2(0,\tau)}{\partial x} = 0 \\
& t_1(a,\tau) = t_2(a,\tau) \\
& \frac{\lambda_1\, \partial t_1(a,\tau)}{\partial x} = \frac{\lambda_2\, \partial t_2(a,\tau)}{\partial x} \\
& \frac{\partial t_1(b,\tau)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda_1}\left[t_1(b,\tau) - t\,(\tau)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

przy czym

λ_i, $i = 1,2$ - współczynnik przewodzenia ciepła,
α - współczynnik wnikania ciepła,
t_i, $i = 1,2$ - temperatura ciała i-tego.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Szczegóły, dotyczące rozwiązania zagadnienia brzegowego, podano w przypisach. Rozpatrzono dwa przypadki. W pierwszym pominięto w mianowniku wyrażenia występujące przy czynniku $e^{-2q_2 a}$ oraz przy $e^{-2q_1(b-a)}$ w liczniku zaś wyrażenia zawierające czynnik $e^{-2q_2 a}$. Pozwala to otrzymać stosunkowo proste wyrażenia, w których występują charakterystyczne dla poszczególnych przypadków cechy. W przypadku drugim podano pełne rozwiązanie zagadnienia. Ponieważ jako rozwiązanie odniesienia przyjęto rozwiązanie przypadku pierwszego, można było skomplikowane rozwiązanie ogólne zinterpretować podobnie jak w przypadku pierwszym. Przejście do przypadku ogólnego nie wpłynęło więc na charakter rozwiązania.

Jak podano we wstępie przedyskutowano właściwość rozwiązań w trzech przypadkach: 1) najogólniejszym sformułowanym w zależnościach (1) do (3), 2) przy założeniu $a_1 \to \infty$ oraz 3) $c_1 \to \infty$.

3.1. Przypadek I

W tym przypadku $q_1 = \sqrt{\frac{p}{a_1} + \frac{p^2}{c_1^2}}$.

Rozwiązanie problemu można napisać w następującej postaci

$$t_1(x,\tau) - t_{1,0} + \frac{a_1}{c_1^2} t_{1,0}'\left(1 - e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau}\right) = \left[(t_{1,0} - t_{2,0}) - \frac{a_1}{c_1^2} t_{1,0}' + \frac{a_2}{c_2^2} t_{2,0}'\right] \int_0^{\tau} L^{-1}(I - III)\Big|_{\tau_0} d\tau_0 +$$

$$+ \int_0^{\tau} \left(\frac{a_1}{c_1^2} t_{1,0}' e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau} - \frac{a_2}{c_2^2} t_{2,0}' e^{-\frac{c_2^2}{a_2}\tau} \right)_{\tau - \tau_0} .$$

$$\cdot\ L^{-1}(I - III)\Big|_{\tau_o} d\tau_o + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\left(t_{1,o} - \frac{a_1}{c_1^2} t_{1,o}'\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau} L^{-1}(III - IV)\Big|_{\tau_o} d\tau_o + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \int_0^{\tau} \left(\frac{a_1}{c_1^2} t_{1,o}' e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau} -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} B_k e^{\alpha_k \tau}\right)_{\tau-\tau_o} \cdot L^{-1}(III - IV)\Big|_{\tau_o} d\tau_o \tag{4}$$

$$t_2(x,\tau) - t_{2,o} + \frac{a_2}{c_2^2} t_{2,o}'\left(1 - e^{-\frac{c_2^2}{a_2}\tau}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot$$

$$\cdot \left[(t_{1,o} - t_{2,o}) - \frac{a_1}{c_1^2} t_{1,o}' + \frac{a_2}{c_2^2} t_{2,o}'\right] \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau} L^{-1}(1)'\Big|_{\tau_o} d\tau_o + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^{\tau} \left(\frac{a_1}{c_1^2} t_{1,o}' e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau} -\right.$$

$$\left. - \frac{a_2}{c_2^2} t_{2,o}' e^{-\frac{c_2^2}{a_2}\tau}\right)_{\tau-\tau_o} \cdot L^{-1}(1)'\Big|_{\tau_o} d\tau_o +$$

$$+ \frac{\alpha}{\lambda_1} \cdot \left[(t_{1,o} - \Theta) - \frac{a_1}{c_1^2} t_{1,o}'\right] \int_0^{\tau} L^{-1}(2)'\Big|_{\tau_o} d\tau_o +$$

$$+ \frac{\alpha}{\lambda_1} \int_0^{\tau} \left(\frac{a_1}{c_1^2} t_{1,o}' e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau} - \sum_{k=1}^{n} B_k e^{\alpha_k \tau}\right)_{\tau-\tau_o} \cdot$$

$$\cdot\, L^{-1}(2)\Big|_{\tau_0} d\tau_0 + \int\limits_0^{\tau}\Big[(t_{1,0} - t_{2,0}) + \frac{a_1}{c_1^2}\Big(1 - e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau}\Big)\,\cdot$$

$$\cdot\, t_{1,0'} - \frac{a_2}{c_2^2}\Big(1 - e^{-\frac{c_2^2}{a_2}\tau}\Big)\, t_{2,0'}\Big]_{\tau-\tau_0} L^{-1}(3)\Big|_{\tau_0} d\tau_0 . \tag{5}$$

Podobnie zbudowane są rozwiązania w przypadku $q_i = \frac{p}{c_i}$, $i = 1,2$ $(a_i \to \infty)$ z tą tylko różnicą, że w miejsce wyrażenia $\Big(1 - e^{-\frac{c_i^2}{a_i}\tau}\Big)$ należy wstawić τ oraz w przypadku $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$, $i = 1,2$ $(c_i \to \infty)$ z tym, że należy opuścić wyrażenia zawierające wartości początkowe pierwszych pochodnych.

Wyrażenia I - IV i (1) - (3) dla każdego z trzech wymienionych wyżej przypadków zostały podane w dodatku. Na podstawie podanych w dodatku funkcji czasowych można przy pomocy twierdzenia o splocie otrzymać funkcje czasowe odpowiadające wyrażeniom I - IV i (1) - (3).

3.1.2. Sens fizykalny otrzymanych rozwiązań

Mimo formalnego podobieństwa rozwiązań w postaci (4) i (5) ważnych z nieznacznymi modyfikacjami w rozpatrzonych trzech przypadkach, odpowiadających różnym definicjom wielkości q_i, własności fizyczne rozwiązań są w tych przypadkach różne.

W przypadku najogólniejszym $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i} + \frac{p^2}{c_i^2}}$, $i = 1,2,$ jak widać z zestawienia wielkości podanych w dodatku, we wszystkie wyrażenia I - IV i (1) - (3) wchodzi czynnik $G_{i,k}$ któremu odpowiada funkcja czasowa, przedstawiona innym wyrażeniem dla $0<\tau<\frac{m_k}{c_i}$, innym dla $\tau>\frac{m_k}{c_i}$. W pierwszym przypadku rozwiązanie jest równe zeru. Wyraża to fakt, obserwowany w praktyce, że czoło zmiany temperatury rozchodzi się ze skończoną prędkością.

W przypadku $q_i = \frac{p}{c_i}$, $i = 1,2$ otrzymujemy o odnośnych wyrażeniach czynniki w formie fal bieżących, funkcji delta Diraca, zanikającej funkcji wykładniczej lub funkcji trygonometrycznej. Występowanie funkcji delta Diraca nie jest niebezpieczne, ze względu na stosowanie twierdzenia o splocie funkcji.

W przypadku $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$, $i = 1,2$ otrzymujemy funkcje znane z problemów przewodzenia ciepła z prędkością nieskończenie dużą.

3.2. Przypadek II

Rozwiązanie otrzymane w przypadku I, wyprowadzono przy szeregu założeń upraszczających. Dzięki temu w sposób stosunkowo przejrzysty występują w nim charakterystyczne cechy, właściwe poszczególnym typom równań różniczkowych, rozpatrzonych w pracy. Można uwolnić się od tych założeń upraszczających i przejść do pełnych rozwiązań. Uczyniono to w dwu krokach. Po pierwsze przez wprowadzenie pominiętych w liczniku wyrażeń. Występują w nich wyrażenia analogicznie zbudowane, jak w przypadku I, mnożone przez czynnik o postaci analogicznej do jednego z wyrażeń tego przypadku. Przez stosowanie twierdzenia o splocie można więc stąd otrzymać wyrażenia podobnie zbudowane jak w przypadku I.

Druga poprawka pochodzi od wyrazów nieuwzględnionych w mianowniku. Jeżeli porównamy pełny mianownik w równaniach (P 7) i (P 8) i mianownik równań (P 12), wtedy widzimy na podstawie równań (P 33) i (P 34), że w pierwszym można wyłączyć mianownik przypadku I przed nawias, natomiast odwrotność drugiego wyrażenia rozwinąć w szereg nieskończony, przez który będą mnożone wyrażenia występujące w uzupełnionym liczniku. Każdy wyraz przypadku I oraz każdy z dodatkowych wyrazów pominiętych w przypadku I, zostaje zastąpiony obecnie przez nieskończenie wiele wyrazów, powstałych przez mnożenie jego przez wyrazy nieskończonego szeregu. Otrzymane tak wyrażenia są tego samego typu co rozpatrzone w przypadku I, więc jeżeli chodzi o sens fizykalny, nie wnoszą niczego nowego. Wynik może być zinterpretowany w ten sposób, że zagadnienie rozwiązujemy przy pomocy nieskończonego szeregu odpowiednio umieszczonych źródeł, metoda znana i stosowana w tego rodzaju zagadnieniach brzegowych. Zastosowana w pracy metody pozwala prosto wyliczyć funkcje źródła, trudne zresztą w innych warunkach do wyznaczenia. W przypadku równania falowego miejsce funkcji źródła zajmują fale d'Alemberta. Własności występujących w pracy funkcji dla trzech rozpatrzonych w pracy przypadków przedyskutowano w pracy [5]. Ze względu na szczupłość miejsca i złożoność rozwiązań nie podano tych rozwiązań explicite, szkicując w przypisach drogę do ich otrzymania. Otrzymane tam wyrażenia po zastosowaniu twierdzenia o splocie pozwalają na uzyskanie wzmiankowanego rozwiązania. Z punktu widzenia celu pracy nie podanie tych rozwiązań jest nieistotne, ponieważ charakter tych rozwiązań jest jasny na podstawie przeprowadzonych w przypisach rozważań.

4. Przypisy

4.1. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (2) - (3) metodą całki Laplace'a

Oznaczamy przez p parametr transformacji ze względu na czas.
$T_i(x,p)$ - transformaty temperatur składników układu, i = 1,2.
$T(p)$ - transformata temperatury otoczenia.

Transformaty równań różniczkowych (2) oraz warunków brzegowych (3) są następujące:

$$\frac{d^2T_i(x,p)}{dx^2} = \frac{1}{a_i}\left[p\,T_i(x,p) - t_{i,o}\right] + \frac{1}{c_i^2}\left[p^2T_i(x,p) - p\,t_{i,o} - t'_{i,o}\right], \qquad i = 1,2 \tag{P 1}$$

$$\frac{d\,T_2(0,p)}{dx} = 0$$

$$T_1(a,p) = T_2(a,p$$

$$\lambda_1 \frac{d\,T_1(a,p)}{dx} = \lambda_2 \frac{d\,T_2(a,p)}{dx} \tag{P 2}$$

$$\frac{d\,T_1(b,p)}{dx} = - \frac{\alpha}{\lambda_1}\left[T_1(b,p) - T(p)\right].$$

Jeżeli oznaczymy

$$f_i(x,p) = \frac{1}{q_i^2}\left[\left(\frac{1}{a_i} + \frac{p}{c_i^2}\right) t_{i,o} + \frac{t_{i,o}'}{c_i^2}\right],\ i = 1,2 \tag{P 3}$$

przy czym

$$\frac{df_i(x,p)}{dx} = 0, \qquad i = 1,2$$

$$q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i} + \frac{p^2}{c_i^2}}, \qquad i = 1,2 \tag{P 4}$$

możemy napisać rozwiązanie zagadnienia (P 1), (P 2) w następującej postaci:

$$T_1(x,p) = - \frac{F_1(a,p)}{M(p)}\left[e^{-q_1(b-x)}\left(q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) - e^{q_1(b-x)}\left(q_1 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\right] - \frac{F_2(b,p)}{M(p)}\left[e^{-q_1(a-x)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 \operatorname{sh} q_2 a +\right.\right.$$

$$+ q_1 \operatorname{ch} q_2 a) - e^{q_1(a-x)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 \operatorname{sh} q_2 a - q_1 \operatorname{ch} q_2 a)\right] + f_1(x,p)$$

$$T_2(x,p) = \frac{\operatorname{ch} q_2 x}{M(p) \operatorname{ch} q_2 a}\left\{F_1(a,p)\left[- e^{-q_1(b-a)}(q_1 - \right.\right.$$

$$\left.- \frac{\alpha}{\lambda_1}) - e^{q_1(b-a)}(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1})\right] - F_2(b,p)\left[(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 \operatorname{sh} q_2 a + \right.$$

$$+ q_1 \operatorname{ch} q_2 a) - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 \operatorname{sh} q_2 a - q_1 \operatorname{ch} q_2 a) + M(p)\left[f_1(a,p) - \right.$$

$$\left.\left.- f_2(a,p)\right]\right\} + f_2(x,p) \tag{P 5}$$

$$F_1(a,p) = - \left[f_1(a,p) - f_2(a,p)\right] q_1 \operatorname{sh} q_2 a \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$F_2(a,p) = - \frac{\alpha}{\lambda_1}\left[f_1(b,p) - T(p)\right] \tag{P 6}$$

$$M(p) = - e^{q_1(a-b)}(q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1})(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 \operatorname{sh} q_2 a - q_1 \operatorname{ch} q_2 a) -$$

$$- e^{-q_1(a-b)}(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1})(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 \operatorname{sh} q_2 a + q_1 \operatorname{ch} q_2 a).$$

W celu otrzymania wyrażeń dogodnych do obliczania funkcji Greena podobnie jak w [3] po prostych przekształceniach,wprowadzając funkcje wykładnicze w miejsce hiperbolicznych, otrzymujemy

$$T_1(x,p) = - \frac{F_1'(a,p)}{M'(p)}\left[e^{-q_1(b-a+b-x)}(q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}) - \right.$$

$$- e^{-q_1(x-a)}(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1})\Big] - \frac{F_2'(b,p)}{M'(p)}\Big\{\Big[e^{-q_1(b-x)}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 +$$

$$+ q_1) - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 - q_1)e^{-2q_2a}\Big] - \Big[(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 - q_1) - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 +$$

$$+ q_1) e^{-2q_2a}\Big] e^{-q_1(x-a+b-a)}\Big\} + f_1(x,p)$$

$$T_2(x,p) = - ch\, q_2x \cdot \frac{F_1'(a,p)}{M'(p) ch\, q_2a}\Big[(q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}) e^{-2q_1(b-a)} +$$

$$+ (q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1})\Big] - ch\, q_2x \frac{q_1 F_2'(b,p)}{M'(p) ch\, q_2a} e^{-q_1(b-a)} +$$

$$+ \frac{ch\, q_2x}{ch\, q_2a}\Big[f_1(a,p) - f_2(a,p)\Big] + f_2(x,p) \qquad (P\ 7)$$

przy czym

$$2\, M'(p) = -\Big[-(q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}) e^{-q_1(b-a)} e^{2q_2a} + (q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1})\Big] \cdot$$

$$\cdot \Big[(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1) - (\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 - q_1)e^{-2q_2a}\Big],$$

$$2F_1'(a,p) = -(\frac{t_{1,0} - t_{2,0}}{p} + \frac{t_{1,0}'}{q_1^2\, c_1^2} - \frac{t_{2,0}'}{q_2^2\, c_2^2}). \qquad (P\ 8)$$

$$\cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2(1 - e^{-2q_2q}),$$

$$2F_2'(b,p) = -\frac{\alpha}{\lambda_1}(\frac{t_{1,0} - \Theta}{p} + \frac{t_{1,0}'}{q_1^2\, c_1^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{p - \alpha_k})$$

Dokonując w (P 7) i (P 8) przejścia granicznego $a_i \to \infty$, $i = 1,2$ otrzymujemy

$$q_i = \frac{p}{c_i}, \qquad i = 1,2 \tag{P 9}$$

i równanie (2) przechodzi w równanie falowe.

Dokonując przejścia granicznego $c_i \longrightarrow \infty$, $i = 1,2$ otrzymujemy

$$q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}, \qquad i = 1,2 \tag{P 10}$$

oraz kładąc

$$t_{i,o}' = 0, \qquad i = 1,2 \tag{P 11}$$

otrzymujemy klasyczne równanie przewodzenia ciepła.

Celem otrzymania funkcji czasowych, zbudowanych z funkcji Greena, stosujemy podobne postępowanie jak w [3], rozpatrując dwa przypadki szczególne.

4.2. Przypadek pierwszy

Najprostsze funkcje czasowe otrzymujemy pomijając w mianowniku wyrażenia, w których występuje jako czynnik e^{-2q_2a} oraz $e^{-2q_1(b-a)}$ oraz w liczniku wyrażenia zawierające czynnik e^{-2q_2a}.

W tym przypadku otrzymujemy:

$$T_1(x,p) - \frac{t_{1,o}}{p} - \frac{t_{1,o}'}{c_1^2\, q_1^2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - t_{2,o}}{p} + \frac{t_{1,o}'}{c_1^2\, q_1^2} - \frac{t_{2,o}'}{c_2^2\, q_2^2}\right)(\mathrm{I-II}) + \frac{\alpha}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - \theta}{p} + \frac{t_{1,o}'}{c_1^2\, q_1^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{p - \alpha_k}\right) \cdot$$

$$\cdot\ (\mathrm{III-IV}).$$

$$T_2(x,p) - \frac{t_{2,o}}{p} - \frac{t_{2,o}'}{c_2^2\, q_2^2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - t_{2,o}}{p} + \frac{t_{1,o}'}{c_1^2\, q_1^2} - \frac{t_{2,o}'}{c_2^2\, q_2^2}\right)(1)' + \frac{\alpha}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - \Theta}{p} + \frac{t_{1,o}'}{c_1^2\, q_1^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{p - \alpha_k}\right)(2)' + \left(\frac{t_{1,o} - t_{2,o}}{p} + \frac{t_{1,o}'}{c_1^2\, q_1^2} - \frac{t_{2,o}'}{c_2^2\, q_2^2}\right)(3)' \qquad (P\ 12)$$

przy czym przyjęto mianownik w postaci

$$2\,M'(p) = \left(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, q_2 + q_1\right) \qquad (P\ 13)$$

oraz

$$I = \frac{q_1\left(q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) e^{-q_1(b-a+b-x)}}{\left(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, q_2 + q_1\right)}$$

$$II = \frac{q_2\, e^{-q_1(x-a)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, q_2 + q_1}$$

$$III = \frac{e^{-q_1(b-x)}}{q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}} \qquad (P\ 14)$$

$$IV = \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, q_2 - q_1\right) e^{-q_1(x-a+b-a)}}{\left(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, q_2 + q_1\right)}$$

148 Józef Szpileck

$$(1)' = (3)' \frac{q_2}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1}$$

$$(2)' = (3)' \frac{q_1^{-q_1(b-a)}}{\left(q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1\right)}$$

$$(3)' = \frac{\operatorname{ch} q_2 x}{\operatorname{ch} q_2 a} .$$

4.2.1. Przypadek, gdy q_1 dane są w postaci (P 4).

W tym przypadku można napisać:

$$I = G_{1,1}\left[1 - 2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right) B_1\right] C_1 D_1 p$$

$$II = G_{1,2} C_2 D_1 p$$

$$III = G_{1,3} B_1 D_1 p$$

$$IV = G_{1,4} B_1 (1 - 2 C_1) D_1 p \qquad \text{(P 15)}$$

$$(1)' = (3)' C_2$$

$$(2)' = (3)' B_1 C_1 D_1 G_{1,5}$$

$$(3)' = p \sum_{n=0}^{\infty} \left(G_{2,m_n,6} + G_{2,m_n,7}\right) D_2$$

przy czym oznaczono

$$G_{i,k} = \frac{p}{q_i}\, e^{-q_i m_k}, \qquad i = 1,2, \qquad k = 1,\ldots\ldots 7$$

$$m_1 = b - a + b - x, \qquad m_2 = x - a$$

$$m_3 = b - x \qquad m_4 = b - a + x - a$$

$$m_5 = b - a \qquad m_{n,6} = a + 2\,na + x$$

$$m_{n,7} = a + 2\,n\,a - x \tag{P 16}$$

$$B_1 = \frac{1}{q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}}$$

$$C_1 = \frac{q_i}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1}, \qquad i = 1,2$$

$$D_i = \frac{q_i}{p^2}, \qquad i = 1,2$$

W celu obliczenia funkcji czasowej odpowiadającej funkcji $G_{i,k}$ przekształcamy wielkość q_i do postaci

$$q_i = \frac{1}{c_i}\sqrt{\left(p + \frac{c_i^2}{2\,a_i}\right)^2 - \frac{c_i^4}{4\,a_1^2}} \tag{P 17}$$

wtedy

$$G_{i,k} = \frac{\left(p + \frac{c_i^2}{2\,a_i}\right)}{q_i}\, e^{-q_1 m_k} - \frac{c_i^2}{2a_i}\,\frac{e^{-q_1 m_k}}{q_i} = G_{i,k,1} - \frac{c_i^2}{2a_i}\, G_{i,k,2}$$

(P 18)

gdzie: $G_{i,k,1}$, $G_{i,k,2}$ podstawiono w miejsce funkcji wielkości q_i występujących po prawej stronie.

Na podstawie tablic [1]

$$L^{-1}\left\{G_{i,k,1}\right\} = e^{-\frac{c_i^2 t}{2a_i}} \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 < t < \frac{m_k}{c_i} \\ \frac{c_i^2 t}{2a_i} \dfrac{I_1\left(\frac{c_i^2}{2a_i}\sqrt{t^2 - \frac{m_k^2}{c_i^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{m_k^2}{c_i^2}}} + L^{-1}\left\{G_{i,k,3}\right\} \\ \text{dla } t > \frac{m_k}{c_i} \end{cases} \qquad (P\ 19)$$

gdzie:

$G_{i,k,3}$ równa się iloczynowi funkcji $e^{-\frac{m_k c_i}{2a_i}}$ przez czynnik przesuwający czas o $\frac{m_k}{c_i}$.

$$L^{-1}\left\{G_{i,k,2}\right\} = e^{-\frac{c_i^2 t}{2a_i}} \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 < t < \frac{m_k}{c_i} \\ I_o\left(\frac{c_i^2}{2a_i}\sqrt{t^2 - \frac{m_k^2}{c_i^2}}\right) \text{ dla } t > \frac{m_k}{c_i} \end{cases} \qquad (P\ 20)$$

$I_o(x)$, $I_1(x)$ funkcje Bessela pierwszego rodzaju urojonego argumentu.

Funkcję $L^{-1}\left\{\frac{1}{q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}}\right\}$ wyliczamy na podstawie [1], wyliczając pomocniczo

$$L^{-1}\left\{\frac{c_1}{p + \frac{c_1\alpha}{\lambda_1}}\right\} = c_1 e^{-c_1\frac{\alpha}{\lambda_1}t} \qquad (P\ 21)$$

przy pomocy zależności

$$L^{-1}\left\{B_1\right\} = c_1\, e^{-c_1 \frac{\alpha}{\lambda_1} t} + \frac{c_1^2}{2a_1}\int_0^{\tau} c_1\, e^{-c_1 \frac{\alpha}{\lambda_1}\sqrt{t^2 - u^2}} \cdot$$

$$\cdot\, I_1(u)\, du. \tag{P 22}$$

Wyrażenie C_i przekształcamy następująco:

$$C_i = \frac{q_i}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1} = \frac{q_i}{q_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{q_2}{q_1}\right)^n (-1)^n\right] \tag{P 23}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{c_1}{c_2}\sqrt{\frac{p + \frac{c_2^2}{a_2}}{p + \frac{c_1^2}{a_1}}}$$

w tablicach [1] znajdujemy

$$L^{-1}\left\{p^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right\} = \frac{c_1}{c_2}\left[e^{-\alpha\tau} I_0(\beta\tau) + (\alpha-\beta)\int_0^{\tau} e^{-\alpha u}\cdot I_0(\beta u)\,du\right]$$

$$L^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)L^{-1}\left\{p^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right\} \tag{P 24}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2^2}{a_2} + \frac{c_1^2}{a_1}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1^2}{a_1} - \frac{c_2^2}{a_2}\right).$$

Parzyste potęgi $\frac{q_2}{q_1}$ obliczają się według prostszej formuły np.

$$L^{-1}\left\{\frac{q_2^2}{q_1^2}\right\} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\left[\delta(\tau) - \left(\frac{c_2^2}{a_2} - \frac{c_1^2}{a_1}\right) e^{-\frac{c_1^2}{a_1}\tau}\right]. \tag{P 25}$$

Kolejne nieparzyste potęgi $\frac{q_2}{q_1}$ mogą być przedstawione w postaci iloczynu parzystej potęgi i czynnika $\frac{q_2}{q_1}$.

Przy pomocy twierdzenia o splocie funkcji można obliczyć na tej podstawie funkcje czasowe odpowiadające poszczególnym wyrazom szeregu (P 23).

4.2.2. Przypadek $q_i = \frac{p}{c_i}$, $i = 1,2$.

W tym przypadku otrzymujemy następujące transformaty I-IV i $(1)' - (3)'$.

$$\left.\begin{aligned}
&I = G_{1,1} D_1 A && II = G_{1,2} D_2 \\
&III = G_{1,3} B\, c_1 && IV = G_{1,4} E\, B\, c_1 \\
&(1)' = (3)' D_2 && (2)' = (3)' D_1\, B\, c_1\, G_{1,5} \\
&(3)' = \frac{ch\left(\frac{px}{c_2}\right)}{ch\left(\frac{pa}{c_2}\right)} &&
\end{aligned}\right\} \quad (P\ 26)$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned}
&A = 1 - 2\left(\frac{c_1\alpha}{\lambda_1}\right) B \\
&B = \frac{1}{p + \frac{c_1\alpha}{\lambda_1}} \\
&D_i = \frac{\frac{1}{c_i}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1}}, \quad i = 1,2
\end{aligned}\right\} \quad (P\ 27)$$

$$E = 1 - 2 D_1$$

$G_{i,k}$ dla $i = 1,2$ i $k = 1$ do 5 oznaczono jak poprzednio.

Funkcje czasowe obliczają się w sposób elementarny. Należy tylko zwrócić uwagę, że stałym w wyrażeniach A i E odpowiada funkcja delta Diraca, $G_{i,k}$ przedstawia przesunięcie skali czasu, charakterystyczne dla równania falowego

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{p}\right)(3)'\right\} = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}}\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{x}{a}\right)\right].$$

$$.\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\tau\frac{c_2}{a}\right] \quad \text{dla} \; -a \leqslant x \leqslant a . \qquad (P\ 28)$$

Fizykalnie mamy tu nieskończony szereg fal bieżących, zbieżny jednostajnie.

4.2.3. Przypadek $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$, $i = 1,2$

W tym przypadku wyrażenia I-IV i (1) i (2) można przedstawić podobnie jak w poprzednim przypadku, z tym, że w miejsce $B\ c_1$ wchodzi $B\ a_1$.

Oznaczenia są następujące:

$$A = 1 - 2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\sqrt{a_1}\ B$$

$$B = \frac{1}{p + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\sqrt{a_1}}$$

$$D_i = \frac{\frac{1}{\sqrt{q_i}}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}}, \quad i = 1,2 \qquad (P\ 29)$$

$$E = 1 - 2\,D_1$$

$$(3)' = \frac{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{p}{a_2}}\right)}{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{\frac{p}{a_2}}\right)}$$

$$G_{i,k} = e^{-\sqrt{\frac{p}{a_i}}\, m_k}, \qquad i = 1,2 .$$

Oznaczenia m_k jak w poprzednim przypadku.
Funkcje czasowe mają następującą postać:

$$L^{-1}\left\{G_{i,k}\right\} = (\tfrac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{2}}\, m_k\tau^{-\frac{3}{2}}\, a_i^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{m_k^2}{4a_i\tau}}$$

$$L^{-1}\left\{(p^{\frac{1}{2}} + \alpha)^{-1}\right\} = \pi^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} - \alpha e^{\alpha^2\tau}\operatorname{erfc}(\alpha\tau^{\frac{1}{2}}) \qquad \text{(P-30)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{G_{i,k}}{p}\right\} = \pi^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{m_k^2}{4a_i\tau}}$$

$$L^{-}\left\{\frac{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)}{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)}\right\} = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\vartheta_1\left(\frac{x}{2a\, a_2}\,\middle|\,\frac{i\pi\tau}{a^2}\right)$$

przy czym funkcja eliptyczna Jacobiego jest określona przy pomocy szeregu jednostajnie zbieżnego

$$\vartheta_1(v,\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{2\pi\tau(n+\frac{1}{2})^2}\sin\pi(2n+1)v. \qquad \text{(P 31)}$$

4.3. Przypadek II

Wyrażenia poprawkowe pochodzące od wyrazów pominiętych w liczniku

$$\Delta_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - t_{2,o}}{p} + \frac{t_{1,o}'}{q_1^2 c_1^2} - \frac{t_{2,o}'}{q_2^2 c_2^2}\right)(I - II)\,.$$

$$.\, e^{-2q_2a} + \frac{\alpha}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - \Theta}{p} + \frac{t_{1,o}'}{q_1^2 c_1^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{p - \alpha_k}\right)\,.$$

$$.\,\left((III)\,\frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 - q_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1} - (IV)\,\frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 - q_1}\right) e^{-2q_2a} \qquad (P\ 32)$$

$$\Delta_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - t_{2,o}}{p} + \frac{t_{1,o}'}{q_1^2 c_1^2} - \frac{t_{2,o}'}{q_2^2 c_2^2}\right)(1)'\,.$$

$$.\left[e^{-2q_2a} + e^{-q_1(b-a)}\left(1 - 2\,\frac{\alpha}{\lambda_1} B_1\right)\right] + \frac{\alpha}{\lambda_1}\left(\frac{t_{1,o} - \Theta}{p} +\right.$$

$$\left. + \frac{t_{1,o}'}{q_1^2 c_1^2} - \sum_{n=1}^{n}\frac{B_k}{p - \alpha_k}\right)\frac{\lambda_2\, q_2}{\lambda_1\, q_1}(2)'\, e^{-q_1(b-a)}\,.$$

W wyrażeniach tych nie występują w porównaniu z poprzednio rozpatrzonymi żadne nowe typy funkcji, więc uwzględnienie tych wyrazów nie zmienia zasadniczego charakteru rozwiązań.

Mianownik w tym przypadku można napisać w postaci następującej:

$$\frac{1}{M'(p)} = \frac{2}{\left(q_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1\right)} \left(1 + P e^{-2q_2 a} - P^2 e^{-4q_2 a} + \right.$$

$$\left. + P^3 e^{-6q_2 a} - \ldots\right) \left(1 - Q e^{-2q_1(b-a)} + Q^2 e^{-4q_1(b-a)} - \ldots\right) \qquad (P\ 33)$$

gdzie:

$$P = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 - q_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2 + q_1}$$

$$(P\ 34)$$

$$Q = \frac{q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}}{q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}} \left(P - e^{-2q_2 a}\right)\left(1 + P e^{-2q_2 a} - P^2 e^{-4q_2 a} + \ldots\right)$$

Wyrażenie na P posiada szczególnie prostą postać w przypadku $q_i = \frac{p}{c_i}$ oraz $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$, $i = 1,2$, mianowicie jest wielkością stałą.

W wyrażeniu Q czynnik $A_1 = 1 - 2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)B_1$ został poprzednio przedyskutowany. W niektórych wyrażeniach występują składniki stałe. Nie wprowadzają one niczego nowego, gdyż są mnożone przez transformaty, występujące w przypadku I.

W przypadku najogólniejszym $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}} = \frac{p^2}{c_i^2}$, $i = 1,2$ wyrażenie

$$\frac{q_1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}}{q_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}} = 1 - 2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)B_1 \qquad (P\ 35)$$

oraz wyrażenie $P = 1 - 2\,C_1$ były poprzednio przedyskutowane. Wyrażenia $e^{-2\,q_1(b-a)}$ oraz typu $e^{-2\,q_2 a}$ mogą być przedstawione jako iloczyny $p.D_i$ oraz funkcji typu $G_{i,k}$. Ich funkcje czasowe były poprzednio przedyskutowane.

4.4. Rozważania, dotyczące zbieżności otrzymanych wyrażeń

Sumy występujące w liczniku rozwiązań w przypadku I i II są skończone. Natomiast wskutek rozwinięcia mianownika w przypadku II w szereg nieskończony, rozwiązania w tym przypadku zawierają szeregi nieskończone i wymagają zbadania ich zbieżności.

Wyrażenia otrzymane w postaci przetransformowanej przedstawiają zawsze szeregi jednostajnie zbieżne. Pozostaje do zbadania zbieżność odpowiadających im nieskończonych szeregów funkcji czasowych.

Mamy do zbadania szeregi o następujących transformatach: w równaniach (P 33) i (P 34)

$$1 + P\,e^{-2\,q_2 a} - P^2\,e^{-4\,q_2 a} + P^3\,e^{-6\,q_2 a} - \dots \qquad (a)$$

oraz

$$1 - Q\,e^{-2\,q_1(b-a)} + Q^2 \cdot e^{-4\,q_1(b-a)} - \dots \qquad (b)$$

W równaniu (P 23)

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_2\,q_2}{\lambda_1\,q_1}\right)^n (-1)^n \qquad (c)$$

W równaniu (P 15)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(G_{2,m_{n,6}} + G_{2,m_{n,7}}\right) \qquad (d)$$

Najbardziej skomplikowanie przedstawia się przypadek

$$q_i = \frac{p}{a_i} + \frac{p^2}{c_i^2}, \qquad i = 1,2$$

Zbieżność szeregów (a), (b) w tym przypadku jest uzależniona od zbieżności szeregu typu (c). Jeżeli przejście do funkcji czasowych wymaga w tym przypadku dla parzystych potęg $\frac{q_2}{q_1}$ znajomości teorii dystrybucji, to elementarnie daje się rozpatrzeć wyrażenie

$$p\, e^{-2q_2 a} = \frac{q_2}{p}\left[1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{q_2}{q_1}\right)^n \frac{p}{q_2}\, e^{-2q_2 a}\right] \qquad (P\ 36)$$

ponieważ

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{c_1}{c_2}\sqrt{\frac{\frac{c_2^2}{a_2} + p}{\frac{c_1^2}{a_1} + p}} \qquad (P\ 37)$$

oraz

$$\frac{q_2^2}{q_1^2} = 1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\,\frac{\frac{c_2^2}{a_2} - \frac{c_1^2}{a_1}}{\frac{c_1^2}{a_1} + p}\,. \qquad (P\ 38)$$

Podstawiając (P 37), (38) do (P 36) i uwalniając od nawiasu otrzymujemy szereg w którym każdemu wyrazowi odpowiada ograniczona funkcja czasowa.

Jeżeli oznaczymy majorantę wyrazu

$$\left|L^{-1}\left\{\frac{q_2}{p}\left(\frac{p}{q_2}\, e^{-2q_2 a}\right)\sqrt{\frac{\frac{c_2^2}{a_2} + p}{\frac{c_1^2}{a_1} + p}}\right\}\right| \qquad (P\ 39)$$

przez A oraz majorantę

$$\left| L^{-1}\left\{ \sqrt{\frac{\frac{c_2^2}{a_2} + p}{\frac{a_1^2}{a_1} + p}} \right\} \right| \qquad \text{(P 40)}$$

przez C, otrzymamy majorantę $\left| P' e^{-2q_2 a} \right|$ w postaci

$$3 + 2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) A\, e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} C\, t} \qquad \text{(P 41)}$$

szereg transformat jest więc bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.

Podobnie, jeżeli uwzględnimy, że C_1 występuje w połączeniu z innymi czynnikami, otrzymujemy również zbieżność bezwzględną i jednostajną wyrażeń zawierających C_1.

Podobnie można wykazać zbieżność szeregu (a), (b).

Jeżeli chodzi o szereg (d), to odpowiadające mu funkcje czasowe mają tę właściwość, że zaczynają być różne od zera w pewnej chwili, przechodzą przez ekstremum i następnie dążą do zera, przy czym maleją gdy rośnie indeks k. Stąd wynika, że ponieważ ektrema funkcji są zawsze skończone, charakter tej nieskończonej sumy będzie taki sam jak każdej poszczególnej funkcji.

W pozostałych dwu przypadkach P jest wielkością liczbową mniejszą od 1, mianowicie w przypadku $q_1 = \frac{p}{c_1}$

$$P = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 c_2} - \frac{1}{c_1}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 c_2} \quad \frac{1}{c_1}} \qquad \text{(P 42)}$$

W przypadku $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$

$$P = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1\sqrt{a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1\sqrt{a_2}} \quad \frac{1}{\sqrt{a_1}}}. \qquad (P\ 43)$$

W przypadku $q_i = \frac{p}{c_i}$ funkcja czasowa odpowiadająca czynnikowi e^{-2q_2a} i jego wyższym potęgom, oznaczają przesunięcie skali czasu, ze względu więc na $P<1$ szeregi odpowiadające (P 33) i (P 34) będą zbieżne.

W przypadku $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$ funkcje czasowe odpowiadające e^{-2q_2a} i $e^{-2q_1(b-a)}$ są dystrybucjami, ale można łatwo przejść od nich do funkcji czasowych skończonych stosując twierdzenie o splocie. Otrzymane w ten sposób z (P 33) i (P 34) szeregi będą bezwzględnie zbieżne dzięki $P<1$.

LITERATURA

[1] ERDELYI A.: Tables of integral transforms, I, Mc Graw Hill, N.York 1954.

[2] FICHTENHOLC G.M.: Kurs differencjalnowo i integralnowo isczislenia, t. 3, Gos.Izd.T.T.Lit., M. 1949.

[3] ŁYKOW A.W.: Tieoria tiepłoprowodnosti, Gos.Izd.T.T.Lit., M.1952.

[4] SZPILECKI J.: Przebiegi czasowe temperatur w układzie płaskim jednowarstwowym, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka Nr 16, 1964, 133-149.

[5] SZPILECKI J.: Związki między funkcjami Greena równań różniczkowych: falowego i przewodzenia ciepła (w druku).

[6] SZPILECKI J.: Wpływ skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła na zjawiska przewodzenia ciepła w ciele kulistym jedno i dwuwarstwowym (w druku).

ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛОСКОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ, ОБМЕНЯЮЩИХ ТЕПЛОТУ С ТРЕТИМ ТЕЛОМ

Р е з ю м е

Эта работа является второй частью более обширной работы. В первой части [4] рассматривается проблема теплопроводности тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями. С одной стороны принятое адиабатическое условие теплообмена, с другой - теплообмен подчинен закону Нютона. Во второй части подобная проблема рассматривается для системы двух тел, ограниченных параллельными плоскостями с подобными граничными условиями. Проблема, как в предшествующей работе автора [6] для тел сферической симметрии решена для трёх случаев: теплопроводности с конечной и бесконечной скоростью движения теплоты и для волнового управления.

Полученное решение свидетельствует о том, как возрастают математические трудности, если от случая бесконечной скорости переходится к случаю конечной, если используются функции Грина. Как было сказано в [6], для подобной проблемы со сферической симметрией, переход простой при использовании рядов Фурье. Подобные свойства имеют решения для плоской проблемы из-за формального подобия решений. Волновое уравнение рассматривается тоже как предельный случай.

В полученном решении выражены характерные особенности функции Грина, принадлежащих к этим трем случаям. Они подробно рассматриваются в [5].

Проблема решена в двух шагах как в предшествующих работах [4]. Впервые рассматривается более простое решение, полученное при использовании некоторых упрощений; во втором, полное решение, как некоторое видоизменение первого. Это не нарушает совсем характерных особенностей первого решения.

TEMPERATURE VARIATIONS IN A FLAT SYSTEM CONSISTING OF THE TWO HEAT CONDUCTING BODIES, EXCHANGING HEAT WITH A THIRD BODY

Summary

This paper is a second part of a more extense paper. In the first one [4] the problem of heat conduction in a body, bounded by parallel planes has been discussed. From one side an adiabatic heat exchange condition was assumed, from the other side the heat exchange follows the Newton law.

In the second part a similar problem has been discussed for a system, composed of two adjacent bodies, bounded by parallel planes, with analogous boundary conditions. The problem, similarly as in the foregoing author's paper regarding the systems with spherical symmetry [6] has been solved for three cases: of the heat conduction with finite and infinite heat propagation velocity and for wave equation. The obtained solution gives information, how the complexity of solution increases, when a transition is made from the case of infinite heat propagation velocity to that of the infinite one, when Greene's functions are being used. As has been in [6] mentioned, for analogous problem with spherical symmetry, the transition is very simple, when Fourier series are used. Similar properties have the solutions for plane problems in spite of formal similitude of solution.

The wave equation is also regarded as a limiting case.

In the obtained solution the characteristic feature for each Greene's functions has been expressed. The properties of these functions were considered in [5].

The problem is solved in two steps similarly as in the foregoing paper [4]: In the first one is the simpler solution considered, received by some simplifying assumptions. In the second step is the full solution discussed, as a modification of the first one. This does not influence the fundamental character of the solutions.